(Rényi Alfréd)

1

EGY STIELTJES FÉLE INTEGRÁLRÓL.

Doktori disszertáció.

Szeged, 1945 jun. 6.

BEVEZETÉS .

A következőkben vizsgálataink tárgyát elsősorban az

$$F(z) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(u)\,du}{z-u} \qquad /1/$$

integrál képezi, ahol az $f(u)$ valós függvényről feltesszük, hogy a $(-1,+1)$ intervallumban Lebesgue-integrálható, és $(-1,+1)$ minden zárt belső intervallumában korlátos. Az ilyen függvényeket rövidség kedvéért A -tipusu függvényeknek nevezzük.

Az 1. fejezetben azzal a problémával foglalkozunk, hogy mely analitikus függvények állithatók elő az /1/ alakban. Ezt a függvény-osztályt 7 szükséges és elégséges feltétellel sikerült teljesen jellemezni. /1. tétel /

Az 1. tétel bizonyitása folyamán adódik, hogy a kritikus $(-1,+1)$ intervallum majdnem minden x pontjában létezik /1/ képzetes részének a határértéke, és $-\pi \cdot f(x)$ -el egyenlő. / 2. tétel /

A 2. fejezetben a valós rész határértékét vizsgáljuk. Arra az eredményre jutunk, hogy a valós rész határértékének létezése az x pontban equivalens az ~~x~~

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(u)}{x-u}\,du \qquad /2/$$

*

Cauchy féle főérték létezésével. /3. tétel /

Dolgozatunk második részében bizonyos trigonometriai sorokkal foglalkozunk, amelyeket a Cauchy féle főérték fogalmának domináns szerepére való tekintettel Cauchy-Fourier féle soroknak nevezünk. Ilyen sorokkal Titchmarsh foglalkozott először [1/], ő a "principal values Fourier series " elnevezést használja. Ezekre a sorokra ugy jutunk, hogy a $(-1,+1)$ szakaszon felmetszett sikot konform leképezéssel átvisszük az egységkör belsejébe. Igy /1/-ből az egységkör belsejében reguláris függvényt nyerünk, amelynek képzetes részének határfüggvénye a kerületen a $-\pi f(\cos\vartheta) = -\pi g(\vartheta)$. $(0<\vartheta<\pi)$ függvény.

* A. S. Besicovitch On a general metric property of summable functions. Journal L. Math. Soc. I. 1926 p. 120–128

bebizonyítja, hogy ha f L-ben, akkor $\int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{x-t}$ majdnem mindenütt létezik. A bizonyítás direkt halmazelméleti.

Ugyanezt L^2-re Besicovitch. Fund. Math. 4 (1923) 172–195, ugyanezt L^p-re Titchmarsh M. Z. 25. 321–3[illegible] tétellel a Plessner tételre nem is lesz [illegible]

Probléma: Plessner t. Abelre: Ha egy trig sor majdnem mindenütt Abel summálható, akkor a konjugáltja is?

$f(u)$ -ra vonatkozó feltevéseink értelmében $g(\vartheta)$ mind integrálható, azonban maga $g(\vartheta)$ nem lesz okvetlenül integrálható, sorfejtése tehát nem Fourier sor.

A 3. fejezetben néhány segédtételt bocsájtunk előre, a 4. fejezetben a Cauchy -Fourier sorok tulajdonságait vizsgáljuk. Eredményeinket ugy foglalhatjuk össze, hogy a Cauchy-Fourier soroknál általában konvergenciáról nem lehet szó, tekintve, hogy ezen sorok együtthatói csak kivételes esetekben tartanak zérushoz, ezzel szemben szummabilitás szempontjából a Cauchy Fourier sorok, és konjugált soraik lényegében ugyanazokkal a tulajdonságokkal birnak, mint a közönséges Fourier sorok, ill. ezek konjugált sorai.

Ezzel kapcsolatban megjegyezzük, hogy a Cauchy Fourier sorok ill. konjugált soraik Abel szummabilitása a 3. fejezet lemmáinak segitségével közvetlenül következik a 2. és 3, tételből /2a. és 3a. tétel./ Mivel azonban közvetlen módszerrel ezen sorok Fejér féle közepekkel való szummálhatóságát is bebizonyitjuk /2b. és 3b. tétel / a 2a. és 3a. ~~XXXX~~ tételek bizonyitását csak vázoljuk. Ilymódon tehát a Cauchy Fourier sorok elmélete a dolgozat első függvénytani részétől független, és ezzel csak az kapcsolja össze, hogy az /1/ integrál vizsgálatának során merült fel természetes módon a Cauchy Fourier sorok fogalma, mig ezen összefüggésre való utalás nélkül ezen sorok definiciója önkényesnek tünhetne.

A tárgyalt kérdések irodalmát és eredményeink ujszerüségére vonatkozólag megjegyezzük a következőket: az 1. tétel tudomásunk szerint első kisérlet ilyen tipusu függvényosztály teljes jellemzésére. A 2. és 3. tétel Picard,/2/ ~~az~~ Privaloff és Brodsky/3/ eredményeinek általánositása. Ezen szerzők az /1/ integrállal analóg integrált vizsgálják az egységkör kerületén, és a 2. és 3. tétellel analóg eredményekre jutnak. Ha feltételeiket átfogalmazzuk az /1/ integrálra azt látjuk, hogy Picard csak azzal az esettel foglalkozik, amikor $f(u)$ folytonos és Lipschitz-feltételnek tesz eleget. Ezen feltevés erősségét az mutatja legjobban, hogy ebben az esetben /2/ létezése nem szorul külön bizonyitásra. Privaloff és Brodsky feltételeit ugy jellemezhetjük legjobban, hogy náluk $g(\vartheta)$ trigonometriai sora Fourier-Stieltjes sor. Ebből következik, hogy eredményeik nem tartalmazzák a mieinket, bár megforditva a mi tételeink sem tartalmazzák az övéket. A Cauchy-Fourier sorra vonatkozó eredményeink közül a 2b. tételt már Titchmarsh is kimondja, bizonyitás nélkül, de következik ez a tétel kerülő uton Young egy tételéből is.[4] Ennek ellenére közvetlen bizonyitást adunk erre a tételre, amely az eredeti Fejér féle gondolat egyszerü módositásából áll. Megemlitjük még ezzel kapcsolatban, hogy a Cauchy-Fourier sorok fogalmát tartalmazza a Young által felállitott általánosabb " restricted Fourier series of the 1st degree " kategória.[5] Sem Titchmarsh, sem Young nem foglalkoznak ezen általánositott Fourier sorok konjugált sorával, és a 3b. tételt, amely szerint a Cauchy Fourier sorok konjugált sorának, ott ahol szummábilis, a szummája lényegében ugyanazon integrállal állitható elő mint a közönséges Fourier-soroknál, más szerzőknél sem találtuk meg. Plessner egy általános tételéből[6] és a 2b. tételből viszont következik, hogy a szóbanforgó sor majdnem mindenütt szummábilis. Ennek megfelelően a 3. és 3b. tételeket általánosabb formában tudjuk kimondani /3c. és 3d. tételek/.

Megemlitjük még, hogy az /1/ integrál kapcsolatban áll a Jacobi polinomok elméletével[7]. Ezzel kapcsolatban a függelékben néhány egyszerü példát sorolunk fel, amelyeken eredményeink verifikálhatók. Továbbá a /2/ Cauchy féle integrál szerepel az aerodinamikában, a hordfelületek elméletének integrálegyenleteiben. Ezeknek az egyenleteknek a vizsgálatával többek között Betz[8], Hopf,[9] Schröder,[10] Söhngen,[11] Weininger[12] és Hamel[13] foglalkoztak. Más fizikai problémáknál, mint pl. a forgó lapátkerék problémájánál is fellép ugyanez az integrálegyenlet.[14]

Felhasználom az alkalmat, hogy hálás köszönetet mondjak tanáraimnak, dr. Fejér Lipót és dr. Riesz Frigyes professzor uraknak, akik értékes tanácsaikkal és utbaigazitásaikkal voltak szivesek munkámban támogatni. Ugyancsak sokat köszönhetek dr. Surányi János és dr. Turán Pál barátaimnak, akikkel a dolgozat irása közben felmerült problémákat megbeszéltük.

1/. E.C.Titchmarsh, Principal values Fourier series, Proc. London Math. Soc. /2/ 23, XLI-XLIII.

2/ É.Picard, Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles, Paris, 1927, 9. Leçon, p. 67-74. Erre a könyvre dr. Csillag Pál hivta fel a figyelmemet.

3./ J.Privaloff, G.Brodsky, On the limit values of a Cauchy Stieltjes integral, Mitt. Forsch.-Inst. Math. Mech. Kujbisev -Univ. Tomsk, 2. II. p. 43-51

4/ W.H.Young, On the convergence of the derived series of Fourier series, Proc. London Math. Soc. /2/, 17, 1918, p. 195-236, §10, p. 212-213. Young dolgozataira Riesz professzor ur volt szives figyelmeztetni.

5/ W.H.Young, On restricted Fourier series and the convergence of power series, Proc. London Math. Soc. /2/ 17, 1918, p. 353-366.

6/ A.Plessner, Über konjugierte trigonometrische Reihen, C.R. Acad. Sc. URSS 1935, IV, 251-253.

7/ G.Szegő, Orthogonal polynomials, Am. Math. Soc. Coll. Publ. XXIII 4.61.2 p.7

8/ Betz, Beiträge zur Tragflügeltheorie, Diss. Göttingen, 1919.

9/ Fuchs-Seewald-Hopf, Aerodynamik, Bd. 2, 2. Auflage p. 82.

10/ K.Schröder, Über eine Integralgleichung erster Art der Tragflügeltheorie, Diss. Göttingen, 1919

11/ H.Söhngen, Die Lösungen der Integralgleichung und deren Anwendung in der Tragflügeltheorie, Math. Zeitschrift, 45, p. 245-264

12/ J.Weininger, Ein Satz über Fourierreihen und seine Anwendung auf die Tragflügeltheorie, Math. Zeitschrift, 47, p. 16-33.

13/ G.Hamel, Integralgleichungen, Berlin, 1937, p. 145-148.

14/ W.Kucharski, Eine Integralgleichung für den rotierenden Schaufelstern und ihre Lösung, Z. angew. Math. Mech. 21, p. 65-79.

1. Fejezet.

1. TÉTEL. Az $F(z)$ analitikus függvény akkor és csak akkor állitható elő az

$$F(z) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(u)}{z-u} du \qquad /1/$$

alakban, ahol $f(u)$ a $(-1,+1)$ -ben Lebesgue integrálható és a $(-1,+1)$ minden zárt belső intervallumában korlátos valós függvény/röviden ~~XX~~ A-tipusu függvény/ ,ha teljesiti a következő 7 feltételt:

Legyen $z = x+iy$, $F(z) = R(x,y) + i\cdot J(x,y)$

1. $F(z)$ a $(-1,+1)$ szakasz mentén felmetszett sikban egyértékü ~~értelmü~~ analitikus függvény, amely a metszet pontjait kivéve minden véges pontban reguláris.

2. $F(z)$ a végtelenben is reguláris és ott a 0 értéket veszi fel.

3. $F(z)$ a valós tengely $x > 1$ és $x < -1$ szakaszain valós értékeket vesz fel.

4. A $(-1,+1)$ intervallumban majdnem mindenütt létezik a

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} J(x,y) = J(x)$$

határérték, és $J(x)$ a $(-1,+1)$ intervallumban Lebesgue-integrálható.

5.

$$|J(x,y)| \leq K(\alpha) \qquad (-\alpha \leq x \leq +\alpha,\ 0<\alpha<1)$$

ahol $K(\alpha)$ y-tól független, csak α -tól függő konstáns.

6.

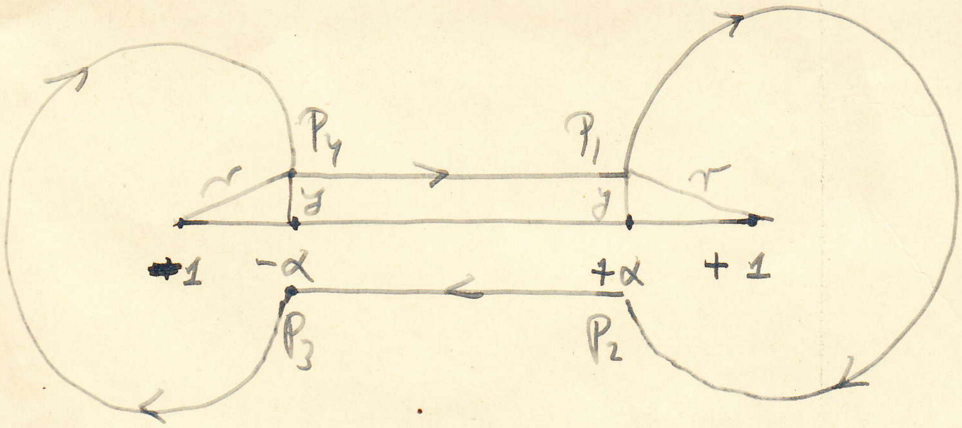
$$\lim_{y\to 0} y\cdot\int_{-\alpha}^{+\alpha} |R(x,y)|dx = 0 \qquad (0<\alpha<1)$$

7.

$$\lim_{r\to 0} \oint_{C_r} \frac{F(z)}{\zeta - z} dz = 0$$

ahol ζ a komplex sik tetszőleges, ~~nem~~ a kritikus intervallumhoz nem tartozó pontja,és a C_r integrációs ut a $(+1)$ ill. a (-1) köré irt r sugaru kör.

B/IZONYITÁS. Először a feltételek elégségességét bizonyitjuk. Legyen ζ a komplex sik tetszőleges pontja,amely nem tartozik a kritikus intervallumhoz. $C_{y\alpha}$ jelentse a következő integrációs utat: a $P_1 = \alpha + iy$ ponttól a $P_2 = \alpha - iy$ pontig a $+1$ körül $r = \sqrt{(1-\alpha)^2 + y^2}$ sugárral huzott kör negativ irányban, P_2 től a $P_3 = -\alpha - iy$ pontig egyenes, P_3 tól a $P_4 = -\alpha + iy$ pontig a -1 körül r sugárral huzott kör negativ irányban, és végül a $P_4 P_1$ egyenes. /1.ábra./. ~~XX~~ y -t és α -t ugy választjuk,hogy ζ a $C_{y\alpha}$ görbe külsejébe essék.



1. ábra

Az 1.és 2.feltétel alapján alkalmazhatjuk a Cauchy féle formulát.

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{y\alpha}} \frac{F(z)}{z - \zeta}\, dz \qquad /3/$$

A /3/ integrált a $C_{y\alpha}$ integrációs ut P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1 X, szakaszaira vonatkozó J_1, J_2, J_3, J_4 részekre bontjuk. Legyen $z=x+iy$, $F(z)=R(x,y)+i\cdot J(x,y)$. A 3. feltételből az u.n. tükrözési elv alapján következik, hogy $F(z)$ konjugált pontokban konjugált értékeket vesz fel, tehát

$$R(x,-y)=R(x,y) \quad \text{és} \quad J(x,-y)=-J(x,y)$$

Vonjuk össze a második és negyedik szakaszra vonatkozó integrálokat:

$$J_2+J_4=-\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{R(x,y)\cdot y}{(x-\xi)^2+y^2}dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{J(x,y)(x-\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}dx=J_2'+J_4' \qquad /5/$$

Azt állitjuk, hogy ha az integrációs utat folytonosan deformáljuk, olymódon, hogy y -t minden határon tul csökkentjük, akkor

$$\lim_{y\to 0} J_2'=0 \qquad /6/$$

és

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} J_4'=-\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{J(x)\,dx}{\xi-x} \qquad /7/$$

~~XXXXXXXXXX~~ /6/ egyszerüen abból következik, hogy J_2' ben az integrandus nevezője korlátos, tehát

$$|J_2'|\leq C\cdot y\int_{-\alpha}^{+\alpha}|R(x,y)|\,dx$$

és a 6. feltétel szerint a jobboldal zérushoz tart, ha $y\to 0$. Másrészt J_4' -ben az integrandus az 5. feltétel szerint korlátos, és a 4. feltétel szerint az integrandus majdnem minden x -re konvergál az integrálható $\frac{J(x)}{x-\xi}$ függvényhez, tehát Lebesguenek a korlátos függvénysorozatok integrálására vonatkozó tételé~~ből~~ ~~szerint~~ következik /7/.

Összefoglalva tehát

$$F(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{J(x)\,dx}{\xi-x} + J_1 + J_3 \qquad /8/$$

ahol most J_1 és J_3 a $+1$ ill. -1 körül $r=1-\alpha$ sugárral huzott körökre vonatkozó integrálok. Ha most elvégezzük az $\alpha \to 1$ határátmenentet, a 7.feltétel szerint J_1 és J_3 zérushoz tartának ~~tanak~~ és a 4.feltétel alapján a /8/-ban szereplő integrál határaira is elvégezhetjük a határátmenetet.Tehát

$$F(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{J(x)\,dx}{\xi-x} \qquad /9/$$

A 4.és 5.feltételekből következik,hogy $-\frac{1}{\pi}J(x)$ A-tipusu függvény.Ezzel tehát kimutattuk,hogy feltételeink elégségesek.

Most áttérünk a szükségesség bizonyitására.

Feltesszük tehát,hogy

$$F(z) = \int_{-1}^{+1}\frac{f(u)}{z-u}\,du \qquad /1/$$

és bebizonyitjuk,hogy az /1/ alaku ~~XXXXXXXXX~~ $F(z)$ függvények, ha $f(u)$ A-tipusu függvény, teljesitik az 1-7 feltételeket.

Az első három feltétel triviálisan teljesül.Vizsgáljuk a 4. feltételt.Bontsuk fel $F(z)$-t valós és képzetes részére:

Legyen $z = x + iy$, $F(z) = R(x,y) + i\cdot J(x,y)$ akkor

$$R(x,y) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(u)(x-u)}{(x-u)^2 + y^2}\, du \qquad /10/$$

és

$$J(x,y) = -\int_{-1}^{+1} \frac{f(u)\cdot y}{(x-u)^2 + y^2}\, du \qquad /11/$$

Bebizonyitjuk, hogy majdnem minden x -re $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y>0}} J(x,y) = -\pi f(x)$

Legyen $r_y(x) = J(x,y) + \pi f(x)$. Tekintve, hogy

$$\left| \int_{-1}^{+1} \frac{y\, du}{(x-u)^2 + y^2} - \pi \right| = \int_{\frac{1+x}{y}}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} + \int_{\frac{1-x}{y}}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} \leq \frac{2y}{1-x^2}$$

tehát

$$r_y(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(x) - f(u)}{(x-u)^2 + y^2}\cdot y\, du + O(y)^{*} \qquad /12/$$

* nem konsequens (15) jelöléssel

Meg fogjuk mutatni, hogy minden olyan pontban, ahol $f(x)$ az integráljának a differenciálhányadosa, tehát ahol

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} [f(x) - f(u)]\, du = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi_x(h)}{h} = 0 \qquad /13/$$

$x - u = yv$

új változót bevezetve

$\int_{\frac{x-1}{y}}^{\frac{x+1}{y}} \frac{f(x) - f(x-yv)}{1+v^2}\, dv$

ebből triviális!

vagyis majdnem mindenütt, $\lim\limits_{y\to 0} r_y(x) = 0$. $(y>0)$

Válasszuk az α és ε számokat ugy, hogy a

$$-1 < -\alpha < x - \varepsilon < x < x + \varepsilon < \alpha < 1$$

elrendezés álljon fenn. Ezen pontok a $(-1, +1)$ intervallumot 6 szakaszra bontják. A /12/-ben szereplő integrált ennek megfelelően

---

* A következőkben sürün használjuk a O, o, jelöléseket, az irodalomban szokásos Landau féle értelemben.

6 részre bontjuk, amelyeket $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6$ -al jelölünk.

Könnyen belátható, hogy

$$|J_1| \leqq y \cdot \frac{1}{(x+\alpha)^2} \int_{-1}^{+1} |f(x)-f(u)|\,du \cdot \qquad \text{xxxxx}$$

és hasonlóképen becsülhető J_6 is, tehát

$$J_1 = O(y) \quad , \quad J_6 = O(y) \; . \qquad /14/$$

Továbbá feltevésünk szerint $f(u)$ korlátos a $(-\alpha, +\alpha)$ intervallumban.

Legyen $|f(u)| \leqq K(\alpha)$, $-\alpha \leqq u \leqq +\alpha$. Akkor

$$|J_2| \leqq 2K(\alpha) \int_{-\alpha}^{x-\varepsilon} \frac{y\,du}{(x-u)^2+y^2} \leqq 2K(\alpha) \int_{\frac{\varepsilon}{y}}^{\infty} \frac{dv}{1+v^2} \leqq 2K(\alpha) \cdot \frac{y}{\varepsilon}$$

Ugyanigy becsülhető J_5 is, tehát

$$J_2 = O\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \quad , \quad J_5 = O\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) . \qquad /15/$$

Végül

$$J_3 = y \int_{x-\varepsilon}^{x} \frac{\left(f(x)-f(u)\right)}{(x-u)^2+y^2}\,du$$

Mivel $\left[(x-u)^2+y^2\right]^{-1}$ u monoton függvénye a szóbanforgó intervallumban, alkalmazhatjuk a második középértéktételt, mely szerint, tekintettel /13/-ra:

$$J_3 = \frac{y}{y^2} \int_{x-\eta}^{x} \left(f(x)-f(u)\right)du = \frac{\Phi_x(-\eta)}{y} \qquad (0<\eta<\varepsilon) \qquad /16/$$

Feltevésünk szerint $\dfrac{\Phi_x(h)}{h} = \Delta_x(h)$ zérushoz tart, ha $h \to 0$.

Legyen ~~$\delta(\varepsilon) = \max_{-\varepsilon \leqq h \leqq +\varepsilon} |\Delta(h)|$~~

$\delta(\varepsilon) = \max\limits_{|h| \leqq \varepsilon} |\Delta(h)|$ akkor tehát $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta(\varepsilon) = 0$.

/16/-ból

$$|\mathcal{J}_3| = \left|\frac{\Phi_x(-\eta)}{y}\right| = |\Delta_x(-\eta)|\frac{\eta}{y} \leq \frac{\delta(\varepsilon).\varepsilon}{y}$$

Ugyanigy járhatunk el $\mathcal{J}_4$ megbecsülésénél is, tehát

$$\mathcal{J}_3 = O\left(\frac{\delta(\varepsilon).\varepsilon}{y}\right), \quad \mathcal{J}_4 = O\left(\frac{\delta(\varepsilon).\varepsilon}{y}\right) \qquad /17/$$

Összegezve a /14/,/15/ és /17/ becsléseket,/12/ ből nyerjük, hogy

$$r_x(y) = O(y) + O\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) + O\left(\frac{\varepsilon.\delta(\varepsilon)}{y}\right) \qquad /18/$$

Eddig y és ε egymástól függetlenek voltak. Legyen most

$$y = \varepsilon\sqrt{\delta(\varepsilon)}$$

Behelyettesitve /18/-ba, azt kapjuk, hogy

$$r_x(y) = O\left(\varepsilon\sqrt{\delta(\varepsilon)}\right) + O\left(\sqrt{\delta(\varepsilon)}\right) + O\left(\sqrt{\delta(\varepsilon)}\right) = O\left(\sqrt{\delta(\varepsilon)}\right) \qquad /19/$$

Mivel feltevésünk szerint $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon) = 0$, tehát $\lim\limits_{y\to 0} r_x(y) = 0$.
Ezzel a 4. feltétel szükségességét bebizonyitottuk. Az /1/ függvények ~~XMMGXK~~ képzetes részére nyert eredményünket a valós résszel való párhuzamba állitás, és az alkalmazások szempontjából célszerü külön tételként kimondani. Fennáll tehát a következő

2. TÉTEL. Ha $F(z)$ az /1/ alakban állitható elő, és $z = x + iy$, $F(z) = R(x,y) + i\,\mathcal{J}(x,y)$, akkor a $(-1, +1)$ intervallum majdnem minden x pontjában

$$\lim_{y\to 0} \mathcal{J}(x,y) = -\pi . f(x) \qquad (y>0)$$

Mivel $\mathcal{J}(x,-y) = -\mathcal{J}(x,y)$, tehát természetesen

$$\lim_{y\to 0} \mathcal{J}(x,y) = +\pi . f(x) \qquad (y<0)$$

Folytatjuk a feltételek szükségességének bizonyitását. Most következik az 5. feltétel. Legyen x az $(-1,+1)$ intervallum egy pontja. β legyen tetszőleges α és 1 közé eső szám. /11/-ből

$$|J(x,y)| \le \int_{-1}^{-\beta}\frac{|f(u)|y\,du}{(x-u)^2+y^2} + \int_{-\beta}^{+\beta}\frac{|f(u)|y\,du}{(x-u)^2+y^2} + \int_{+\beta}^{+1}\frac{|f(u)|y\,du}{(x-u)^2+y^2} \le$$

$$\le \frac{y}{(|x|-\beta)^2+y^2}\int_{-1}^{+1}|f(u)|\,du + K(\beta)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y\,du}{(x-u)^2+y^2}$$

Mivel $\frac{y}{(|x|-\beta)^2+y^2}$ maximuma, állandó x és változó y mellett

$\frac{1}{2(\beta-|x|)} \le \frac{1}{2(\beta-\alpha)}$ a $(-\alpha,+\alpha)$ intervallum minden

x pontjára, tehát

$$|J(x,y)| \le \frac{K}{2(\beta-\alpha)} + K(\beta)\cdot\pi \qquad /20/$$

Ezzel bebizonyitottuk, hogy $J(x,y)$ minden $(-\alpha,+\alpha)$ intervallumban egy csak α-tól függő korlát alatt marad, vagyis az 5. feltétel teljesül.

A 6. feltétel ugy szól, hogy minden $-\alpha \le x \le +\alpha$ intervallumban x-ben egyenletesen

$$R(x,y) = o\left(\frac{1}{y}\right) \qquad /21/$$

Be fogjuk bizonyitani, hogy ennél jóval több igaz, mégpedig

$$R(x,y) = O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) \qquad /22/$$

Legyen megint $\alpha < \beta < 1$, és szoritkozzunk y azon értékeire, amelyekre $y \le (\beta-\alpha)^2$, tehát amelyekre fennáll a

$$-1 \le \beta \le x-\sqrt{y} \le x+\sqrt{y} \le \beta < +1$$

elrendezés,ha x a $(-\alpha_1+\alpha)$ intervallum bármely pontja.

/10/-ből

$$|R(x,y)| \leqq \int_{-1}^{x-\sqrt{y}} \frac{|f(u)||x-u|du}{(x-u)^2+y^2} + \int_{x-\sqrt{y}}^{x+\sqrt{y}} \frac{|f(u)||x-u|du}{(x-u)^2+y^2} + \int_{x+\sqrt{y}}^{+1} \frac{|f(u)||x-u|du}{(x-u)^2+y^2}$$

Az első és a harmadik integrált ugy becsüljük,hogy $\frac{|x-u|}{(x-u)^2+y^2}$ helyett ezen függvénynek fix y és $|x-u| \geqq \sqrt{y}$ feltételek melletti maximumát, $\frac{1}{\sqrt{y}}$ -t irunk, a középső integrálban viszont $\frac{|x-u|}{(x-u)^2+y^2}$ helyett fix y melletti maximumát, $\frac{1}{2y}$ -t irunk. Igy nyerjük a

$$|R(x,y)| \leqq \frac{1}{\sqrt{y}} \int_{-1}^{+1} |f(u)|du + \frac{1}{2y} K(B) 2\sqrt{y} = \frac{K+K(B)}{\sqrt{y}} \qquad /23/$$

becslést,ami /22/-vel equivalens./23/-ból következik,hogy a sokkal kevesebbet kiváné 6.feltétel teljesül,de a továbbiakban még szükségünk lesz a /23/ egyenlőtlenségre is.

A 7.feltétel szükségessége nem olyan kézenfekvő, mint az ~~XXXXXX~~ előző feltételeké,bebizonyitásához erősebb segéd-eszközökre,többek között az integrálások felcserélésére vonatkozó Fubini féle tételre lesz szükség.Nem jelent megszoritást,ha csak a +1 pontra szoritkozunk, a -1 pontra a bizonyitás ugyanugy végezhető. Legyen rövidség kedvéért

$$A = 1 + re^{-i(\pi-\varepsilon)}, \quad B = 1 + re^{i(\pi-\varepsilon)}.$$

és vezessük be a következő jelöléseket:

$$J(r) = \int_{C_r} \frac{F(z)}{\zeta - z} dz, \quad J_\varepsilon(r) = \int_A^B \frac{F(z)}{\zeta - z} dz$$

Tehát

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(r) = J(r) \tag{24}$$

Feltevésünk szerint $F(z)$ az /1/ alakban állitható elő. Tehát /24/-ből

$$J_\varepsilon(r) = \int_A^B \frac{1}{\varsigma - z}\left(\int_{-1}^{+1} \frac{f(t)\,dt}{z-t}\right)dz \tag{25}$$

Az integrációk sorrendje Fubini tétele alapján felcserélhető,[15]

vagyis /25/-ből nyerjük, hogy

$$J_\varepsilon(r) = \int_{-1}^{+1} f(t)\left[\int_A^B \frac{dz}{(\varsigma-z)(z-t)}\right]dt = \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{\varsigma - t}\left[\int_A^B \left(\frac{1}{\varsigma - z} + \frac{1}{z-t}\right)dz\right]dt \tag{26}$$

A z szerinti integrálás elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$J_\varepsilon(r) = \log\frac{\varsigma - A}{\varsigma - B}\cdot F(\varsigma) + \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{\varsigma - t}\log\frac{B-t}{A-t}\,dt \tag{27}$$

Ha ε zérushoz tart, /27/ jobboldalának első tagja szintén zérushoz fog tartani, tekintve, hogy

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varsigma - A}{\varsigma - B} = 1$$

15/ Fubini tételét a Hobson által adott egyik megfogalmazásban használjuk, l. E. W. Hobson, Proc. London Math. Soc. /2/, 8, 1910, p. 22-39, p. 31

talán részletezni!

Másrészt egyszerü számitással belátható,hogy

$$\frac{B-t}{A-t}=e^{i\varphi_\varepsilon(t)}\,,\qquad \lg\frac{B-t}{A-t}=i\varphi_\varepsilon(t)$$

ahol

$$\varphi_\varepsilon(t)=2\,\mathrm{arctg}\,\frac{r\sin\varepsilon}{1-t-r\cos\varepsilon}$$

Tehát $\lg\frac{B-t}{A-t}$ korlátos függvény,amely $-i\pi$ és $+i\pi$ között

mozog.Két esetet különböztetünk meg,aszerint,hogy

$$t<1-r\cos\varepsilon \qquad \text{vagy} \qquad t>1-r\cos\varepsilon$$

A két esetet a 2. és 3.ábra szemlélteti.Könnyen belátható,hogy ha $t<1-r$ akkor minden ε ra az első eset áll fenn,mig ha $t>1-r$ akkor elég kis ε ra a második eset következik be. Tekintve,hogy az első esetben

$$0<\varphi_\varepsilon(t)\leqq \mathrm{tg}\,\varphi_\varepsilon(t)=\frac{r\sin\varepsilon}{1-t-r\cos\varepsilon}\leqq\frac{r\sin\varepsilon}{(1-r)-t}$$

mig a második esetben

$$\pi-\frac{r\sin\varepsilon}{t-(1-r)}<\varphi_\varepsilon(t)<\pi$$

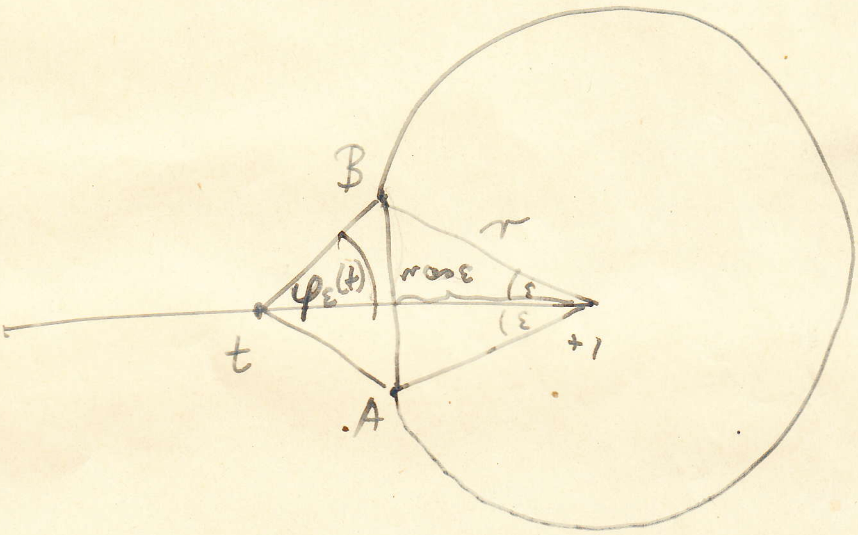
tehát

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t<1-r\\ \pi & t>1-r\end{cases}\qquad /28/$$

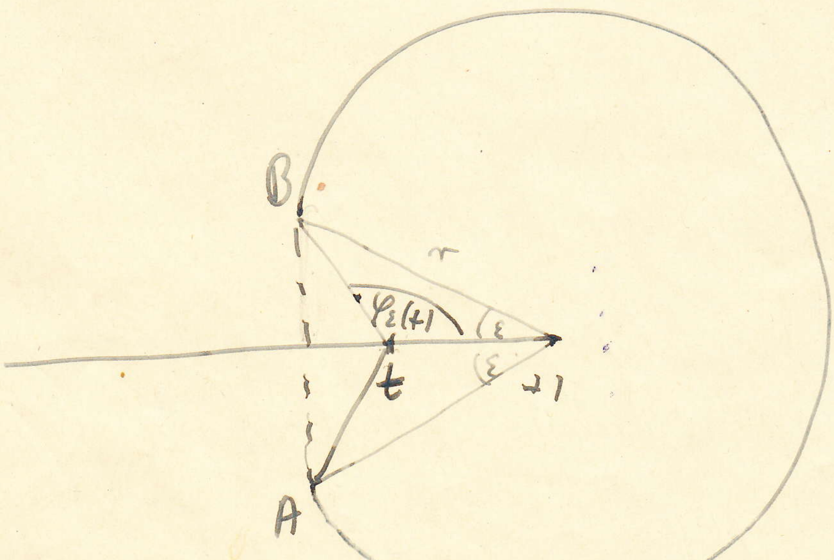
Mivel $\lg\frac{B-t}{A-t}$ korlátos,alkalmazhatjuk a /27/ ben szereplő integrálra Lebesgue tételét integrálható függvénnyel majorizálható függvénysorozatokra,másszóval az $\varepsilon\to 0$ határátmenet és az integrálás sorrendjét felcserélhetjük.Mivel /27/ első tagja zérushoz tart, ha $\varepsilon\to 0$, tehát /27/ ből és /24/-ből azt kaptuk,hogy

$$J(r) = \lim_{\varepsilon \to 0} J_{\varepsilon}(r) = i\pi \int_{1-r}^{1} \frac{f(t)}{\zeta - t}\,dt \qquad /29/$$

/29/-ből könnyüszerrel leolvasható,hogy $\lim_{r \to 1} J(r) = 0$,tehát a 7.feltétel teljesül.Ezzel az 1.Tételt teljes egészében bebizonyitottuk.



2. ábra



3. ábra

2. Fejezet.

Az /1/ alaku $F(z)$ függvények ~~XXXXXXX~~ képzetes részének határértékére vonatkozólag felvilágositást nyujt az 1.fejezetben kimondott 2.tétel.Ezzel szemben $F(z)$ valós részének határértékéről a kritikus intervallum pontjaiban eddig semmilyen megállapitást sem tettünk.Ebben a fejezetben $F(z)$ valós részének határértékét vizsgáljuk.Mielőtt azonban erre rátérünk,előrebocsájtunk néhány megjegyzést az integrál Cauchy-féle főértékéről,mivel ez a fogalom a valós részre vonatkozó vizsgálatokban lényeges szerepet játszik.

Egy integrál Cauchy féle főértékének definiciója,mint ismeretes,a következő: /6/ Ha $g(t)$ az $(a, c-\varepsilon)$ és $(c+\varepsilon, b)$ intervallumokban integrálható,bármilyen pozitiv szám is ε , és

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} g(t)\,dt + \int_{c+\varepsilon}^{b} g(t)\,dt \right) = S$$

létezik,akkor azt mondjuk,hogy létezik az $\int_a^b g(t)\,dt$ integrál Cauchy féle főértéke,és S -el egyenlő.Cauchy eredeti definiciójától a továbbiakban csak annyiban térünk el,hogy a definicióban szereplő közönséges integrálokat a Lebesgue féle értelemben értjük.

Cauchy definiciója hosszu időn keresztül feledésbe merült,és még a legkiválóbb matematikusok is félreismerték.Hardy az 1902-1908 években egy cikksorozatban /7/ hivta fel a figyelmet erre a fogalomra, tisztázta tulajdonságait és rámutatott jelentőségére. Hardy idézi Kronecker egy megjegyzését : "Cauchy hat Hauptwerte in Betracht gezogen,.... Es ist klar,dass man besser thut ,dieser Einführung nicht zu folgen." és Schläfli egy még elitélőbb kijelentését: "Dass der Begriff des valeur principale eines Integrales,den Cauchy aufstellt,nicht statthaft sei,braucht nicht erörtert zu werden."
Ebből a két idézetből látszik,mennyire félreértették a mult században ezt a fogalmat.Ezt a jelenséget talán azzal magyarázhatjuk meg,hogy

annak a törekvésnek a során, amely Weierstrass nyomán a matematika szilárd alapokra való fektetését tüzte ki céljául, hasznos, de kényes fogalmakat is kiküszöböltek, mint például a Cauchy-féle főértéket. Cauchyt azóta sokszorosan rehabilitálták. Dolgozatunk csak egy példa a sok közül ennek a fogalomnak a használhatóságára.

A továbbiakban megkülönböztetünk reguláris és nem reguláris Cauchy féle főértéket. Reguláris főértékről beszélünk, ha létezik a

$$\lim\left(\int_a^{c-\varepsilon} g(t)dt + \int_{c+\delta}^{b} g(t)dt\right) = S$$

határérték, feltéve, hogy $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$, és $\frac{\varepsilon}{\delta} \to 1$.

Nem reguláris főértékre példa az $\frac{1}{t^3}$ függvény. Ezzel szemben mindig reguláris főértékkel van dolgunk, ha $g(t)(c-t)$ korlátos. Ennél még sokkal gyengébb feltétel is célhoz vezet: elég feltenni, hogy $g(t)(c-t)$ integrálható, és a c helyen az integráljának a differenciálhányadosa. Erre az általánosabb esetre a következőkben nem lesz szükségünk, ezért az egyébként is egyszerü bizonyitást nem részletezzük. A Cauchy féle főértéket Hardy nyomán az integráljel elé irt P betüvel jelöljük.

Szükségünk lesz a Cauchy féle főérték következő tulajdonságaira:

1. Lemma. Legyenek $t = t(u)$ és ennek inverze, $u = u(t)$ az (a, b) intervallumban monoton, folytonos és folytonosan differenciálható függvények, és $u'(c)$ különbözzék zérustól. Akkor ha $g(t)$ az (a, b) minden a c pontot nem tartalmazó részintervallumában integrálható, azonkivül létezik az integráljának a reguláris Cauchy féle főértéke a c helyen, akkor szabad az integrálban az $u = u(t)$ uj változót bevezetni, tehát:

$$P\int_a^b g(t)dt = P\int_{u(a)}^{u(b)} g(t(u))\,t'(u)\,du \,.$$

Ez a tétel, kevésbbé általános feltételek mellett, Hardy első cikkében is szerepel. Hardy bizonyitásának gondolata alkalmazható az általános esetre is, ezért ezt fölösleges volna részletezni.

A Cauchy féle főérték még egy egyszerü tulajdonságára lesz szükségünk:

2. Lemma. Ha az (ab) intervallumban létezik $g(t)$ Cauchy féle főértéke, és ha c a függvény szinguláris pontja, $g(t)(c-t)$ integrálható, azonkivül $h(t)$ olyan az $(a\,b)$ intervallumban integrálható függvény, amely a c helyen 1 exponensü Lipschitz-feltételnek tesz eleget, akkor létezik az $\int_a^b g(t)h(t)dt$ integrál Cauchy főértéke is.

~~XXXXXXXX~~ Állitásunk leolvasható az

$$\int_a^b g(t)h(t)dt = h(c)\int_a^b g(t)dt + \int_a^b [g(t)(t-c)]\left(\frac{h(t)-h(c)}{t-c}\right)dt$$

átalakitásból, tekintettel arra, hogy a jobboldali második integrálban az integrandus egy integrálható és egy korlátos függvény szorzata, tehát maga is integrálható a közönséges értelemben. Megjegyzendő, hogy ha $g(t)(c-t)$ nemcsak integrálható, hanem korlátos, akkor elegendő feltenni, hogy $h(t)$ tetszőleges exponensü Lipschitz feltételnek tesz eleget.

Ezekután áttérünk $F(z)$ valós részének vizsgálatára. Bebizonyitjuk a következőt:

3. TÉTEL. Jelentse $R(x,y)$ az /1/ alaku $F(z)$ függvény valós részét, akkor olyan x pontokban, ahol az A-tipusu $f(x)$ függvény az integráljának a differenciálhányadosa, a

$$\lim_{y\to 0} R(x,y) = R(x) \qquad /30/$$

határérték létezése equivalens az

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(u)}{x-u}du \qquad (31)$$

/31/

Cauchy féle főérték létezésével. Ha /30/ vagy /31/ létezik, akkor a másik is létezik, és egyenlők, tehát akkor

$$R(x) = \lim_{y \to 0} R(x,y) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(u)}{x-u}\,du \qquad /32/$$

Természetesen, ha /31/ létezik, akkor reguláris főérték, mert $\frac{f(u)}{x-u}(x-u)$ feltevésünk szerint korlátos (feltéve, hogy x a $(-1,+1)$ intervallum belső pontja) az x pont elég kis környezetében.

Az 5. fejezetben be fogjuk bizonyitani, hogy feltevéseink mellett /30/ majdnem mindenütt létezik ~~/3.tétel/~~. Tehát a 3.tétel ~~az 5.tétel felhasználásával~~ ugy fogalmazható, hogy /31/ majdnem mindenütt létezik, és ugyancsak majdnem mindenütt /32/ is fennáll.

Bebizonyitjuk a 3. tételt. Legyen

$$C(\varepsilon) = \int_{-1}^{x-\varepsilon} \frac{f(u)}{x-u}\,du + \int_{x+\varepsilon}^{+1} \frac{f(u)}{x-u}\,du \qquad /33/$$

Be fogjuk bizonyitani, hogy $C(\varepsilon) - R(x,y)$ zérushoz tart, feltéve, hogy $\varepsilon \to 0$, $y \to 0$, és ε és y összetartozó értékeit alkalmasan választjuk.

A $(-1,+1)$ intervallumot, ugyanugy mint a 2. tétel bizonyitásában, /10.o./ a $-1,\ -\alpha,\ x-\varepsilon,\ x,\ x+\varepsilon,\ \alpha,\ +1$ pontokkal 6 részre bontjuk, és ennek megfelelően /10/ is 6 integrál összegére bomlik. ~~XXXXXXXXX~~ Ugyanezen pontok /33/-at 4 részre ~~XXXXXXXXXXX~~ bontják fel, /33/-ból ugyanis a két középső intervallum hiányzik. Összevonva a /10/ és /33/ integráloknak ugyanazon intervallumokra vonatkozó részeit nyerjük a következő felbontást:

$$R(x,y) - C(\varepsilon) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 \qquad /34/$$

Tekintve, hogy $\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{(x-u)\,du}{(x-u)^2+y^2} = 0$, /34/ jobboldalához hozzáadhatjuk a zérus értékű

$$f(x) \cdot \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{(x-u)\,du}{(x-u)^2+y^2}$$

integrált két részre bontva, és a megfelelő részeket J_3 al ill. J_4 el összevonhatjuk. Ilymódon azt kapjuk, hogy

$$R(x,y) - C(\varepsilon) = J_1 + J_2 + J_3' + J_4' + J_5 + J_6 \tag{35}$$

ahol

$$J_1 = \int\limits_{-1}^{-\alpha} \frac{f(u)\,y^2\,du}{(x-u)\left[(x-u)^2+y^2\right]} \qquad J_6 = \int\limits_{\alpha}^{1} \frac{f(u)\,y^2\,du}{(x-u)\left[(x-u)^2+y^2\right]} \tag{36}$$

$$J_2 = \int\limits_{-\alpha}^{x-\varepsilon} \frac{f(u)\,y^2\,du}{(x-u)\left[(x-u)^2+y^2\right]} \qquad J_5 = \int\limits_{x+\varepsilon}^{\alpha} \frac{f(u)\,y^2\,du}{(x-u)\left[(x-u)^2+y^2\right]} \tag{37}$$

$$J_3' = \int\limits_{x-\varepsilon}^{x} \frac{\left[f(x)-f(u)\right](x-u)}{(x-u)^2+y^2}\,du \qquad J_4' = \int\limits_{x}^{x+\varepsilon} \frac{\left[f(x)-f(u)\right](x-u)}{(x-u)^2+y^2}\,du \tag{38}$$

/35/ tagjait a következőképen becsüljük meg: először is

$$|J_1| \leq \frac{y^2}{(\alpha-|x|)^3} \int\limits_{-1}^{+1} |f(u)|\,du$$

és hasonlóan becsülhető J_6 is, tehát

$$J_1 = J_6 = O(y^2) \tag{39}$$

Továbbá, ha $|f(u)| \leq K(\alpha)$ $\quad(-\alpha \leq u \leq +\alpha)$

$$|J_2| \leq K(\alpha) \int_{\frac{\varepsilon}{y}}^{\infty} \frac{dv}{v(1+v^2)} \leq K(\alpha)\frac{y^2}{\varepsilon^2}$$

és ugyanezt elvégezhetjük J_5 re is, tehát

$$J_2 = J_5 = O\left(\frac{y^2}{\varepsilon^2}\right) \qquad /40/$$

J_3' -re és J_4'-re a második középértéktételt fogjuk alkalmazni. Hogy ezt megtehessük, mindkét integrált két-két részre kell bontanunk, mert az

$$\frac{|x-u|}{(x-u)^2+y^2}$$

függvény, mint u függvénye az $(x-\varepsilon, x-y), (x-y, x), (x, x+y), (x+y, x+\varepsilon)$ intervallumok mindegyikében monoton, de váltakozva növekvő ill. csökkenő.* Ezt a felbontást elvégezve, nyerjük, hogy

$$J_3' = \frac{1}{2y}\Phi_x(-\vartheta) + \frac{1}{2y}\Phi_x(-\eta)$$

ahol $0 \leq \vartheta \leq y$ és $0 \leq \eta \leq \varepsilon$. Tehát

$$|J_3'| \leq \frac{1}{2y}\left|\frac{\Phi_x(-\vartheta)}{-\vartheta}\right|\vartheta + \frac{1}{y}\left|\frac{\Phi_x(-\eta)}{-\eta}\right|\eta \leq \frac{1}{2y}y\,\delta(y) + \frac{1}{y}\varepsilon\,\delta(\varepsilon)$$

és hasonló egyenlőtlenség nyerhető J_4' -ra is, vagyis kaptuk a

$$J_3' = J_4' = O(\delta(y)) + O\left(\frac{\varepsilon\cdot\delta(\varepsilon)}{y}\right) \qquad /41/$$

becsléseket. Összegezve eredményeinket, /39/, /40/ és /41/-ből azt kapjuk /35/-re, hogy

$$C(\varepsilon) - R(x,y) = O(y^2) + O\left(\frac{y^2}{\varepsilon^2}\right) + O(\delta(y)) + O\left(\frac{\varepsilon\,\delta(\varepsilon)}{y}\right) \qquad /42/$$

Ha mármost $y = \varepsilon\sqrt{\delta(\varepsilon)}$ akkor /42/-ből

---

* y-t ε-nál kisebbnek fogjuk választani, ezért ~~van~~ erre *)

$$C(\varepsilon) - R(x,y) = O\left(\sqrt{\delta(\varepsilon)}\right) \qquad /43/$$

tehát valóban, ha y és ε értékeit a megadott módon választjuk,

$$\lim_{y \to 0,\, \varepsilon \to 0} \left[C(\varepsilon) - R(x,y)\right] = 0.$$

Ezzel a 3.tételt bebizonyitottuk.

16/ A.L.Cauchy,Oeuvres,T.II.4,p.140-150.
17/G.H.Hardy,Proc.London Math.Soc. /1/,34,1902,p.16-40,p.55-91,
35,1903,p.81-107,
/2/,7, 1908,p.181-209.

3. Fejezet.

Alkalmazzuk /1/ re a $W=Z-\sqrt{Z^2-1}$, $Z=\frac{W+\frac{1}{W}}{2}$ konform leképezést, amely a $(-1,+1)$ szakasz mentén felmetszett sikot az egységkör belsejébe viszi át. Ha ezenkivül ~~XX~~ az $u=\cos t$ ~~uj~~ ~~integrációs~~ változó~~t és a~~ transzformációt és a

$$G(w)=\frac{1}{\pi}F\left(\frac{w+\frac{1}{w}}{2}\right),\quad g(t)=f(\cos t)\quad (0\le t\le\pi)$$
$$g(t)=-g(-t)\quad(-\pi\le t\le 0) \qquad /44/$$

jelöléseket vezetjük be, /1/ ből a

$$G(w)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(t)\frac{2w\sin t}{1-2w\cos t+w^2}\,dt \qquad /45/$$

integrálelőállitást nyerjük a $G(w)$ az egységkörben reguláris függvényre. Behelyettesitve /45/-be a

$$\frac{2w\sin t}{1-2w\cos t+w^2}=2\sum_1^\infty w^n\sin nt \qquad /46/$$

azonosságot, kapjuk $G(w)$ hatványsorát:

$$G(w)=\sum_1^\infty b_n w^n \qquad /47/$$

ahol

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(t)\sin nt\,dt \qquad /48/$$

$f(u)$ ről feltettük, hogy a $(-1,+1)$ intervallumbán integrálható. Ebből következik, hogy $g(t)\sin t$ a $(0,\pi)$ intervallumban integrálható, tehát a /48/-ban szereplő integrálok léteznek. Azonban maga $g(t)$ nem okvetlenül integrálható, és igy ~~XXXXXXXXXXXXXXXXX~~ ha $w=e^{i\vartheta}$ -t helyettesitünk /47/-be ~~XXX~~ az igy nyert trigonometrikus sorok nem feltétlenül Fourier sorok. A 2. és 3. tétel átfogalmazásával ezen trigonometriai sorok szummálására vonatkozó állitásokat nyerünk. A szummálási eljárás igen közel áll a közönséges Abel féle szummáláshoz, ugyanis az x_0 ponthoz vezető függőleges egyenes képe a W sikban olyan görbe, amelynek érintője az $e^{-i\vartheta}$ $(\cos\vartheta = x_0)$ ponthoz vezető sugár. Pontosabban, ha ξ és η derékszögü koordináták a W sikban, a Z sik x-en átmenő függőleges egyenesének képe a W sikban az a görbe, melynek egyenlete:

$$\eta^2 = \frac{\xi(\xi^2 - 2x_0\xi + 1)}{2x_0 - \xi} \qquad /49/$$

x) /1.4.ábra/. Hogy a W sikon közönséges radiális közelitést kapjunk, a 2. és 3. tételeket azzal a kiegészitéssel kell ellátni, hogy ezen tételek állitása érvényben marad ~~XMX~~ akkor is, ha egyenes helyett azon a görbén közeledünk az x_0 ponthoz, amely a $W = Z - \sqrt{Z^2 - 1}$ konform leképezésnél az $e^{-i\vartheta}$ ponthoz vezető sugárba megy át. Ez a görbe az

$$\frac{x^2}{x_0^2} - \frac{y^2}{1 - x_0^2} = 1 \qquad /50/$$

hiperbola / 5.ábra./ A 2. és 3. tételnek ez a kiegészitése közvetlenül következik a 3. Lemmából.

3. Lemma

$$|R(x,y) - R(x_0,y)| = O\left(\frac{|x - x_0|}{y^{3/2}}\right)$$

$$|I(x,y) - I(x_0,y)| = O\left(\frac{|x - x_0|}{y}\right) \qquad /51/$$

A 3.lemma az 1.tétel 5. és 6.feltételei szükségességének bizonyitásánál használt becslési módszerrel könnyen bebizonyitható, a /20/ és /23/ egyenlőtlenségek felhasználásával. Tekintettel arra,hogy az /50/ hiperbolán közeledve az x_0 ponthoz

$$(x-x_0)=O(y^2)$$

a 3.lemmából következik,hogy a 2.III.3.tételben a közelitést az egyenes helyett az /50/ hiperbolán is végezhetjük.

A 2.és 3.tételek átfogalmazásához szükség lesz még a következő megjegyzésre:

4.Lemma. Ha $g(t)=f(\cos t)$ $(0<t<\pi)$, és $g(t)$ a $t=\psi$ pontban az integráljának a differenciálhányadosa,akkor $f(u)$ is az $u=\cos\psi$ pontban az integráljának a differenciálhányadosa.

Ez a lemma is könnyen belátható ,ha $f(u)$ integráljában az $u=\cos t$ változót vezetjük be, és partiálisan integrálunk.

Még egy lemmára lesz szükségünk. Vizsgáljuk az

$$\Omega_\varepsilon=\int_\varepsilon^\pi \frac{g(\psi+t)-g(\psi-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt \quad (0<\psi<\pi) \qquad /52/$$

integrált,ahol

$$g(t)=\begin{cases} f(\cos t) & 0\leq t\leq\pi \\ -g(-t) & -\pi\leq t\leq 0\end{cases}$$

és $f(u)$ A -tipusu függvény. /52/ Cauchy féle főértéke a 2.lemma szerint létezik./52/-t fogjuk most átalakitani,és bebizonyitjuk,hogy /52/ egy közönséges integrállal egyenlő.Az átalakitás több lépésben történik.Először is

$$\Omega_\varepsilon=\int_{\psi+\varepsilon}^{\psi+\pi}\frac{g(t)}{2\operatorname{tg}\frac{t-\psi}{2}}dt+\int_{\psi-\pi}^{\psi-\varepsilon}\frac{g(t)}{2\operatorname{tg}\frac{t-\psi}{2}}dt \qquad /53/$$

Ennek a lépésnek indokolására megjegyezzük,hogy az 1.lemmában ugyan csak annyit bizonyitottunk,hogy reguláris Cauchy féle főértékmél jogosult a változótranszformáció,azonban könnyen belátható,hogy az egyszerü eltolás a regularitás feltételezése nélkül is megengedett.

Másodszor /53/-ból,tekintve,hogy $\frac{g(t)}{2\,tg\frac{t-\psi}{2}}$ 2π szerint periódikus,kapjuk,hogy

$$\Omega_\varepsilon = \int_{-\pi}^{\psi-\varepsilon} \frac{g(t)}{2\,tg\frac{t-\psi}{2}}\,dt + \int_{\psi+\varepsilon}^{\pi} \frac{g(t)}{2\,tg\frac{t-\psi}{2}}\,dt \qquad /54/$$

Továbbá,mivel $g(t)$ páratlan függvény,

$$\Omega_\varepsilon = \int_{-\pi}^{0} \frac{g(t)\,dt}{2\,tg\frac{t-\psi}{2}} + \int_{0}^{\psi-\varepsilon} \frac{g(t)\,dt}{2\,tg\frac{t-\psi}{2}} + \int_{\psi+\varepsilon}^{\pi} \frac{g(t)\,dt}{2\,tg\frac{t-\psi}{2}} =$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\psi-\varepsilon} + \int_{\psi+\varepsilon}^{\pi}\right) g(t)\left(\frac{1}{tg\frac{t-\psi}{2}} + \frac{1}{tg\frac{t+\psi}{2}}\right)dt + \int_{\psi-\varepsilon}^{\psi+\varepsilon} \frac{g(t)}{2\,tg\frac{t+\psi}{2}}\,dt} \qquad /55/$$

~~és ebből~~

$$= \int_{0}^{\pi} \frac{g(t)}{2\,tg\frac{t+\psi}{2}}\,dt + \int_{0}^{\psi-\varepsilon} \frac{g(t)}{2\,tg\frac{t-\psi}{2}}\,dt + \int_{\psi+\varepsilon}^{\pi} \frac{g(t)}{2\,tg\frac{t-\psi}{2}}\,dt$$

és ebből

$$\Omega_\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\psi-\varepsilon} + \int_{\psi+\varepsilon}^{\pi}\right)\left(g(t)\left[\frac{1}{tg\frac{t-\psi}{2}} + \frac{1}{tg\frac{t+\psi}{2}}\right]dt\right) + \int_{\psi-\varepsilon}^{\psi+\varepsilon} \frac{g(t)}{2\,tg\frac{t+\psi}{2}}\,dt \qquad /56/$$

Megjegyezzük,hogy ~~XXX~~ az /55/ jobboldalán szereplő integrálok egyike sem létezik külön-külön,csak az összegük véges érték,azonban ennek a szimbolikus jelölésnek precíz értelme nyilvánvaló. Az /56/-ban szereplő integrálok azonban már külön külön is léteznek,mégpedig nem is mint Cauchy féle főértékek,hanem mint közönséges integrálok. Ugyanis felhasználva az

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t-\varphi}{2}}+\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t+\varphi}{2}}=\frac{2\sin t}{\cos\varphi-\cos t} \qquad /57/$$

azonosságot,/56/-ból

$$\Omega_{\varepsilon}=\int_{0}^{\varphi-\varepsilon}\frac{g(t)\sin t\,dt}{\cos\varphi-\cos t}+\int_{\varphi+\varepsilon}^{\pi}\frac{g(t)\sin t\,dt}{\cos\varphi-\cos t}+\int_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon}\frac{g(t)\,dt}{2\operatorname{tg}\frac{t+\varphi}{2}} \qquad /58/$$

Alkalmazzuk most az 1.lemmát. Ha létezik az $\int_{-1}^{+1}\frac{f(u)du}{x-u}$ integrál Cauchy féle főértéke,akkor,mivel reguláris főértékről van szó, alkalmazható az $u=\cos t$ helyettesités,tehát $(x=\cos\varphi)$

$$P\int_{0}^{\pi}\frac{g(t)\sin t\,dt}{\cos\varphi-\cos t}=P\int_{-1}^{+1}\frac{f(u)du}{x-u} \qquad /59/$$

/58/-ban elvégezve az $\varepsilon\to 0$ határátmenetet,tekintve hogy az /58/ jobboldalán álló harmadik integrálban az integrandus korlátos, kaptuk a következő állítást:

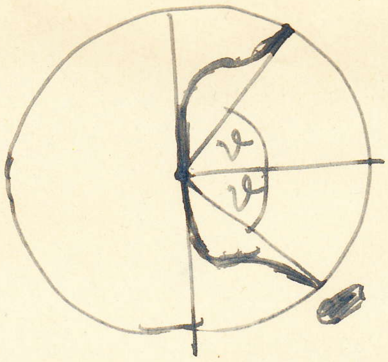
5.Lemma. Ha $f(u)$ A-tipusu függvény, és / 2/ a Cauchy féle értelemben létezik,továbbá $g(t)=f(\cos t)$, $(0<t<\pi)$, $g(t)$ páratlan ~~akkor~~ függvény, és $x=\cos\varphi$, akkor

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{g(\varphi+t)-g(\varphi-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt=P\int_{0}^{\pi}\frac{g(t)\sin t\,dt}{\cos\varphi-\cos t}=P\int_{-1}^{+1}\frac{f(u)}{x-u}du \qquad /60/$$

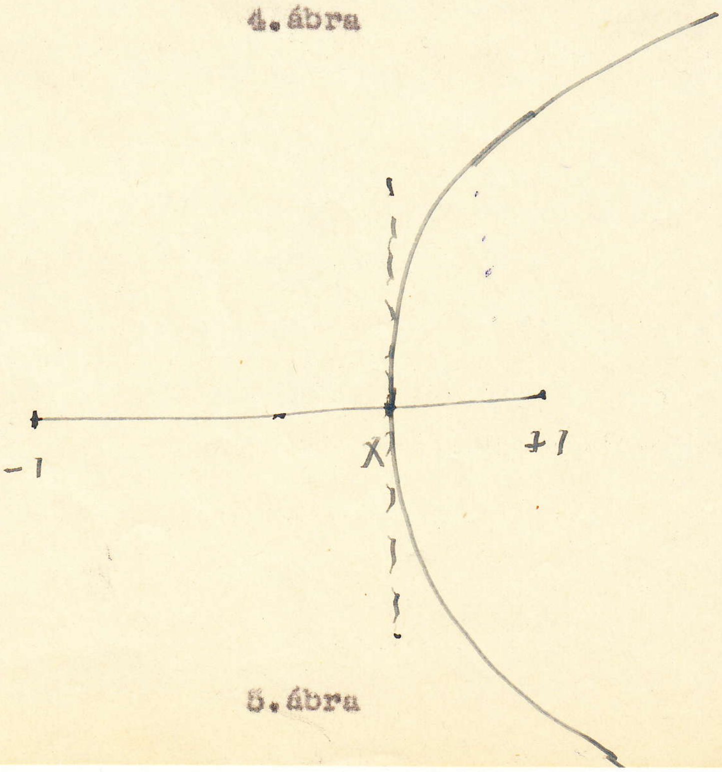
Megjegyzendő,hogy a /60/ baloldalán álló integrál,amelyre az $\varepsilon \to 0$ határátmenetet elvégezzük, már maga is Cauchy féle főérték, tehát azt mondhatjuk,hogy az

$$\int_0^{\pi} \frac{g(\varphi+t)-g(\varphi-t)}{2\,tg\frac{t}{2}}\,dt \qquad /61/$$

integrál kétféle értelemben is szinguláris: egyrészt mint Cauchy féle főérték,másrészt mint improprius integrál,azonban ez a kétfajta szingularitás természetesen más pontokra vonatkozik, a φ és $-\varphi$ pontok környezetében értelmezzük mint Cauchy féle főértéket, és a 0 pont környezetében mint improprius integrált.



4.ábra



5.ábra

4. Fejezet.

A bevezetésben említettük, hogy olyan trigonometrikus sorokkal, amelyek együtthatóit az Euler féle integrál-képlettel számitjuk ki, azonban ezen integrálok csak a Cauchy féle értelemben léteznek, először Titchmarsh foglalkozott. Mi a következőkben csak egy speciális esettel foglalkozunk, eredményeink azonban minden nehézség nélkül kiterjeszthetők az általános esetre is.

DEFINICIÓ: A

$$\sum_{1}^{\infty} b_n \sin n\vartheta \qquad /62/$$

sinus-sort akkor nevezzük Cauchy-Fourier sornak, ha

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(t) \sin nt \, dt \qquad /63/$$

ahol $g(t)$ páratlan függvény, és $g(t)\sin t$ Lebesgue-integrálható, azonkivül $g(t)$ a $(0,\pi)$ minden zárt belső intervallumában korlátos.

Tehát, ebben a speciális esetben, az együtthatókat definiáló /63/ integrálok a közönséges értelemben léteznek, csak az eltünő cosinus-együtthatók értendők a Cauchy féle értelemben. Az is nyilvánvaló, hogy a fenti definició értelmében, ha $f(u)$ A-tipusu függvény, és $g(t) = f(\cos t)$, akkor $g(t)$ sora, ami nem más mint a /47/ hatványsor ~~XXXXX~~ képzetes része az egységkörön, Cauchy-Fourier sor.

A Cauchy-Fourier sorok együtthatóiról a következőket mondhatjuk: az általános esetben fennáll

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

és ennél többet az általános esetben nem is lehet kimondani, mert megadható olyan Cauchy-Fourier sor, amelynél $\frac{b_n}{n}$ tetszőleges lassan tart zérushoz. Még ha feltesszük, hogy $g(t).\sin t$ korlátos függvény, akkor is elérheti $\frac{b_n}{n}$ a $\log n$ nagyságrendet/ ez a Lebesgue-konstánsokra való hivatkozással látható be./ Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy b_n zérushoz tartson az, hogy a

$$\gamma(t) = \left[g\left(\frac{t}{2}\right) - g\left(\pi - \frac{t}{2}\right)\right] \sin \frac{t}{2} \qquad /64/$$

integrálható függvény Fourier sora a 0 helyen konvergáljon a 0 értékhez, tehát b_n csak igen speciális esetben tart zérushoz. Ha $\gamma(t)$ a 0 helyen folytonos és $\gamma(0) = \gamma$, akkor

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} = \gamma$$

Ezek közül az állitások közül az első Titchmarshnál is megtalálható, bizonyitásuk a következő egyszerü észrevétel alapján történhet: $b_n = S_{\left[\frac{n}{2}\right]}(0) + o(1)$, ahol $S_n(0)$ a /64/ függvény Fourier sorának részletösszege a $t=0$ helyen.

6.Lemma Egy Cauchy-Fourier sort tagonkint formálisan integrálva közönséges Fourier sort kapunk.

Bizonyitás:

Egyszerüség kedvéért feltehetjük, hogy $g(t)$ csak a zérus helyen szinguláris, ez nem jelent lényeges megszoritást. Legyen

$$G(x) = \int_x^{\pi} g(t)\,dt \qquad /65/$$

Először azt bizonyitjuk, hogy $G(x)$ * integrálható. Ez természetesen csak a 0 pont környezetében szorul bizonyitásra. A 0-t nem tartalmazó zárt intervallumban $G(x)$ integrálható, tehát

* Ez is a (169) képlet megvan Hardy Littlewood & Pólya Inequalities, Cambridge 1934, p. 169. Ex. 242.

A köv. Expr.: Ha $f \geq 0$ and L in $(0\,a)$ and

$$g = \int_x^a \frac{f(t)}{t}\,dt$$

then g is L and $\int_0^a g(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$.

$$\int_y^\pi G(x)dx = \int_y^\pi\left(\int_x^\pi g(t)dt\right)dx \qquad (0<y<\pi) \qquad /66/$$

A / 66/ jobboldalán álló integrálra alkalmazzuk a kettősintegrálok ismert átalakitását:

$$\int_y^\pi G(x)dx = \int_y^\pi (t-y)g(t)dt \qquad /67/$$

Legyen

$$g_y(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \leq t \leq y \\ (t-y)g(t) & \text{ha } y \leq t \leq \pi \end{cases}$$

akkor /67/ igy irható:

$$\int_y^\pi G(x)dx = \int_0^\pi g_y(t)dt \qquad /68/$$

Mivel $\lim\limits_{y\to 0} g_y(t) = tg(t)$ és $|g_y(t)| \leq t|g(t)|$, azonkivül feltevésünk szerint $t.g(t)$ integrálható, tehát Lebesgue tételét alkalmazhatjuk, és igy következik, hogy $G(x)$ integrálható, és hogy

$$\int_0^\pi G(x)dx = \int_0^\pi tg(t)dt \qquad /69/$$

Most bebizonyitjuk, hogy a $G(x)$ függvény Fourier sorát formálisan tagonkint deriválva $g(x)$ Cauchy-Fourier sorát kapjuk. Tekintve, hogy

$$\frac{2}{\pi}\int_\varepsilon^\pi g(t)\sin nt\,dt = -\frac{2}{\pi}G(\varepsilon)\sin n\varepsilon - \frac{2n}{\pi}\int_\varepsilon^\pi G(t)\cos nt\,dt \qquad /70/$$

tehát csak azt kell belátni, hogy $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon G(\varepsilon) = 0$. Ez a következőképen történhet: ~~XXXX~~ Válasszuk α-t ugy, hogy

$$\int_0^\alpha t|g(t)|dt < \frac{\delta}{2} \qquad (\delta>0)$$

fennálljon.

Miután α -t rögzitettük, válasszuk ε -t ugy, hogy

$$\varepsilon \int_{\alpha}^{\pi} |g(t)| dt < \frac{\delta}{2}$$ legyen. Akkor

$$|\varepsilon G(\varepsilon)| = \left|\varepsilon \int_{\varepsilon}^{\pi} g(t) dt\right| \leq \int_{\varepsilon}^{\alpha} t|g(t)| dt + \varepsilon \int_{\alpha}^{\pi} |g(t)| dt < \delta \quad /71/$$

tehát valóban $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon G(\varepsilon) = 0$. Ezzel a 6. lemmát bebizonyitottuk.

A 6. lemma szerint tehát a Cauchy -Fourier sorok bizonyos közönséges Fourier sorok formális deriválása utján származnak. Igy felmerül a kérdés, hogy hogyan viszonylik a Cauchy-Fourier sorok kategóriája az u.n. Fourier Stieltjes sorokhoz, amelyek tudvalevőleg véges variációju függvények Fourier sorának formális deriváltjai. Ugyanez a kérdés felmerült már a bevezetésben is, amikor az / 1/ integrálra vonatkozó eredményeinket hasonlitottuk össze Privaloff és Brodsky vizsgálataival. A kérdésre igen könnyü választ adni: minden olyan Cauchy -Fourier sor, amelynek együtthatói nem korlátosak, nem Fourier-Stieltjes sor, Másrészről olyan végesvariációju függvény Fourier sorának deriváltja, amely függvény differenciálhányadosa semilyen intervallumban sem korlátos, nem lehet Cauchy-Fourier sor. Tehát a két fogalom közül egyik sem foglalja magába a másikat.

Ugyanez a kapcsolát áll fenn a Cauchy-Fourier sorok és az u.n. Fourier -Riemann sorok, tehát a Riemann szerint integrálható, de nem abszolut integrálható függvények sorai között. Ezzel kapcsolatban megemlitjük, hogy Riemann klasszikus példája, 18/

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{\nu} \cos\frac{1}{x}\right) \qquad 0 < x < \pi, \quad 0 < \nu < \frac{1}{2},$$

páratlan függvénnyé kiegészitve Cauchy-Fourier sor.

Ezek után áttérünk a Cauchy-Fourier sorok és konjugált soraik szummabilitásának vizsgálatára.

2a.Tétel. Olyan pontokban, ahol $g(t)$ az integráljának a differenciálhányadosa, tehát majdnem mindenütt, $g(t)$ Cauchy Fourier sora Abel-szummábilis a függvényértékhez.

Ez a 2.tételből a 3.és 4.lemma felhasználásával közvetlenül következik. Megjegyzendő, hogy a ~~XX~~ 2a.tétel a 6.lemma felhasználásával következik ~~XXXX~~ Fatou egy tételéből is[19].

2b.Tétel. A Cauchy-Fourier sorok ugyanazon feltételek mellett szummálhatók Fejér féle közepekkel, mint a közönséges Fourier sorok. Már említettük, hogy ez a tétel sem uj, de talán nem érdektelen a következő egyszerü bizonyitás: Legyen

$$p(t) = \begin{cases} g(t) & 0 \le |t| \le \varepsilon \\ 0 & \varepsilon < |t| < \pi \end{cases}$$

és

$$g(t) = p(t) + q(t)$$

Elegendő kimutatni, hogy $p(x)$ Cauchy Fourier sorának számtani

Rol?

középei zérushoz tartanak, ha ~~XXXX~~ ε elég kicsi. Jelöljük a számtani közepeket $\sigma_n(x)$ -el, akkor egyszerü számitással kapjuk, hogy

$$\sigma_n(x) = \frac{\sigma_n(x) - \sigma_n(-x)}{2} = \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_0^{\varepsilon} g(t) \left(\frac{\sin^2 (n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin^2 \frac{t-x}{2}} - \frac{\sin^2 (n+1)\frac{t+x}{2}}{\sin^2 \frac{t+x}{2}} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^{\pi} g(t) \frac{\left(\sin n\frac{t}{2} \sin (n+2)\frac{x}{2} - \sin n\frac{x}{2} \sin (n+2)\frac{t}{2}\right)\left(\cos n\frac{t}{2} \cos (n+2)\frac{x}{2} - \cos (n+2)\frac{t}{2} \cos n\frac{x}{2}\right)}{\sin^2 \frac{t-x}{2} \sin^2 \frac{t+x}{2}} dt \qquad /72/$$

Felhasználva a

$$\frac{\sin 2k\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = 2\cos t + 2\cos 2t + \dots + 2\cos kt$$

$$\frac{\sin (2k+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = 1 + 2\cos t + 2\cos 2t + \dots + 2\cos kt \qquad /73/$$

azonosságokat,

azt kapjuk,hogy

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\cancel{\frac{1}{n+1}}\int_0^{\varepsilon} \phi(t)\,\mathcal{K}_n(t)\,dt ,$$

$$\phi(t) = \frac{g(t)\sin\frac{t}{2}}{\sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{t+x}{2}\right)}, \qquad \mathcal{K}_n(t) = \frac{\sum_0^{2n}\cos r\frac{t}{2}\cdot\varepsilon_r}{n+1} \qquad /74/$$

ahol $|\varepsilon_r| \leq 8$. Tehát

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sum_0^{2n}\varepsilon_r\cdot c_r}{n+1} \qquad /75/$$

ahol $c_r = \int_0^{\varepsilon}\phi(t)\cos r\frac{t}{2}\,dt$.

Válasszuk ε-t úgy, hogy $0<\varepsilon<x$ és $0<\varepsilon<\pi-x$, fennálljon.

Akkor ~~Mivel~~ $\phi(t)$ a $(0\ \varepsilon)$ intervallumban integrálható ~~korlátos~~ függvény, és a Riemann lemma szerint $c_r \to 0$, és igy /75/-ből

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x) = 0$$

Ezzel a 2b.tételt bebizonyitottuk.

Most áttérünk a konjugált sor vizsgálatára. Plessner egy tétele szerint /l.c./ ha egy trigonometriai sor egy E mérhető halmazon Césaro féle k-rendü közepekkel szummábilis,és E pozitív ~~nem zérus mértékü~~,akkor az E halmazon egy zérus mértékü halmaz kivételével mindenütt ugyanolyan rendben szummábilis a konjugált sor is.Ezt a tételt alkalmazva,kimondhatjuk a 2b.tételre való tekintettel a következőt: A Cauchy-Fourier sorok konjugált sorai 0 mértékü halmaz kivételével majdnem mindenütt XXXXXXXXXXXXX Fejér féle közepekkel szummálhatók. De akkor a fortiori Abel-szummálhatók, és a 3.lemma szerint létezik /1/ valós részének a határértéke. Tehát a 3.tételt a következő általánositott alakban mondhatjuk ki:

3a.tétel Ha $F(z)$ az /1/ alakban állitható elő,és $R(x,y)$ al jelöljük

$F(z)$ valós részét,akkor a $(-1,+1)$ intervallumban majdnem mindenütt létezik a z

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(u)}{x-u}\,du$$

Cauchy féle főérték, és $\lim_{y\to 0} R(x,y) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(u)}{x-u}\,du.$

Másrészt,tekintettel az 5.lemmára, $g(t)$ Cauchy Fourier sorának konjugált sora,ahol Abel szummábilis,ott szummája a:

$$\int_{0}^{\pi} \frac{g(x+t)-g(x-t)}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}}\,dt \qquad /76/20/$$

Cauchy féle főérték. Plessner tétele szerint viszont majdnem mindenütt létezik a konjugált sor Fejér közepeinek a határértéke,ez viszont megegyezik az Abel féle szummával,tehát végül kimondhatjuk a 3b.tételt: $g(t)$ Cauchy Fourier sorának konjugált sora majdnem ~~XXXXXXXXXXX~~ mindenütt Fejér féle közepekkel szummábilis,és szummája a /76/ alatti integrál.

18/B.Riemann,Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. Ges.Werke,2.Aufl.Leipzig,1892,p.227-271.
19/P.Fatou,Séries trigonométriques et séries de Taylor,A.M.30/1906/335-400,A.Zygmund,Trigonometrical series,3.44,p.52.
20/ Ugyanez a képlet szerepel közönséges Fourier sorok konjugált sorának szummájaként,l.A.Zygmund,Trigonometrical series,3.32,p.49.

1. Függelék.

A következőkben vázoljuk az /1/ integrál kapcsolatát az orthogonális polinomok elméletével. Ilyen tipusu integrálok előfordulnak a Stieltjes féle lánctörtelméletben. 21/. Ha $f(u) \geq 0$, $F(z)$ Stieltjes féle lánctörtjének nevezői a $(-1, +1)$ intervallumban az $f(u)$ sulyfüggvényre orthogonális polinomok. Nézzünk néhány példát:

a./ $$\log \frac{z+1}{z-1} = \int_{-1}^{+1} \frac{du}{z-u}$$

b./ $$\frac{1}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}\,(z-u)}$$

c./ $$z - \sqrt{z^2-1} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-u^2}}{z-u}\, du$$

d./ $$\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} - 1 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}}{z-u}\, du$$

a./ a Legendre polinomokat, b./ a Csebisev féle elsőfaju polinomokat, c./ a Csebisev féle másodfaju polinomokat, és végül d./ az $\alpha = -\frac{1}{2}$ és $\beta = +\frac{1}{2}$ indexekhez tartozó Jacobi polinomokat származtatja az emlitett módon. A b./ és d./ példák a következő egyszerü Cauchy-Fourier sorokat szolgáltatják, amelyek közül az elsőt már Titchmarsh is emliti:

B./ $$\frac{1}{2\sin t} \sim \sin t + \sin 3t + \sin 5t + \ldots + \sin(2n+1)t + \ldots$$

D./ $$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sim \sin t + \sin 2t + \sin 3t + \ldots + \sin nt + \ldots$$

Ezen a két példán könnyen verifikálhatjuk a szummabilitásra vonatkozó eredményeinket. B./-nél a sor Fejér közepei

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{2\sin t}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\sin(2n+1)t}{4n \sin^2 t}$$

, tehát valóban

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(t) = \frac{1}{2\sin t}$$

, a konjugált sornál viszont

$$\overline{\sigma_n(t)} = \frac{\cos \vartheta - \cos(2n+1)\vartheta}{4n \sin^2 \vartheta}$$

és ~~xxxxxxxxxx~~

$\lim_{n\to\infty} \overline{\sigma_n(t)} = 0$. Másrészt valóban $\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$ valós része a $(-1, +1)$ intervallumban 0.

A D./ sornál:

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\vartheta/2 - \frac{1}{n+1}\,\frac{\sin(n+1)\vartheta}{4\sin^2\vartheta/2} \longrightarrow \frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\vartheta/2$$

a D./ sor konjugált soránál:

$$\overline{\sigma_n(t)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin^2(n+1)\vartheta/2}{2\sin^2\vartheta/2} \longrightarrow -\frac{1}{2} = R\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} - \frac{1}{2}\right)_{z=x}$$

Még egy összefüggés~~XXXXXXXXXXXXX~~ van az orthogonális polinonmok elmélete és az /1/ integrál között: ismeretes,hogy annak a differenciálegyenletnek,22/ amelynek a Jacobi polinomok eleget tesznek,van egy másik,nem polinomiális megoldása is,amely ugyanazon sajátértékekhez tartozik.Ezt nevezik másodfaju Jacobi-függvénynek.A másodfaju Jacobi függvények az ugyanazon indexekhez tartozó Jacobi polinomból /1/ tipusu integrállal fejezhetők ki: 23/

$$Q_n^{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2}(z-1)^{-\alpha}(z+1)^{-\beta}\int_{-1}^{+1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\,\frac{P_n^{\alpha,\beta}(t)}{z-t}\,dt$$

Könnyen belátható,hogy ha $\alpha > -1$, $\beta > -1$, akkor $(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}P_n^{(\alpha\beta)}(t)$ A-tipusu függvény,vagyis alkalmazható a 2.tétel,amely szerint tehát

$$2Q_n^{\alpha,\beta}(z)\,(z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}$$

képzetes része a / $-1,+1$ / intervallumban $-(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}P_n^{(\alpha\beta)}(t)\pi$.
Alkalmazható a 3.tétel is,~~XXXX~~ tehát ha $Q_n^{\alpha\beta}(z)$ valós részét a /$-1,+1$/ intervallumban $R_n^{(\alpha\beta)}(x)$ -el jelöljük,akkor fennáll

$$2R_n^{\alpha\beta}(x)\,(x-1)^{\alpha}(x+1)^{\beta} = P\int_{-1}^{+1}\frac{(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}P_n^{\alpha,\beta}(t)}{x-t}\,dt$$

Felirjuk még az előző képlet jólismert speciális esetét; ha $\alpha=0$ és $\beta=0$, kapjuk a másodfaju Legendre polinomok kifejezését:

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(t)}{x-t}\,dt$$

2.Függelék.

Az aerodinamikában a következő integrál egyenlet szerepel mint a hordfelületek elméletének alapegyenlete:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{y(u)\,du}{x-u}=p(x) \qquad /77/$$

ahol a baloldali integrál a Cauchy féle értelemben veendő. Hamel /l.c./ ezt az integrálegyenletet a következőképen oldja meg formálisan: Először bevezeti az $u=\cos t$ uj változót. Az

$$x=\cos\varphi,\quad y(\cos t)\sin t=Y(t),\quad p(\cos\varphi)\sin\varphi=P(\varphi)$$

jelöléseket bevezetve kapja az

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{Y(t)\,dt}{\cos\varphi-\cos t}=\frac{P(\varphi)}{\sin\varphi} \qquad /78/$$

egyenletet. Felteszi továbbá, hogy $P(\varphi)$ sinussorba fejthető,

$$P(\varphi)=\sum_{1}^{\infty}b_n\sin n\varphi \qquad /79/$$

Felhasználva az

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\cos nt}{\cos\varphi-\cos t}\,dt=-\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} \qquad /80/$$

segédformulákat, a keresett $Y(t)$ függvényre a következő előállitást nyeri:

$$Y(t)=C+\sum_{1}^{\infty}b_n\cos nt \qquad /81/$$

Valóban/81/ formálisan eleget tesz a /78/ egyenletnek, azonban ez a módszer csak heurisztikusnak tekinthető, és matematikai szempontból még igen sok kivánnivalót hagy hátra. Dolgozatunk eredményei alapján egy elég általános esetben ki tudjuk mutatni a Hamel féle megoldás jogosultságát.

Első megjegyzésünk, hogy a /80/ formulák, melyeket Hamel a residuum tételből precizitás szempontjából nem teljesen kifogástalan uton vezet le, közvetlenül következnek a 3.tételből. Legyen ugyanis

$$F(z)=\frac{\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^n}{\sqrt{z^2-1}} \qquad /82/$$

Könnyen belátható, hogy $F(z)$ eleget tesz mind a 7 feltételnek, tehát az 1.tétel szerint előállitható az /1/ alakban, ahol most

$f(\,) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{J}(F(z))_{z=u+i0} = \frac{1}{\pi} \frac{T_n(u)}{\sqrt{1-u^2}}$. Itt $T_n(u)$ -val az n-ik Csebisev polinomot jelöltük. Tehát

$$P \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{T_n(u)\,du}{\sqrt{1-u^2}\,(x-u)} = R(F(z))_{z=x} = -U_{n-1}(x) \qquad /83/$$

Ebből $u = \cos t$, $x = \cos\varphi$ helyettesítéssel, ami az 1. lemma szerint jogosult, nyerjük a /80/ képleteket. Ezzel kapcsolatban még megjegyezzük, hogy a /82/ függvény a következő Cauchy-Fourier sorokat szolgáltatja, amelyek az 1. függelékben közölt B. példa általánositásai:

$$\frac{\cos 2k\varphi}{2\sin\varphi} = \sin(2k+1)\varphi + \sin(2k+3)\varphi + \sin(2k+5)\varphi + \dots$$

$$\frac{\cos(2k-1)\varphi}{2\sin\varphi} = \sin 2k\varphi + \sin(2k+2)\varphi + \sin(2k+4)\varphi + \dots \qquad /84/$$

Ami a Hamel féle megoldás jogosultságát illeti, ezt a következő elég általános esetben tudjuk bebizonyitani: /79/ együtthatóinak sorozata legyen konvex nullasorozat. Ugyanis ebben az esetben a /81/ által előállitott függvény integrálható, és $(0\ \pi)$ minden belső intervallumában korlátos /v.ö. Zygmund, l.c. 5.12. p.109 tehát $\psi(u)$ A-tipusu függvény, és a 3. tétel alkalmazható. Tehát a Hamel féle eljárás jogosult, sőt az előforduló trigonometriai sorok, /79/ és /81/ a $(0\ \pi)$ minden zárt belső intervallumában egyenletesen konvergálnak, ami - fizikai alkalmazásról lévén szó - annyit jelent, hogy a megoldások a gyakorlatban is jól használhatók. Ennek ellenére ~~XXXXXXXXXXX~~ a közölt feltétel ~~XXX~~ elég általános, tekintve, hogy olyan eseteket is magába foglal, amikor /79/ nem Fourier sor, pl. a ~~X~~

$$P(\varphi) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{\log n} \qquad /85/$$

Reméljük, hogy dolgozatunk eredményeinek fizikai alkalmazására alkalmunk lesz ~~XX~~ bővebben kitérni.

21/ T.J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, Ann. Fac. Sci. Toulouse, 8, 1894, 1-122; 9, 1895, 1-47. Oeuvres II. p. 402-566.
22/ Szegő, l.c. 4.23.1. p.64
23/ Szegő, l.c. 4.61.2. p.74