A SZOVJET MATEMATIKA 30 ÉVE.

II. A valószínűségszámítás új irányai.

1. RÉSZ.

Irta: *Rényi Alfréd.*

Bevezetés.

Első cikkünkben ismertettük szovjet matematikusoknak a valószínűségszámítás megalapozása terén kifejtett korszakalkotó jelentőségű eredményeit, megmutattuk, hogy *Bernstein, Khincsin, Kolmogorov,* Glivenko* és más szovjet matematikusok a valószínűségszámítást teljesen új, szilárd alapokra fektették, és ezzel a további fejlődés útját megnyitották. Jelen dolgozatunk azokkal az eredményekkel foglalkozik, amelyeket a valószínűségszámítás szovjet mesterei ennek a tudománynak új ágaiban elértek. Ez az ismertetés már terjedelménél fogva is csak kiragadott példákra szorítkozhat és így teljességre egyáltalán nem tart igényt. Igyekeztünk úgy összeválogatni az anyagot, hogy ennek ellenére lehetőleg hű képet adjunk a valószínűségszámítás modern problémáiról és módszereiről, ugyanakkor azonban arra is törekedtünk, hogy ez az ismertetés különösebb előismeretek nélkül is megérthető legyen, és ez a szempont természetesen arra kényszerített, hogy sok jelentős eredményt említés nélkül hagyjunk, és sehol se törekedjünk a legáltalánosabb eredmények ismertetésére. A tárgykör nagysága arra kényszerített, hogy két részre osszuk fel: az alább következő első részben csak olyan problémákkal foglalkozunk, amelyek valószínűségi változók *sorozataira* vonatkoznak. Az utóbbi évtizedekben, különösen fizikai, technikai és más alkalmazások révén igen nagy jelentőségre tett szert valószínűségi változók *folytonos sokaságainak,* az úgynevezett stochasztikus folyamatoknak az elmélete. A valószínűségszámításnak ez az ága, elsősorban szovjet matematikusok, *Kolmogorov, Khincsin, Bernstein, Szlucki, Petrovszki, Romanovszki, Krein, Krülov, Bogoljubov* és mások munkája eredményeképpen rendkívül átfogó és mély elméletté épült ki, amely a valószínűségszámítás körébe eső jelenségeknek a klasszikus (diszkrét) módszerekkel elérhetőnél megfelelőbb leírását teszi lehetővé. A szovjet matematikusoknak ezen a téren elért nagy eredményeit (beleértve a *Markov*-féle láncok elméletét a diszkrét esetben is) egy később megjelenendő 2. részben fogjuk ismertetni.

* Az -ov végződésű orosz neveket az előző cikkünkben helytelenül -off végződéssel írtuk.

A valószínűségszámítás gyakorlati alkalmazásairól.

A valószínűségszámítás fejlődését az utóbbi évtizedekben elsősorban a gyakorlati alkalmazások számának jelentős kibővülése jellemzi. A fejlődés menetét vizsgálva kétségtelenül megállapíthatjuk, hogy a természettudományok, elsősorban a fizika, továbbá az ipar és mezőgazdaság által felvetett konkrét kérdések tették szükségessé új módszerek és fogalmak kialakítását, a valószínűségszámítás elméletének gyökeres átalakítását és vitték ezáltal az elmélet fejlődését előre. Nincs még egy ága a matematikának, amelyben a gyakorlattal való szoros kapcsolat, a gyakorlat ösztönző hatása olyan közvetlenül nyilvánulna meg, mint éppen a valószínűségszámításban. A matematika története azt mutatja, hogy a speciális feladatokból, azok közös vonásainak kiemelése útján keletkeznek az általános elméletek, amelyek azután újabb speciális feladatok megoldását teszik lehetővé. Így történt ez a valószínűségszámításban is. Egy ilyen rövid ismertetésben nincsen hely arra, hogy a különböző speciális kérdéseket részleteiben tárgyaljuk, hanem csak az általános elmélet főbb fejlődési irányait fogjuk vázolni. De hogy képet adjunk az alkalmazások széles skálájáról, bevezetőben felsorolunk néhány gyakorlati kérdést, amelyre az általános elméletet a valószínűségszámítás szovjet művelői nagy sikerrel alkalmazták. Ez a felsorolás sem tart természetesen igényt a teljességre, célja csak az, hogy rámutassunk az alkalmazási lehetőség sokrétű skálájára. Rá kell azonban mutatnunk arra a tényre, amelynek elvi jelentősége van, hogy a valószínűségszámítást gyakorlati problémákra alkalmazó matematikusok névsorában kivétel nélkül ott találjuk a valószínűségszámítás elvont elméleti kérdéseinek legjelesebb szovjet művelőinek neveit. Ezt a tényt azért emeljük ki, mert itt a szovjet tudomány egy fontos jellegzetességéről van szó, az elméleti és gyakorlati kutatás szoros egységéről, amely a valószínűségszámításban különösen világosan érvényesül; nem kétséges, hogy az elmélet és gyakorlat szoros egysége a szovjet tudomány erejének egyik termékeny forrása.

Példák a valószínűségszámítás alkalmazására.

A valószínűségszámítás alkalmazási területei között első helyen a *fizikát* kell megemlíteni. A modern fizika központi kérdéseinek tárgyalásánál a valószínűségszámítás módszerei nélkülözhetetlenek. A *statisztikus* mechanika már kialakulásakor is valószínűségszámítási alapon épült fel, azonban akkoriban csak a klasszikus valószínűségszámítás mai szemmel nézve kezdetleges módszerei álltak rendelkezésre. Éppen ezért fizikai szempontból is igen nagy jelentősége van a valószínűségszámítás modern halatovábbi eredményei alkalmazásának. Ezen a téren elsősorban *Khincsin* nevét kell említenünk, aki sok dolgozatában foglalkozott a statisztikus mechanika kérdéseivel, és azt új alapokra fektette.[1] Ugyancsak jelentősek ezen a téren *Kolmogorov,*[2] *Bogoljubov*[3] és *Davidov*[4] eredményei. A dinamikus rendszerek elméletének statisztikai tárgyalásával *Andronov, Witt* és *Pontrjagin*[5] (a topológia nagy mestere) foglalkoztak, *Khincsin* munkái viszont az *ergodikus elmélet* terén igen nagy jelentőségűek. *Khincsin* foglalkozott a *kvantummechanika* ergodikus problémáival is,[6] a *klasszikus kvantumstatisztika* terén viszont *Godnyev*[7] ért el értékes eredményeket. *Gnedenko*[8] egy dolgozata a *Geiger—Müller* számlálócső feloldóképességének javításával foglalkozott. A Geiger—Müller számlálócsövet elemi részecskék számlálására használják: alkalmazásánál hibaforrást jelent az a tény, hogy amikor egy részecske jelzése folytán kisülés jön létre, ez bizonyos rövid ideig érzéketlenné teszi a számlálócsövet, és az ezen időtartam alatt érkező újabb részecskéket a számlálócső nem számlálja. Ezt a hibát valószínűségszámítási alapon álló elméleti korrekció alkalmazásával nagymértékben csökkenteni és ilyenmódon a cső feloldóképességét javítani lehet. *Jaglom*[9] a Brown-féle mozgás elméletében ért el jelentős eredményeket. *Kolmogorov* és *Dmitriev*[10] és munkájukhoz csatla-

[1] Az idézett munkáknál a következő állandó rövidítéseket használjuk: DAN = Dokladi Akademii Nauk SzSzSzR; IAN = Izvesztia Akademii Nauk, Szeria Matematicseszkaja; MSZ = Matematicseszki Szbornyik; UMN = Uszpehi Matematicseszkih Nauk. *Khincsin* idevágó munkái közül megemlítjük a következőket: Zur mathematischen Begründung der statistischen Mechanik, Z. angew. Math. Mech. 13 (1933) 101—103; Matematicseszkie osznovania sztatiszticseszkoi mechanika Moszkva—Leningrád GTTI (1943) 1—126; Konvekszniie funkcii i evoljucionnüe teoremü sztatiszticseszkoi mechaniki, IAN, 7 (1943) 111—112.

[2] Zur Umkehrbarkeit der statistischen Naturgesetze, Math. Ann. 113 (1937) 766—772.

[3] Metod funkcionalnüh podhidnih v sztatiszticsnoi mechanici, Kiev, Szbornyik Trudov Inszt. Mat. ANUSzSzR 8 (1947) 177—199.

[4] Uravnenie Fokkera-Planka v fazovom prosztransztve i vremja relakszacii makszvellovszkovo raszpredelenia DAN 2 (1934) 212—219.

[5] Statistische Auffassung dynamischer Systeme, Phys. Z. Sowjet. 6 (1934) 1—24.

[6] Zu Birkhoffs Lösung des Ergodenproblems, Math. Ann. 107 (1932) 485—488; The method of spectral reduction in classical dynamics Proc. Nat. Acad Sci. USA. 19 (1933) 567—573; Ob ergodicseszkoi probleme kvantovoi mechaniki IAN 7 (1943) 167.

[7] Kobosznovaniju klasszicseszkoi kvantovoi statisztiki, Ivanovo, Ucsen. Zap. ped. Inst. 1 (1941) 42—46.

[8] K teorii szcsotcsikov Geiger—Müllera. Zsurn. Exper. i teor. fiz. 11 (1941) 101—106.

[9] O sztatiszticseszkoi obratimoszti Brownovszkovo dvizsenia DAN 56 (947) 691—695.

[10] Vetvjascsieszja szlucsainüe processzi, DAN 56 (1947) 7—10.

közva *Jaglom*[11] a láncreakciókkal kapcsolatban fellépő valószínűségszámítási problémákkal foglalkoztak, ennek a kérdésnek az atomrombolással kapcsolatban van különleges jelentősége. *Kolmogoroff* egy másik dolgozata[12] a fémek kristályosodását tárgyalja a valószínűségszámítás alapján. A valószínűségszámítás csillagászati alkalmazásával többek között *Geraszimovics*[13] foglalkozott, továbbá — különösen a napfoltok elméletében — *Szlucki* vizsgálatait kell kiemelnünk.[14] *Szlucki* vizsgálatai a perioduskutatás egész területét felölelik, és rendkívül nagy elvi jelentőséggel bírnak. *Szlucki*-nak a stochasztikus folyamatok elméletére vonatkozó vizsgálatai, amelyek *Khincsin* és *Kolmogorov* idevágó vizsgálataira támaszkodtak, megmutatták, hogy a perióduskutatás elvtelen formalista alkalmazása sok esetben tárgyilag teljesen hibás eredményekhez vezetett. *Szlucki*[15] és hozzá csatlakozva *Romanovszki*[16] megmutatták, hogy igen sok esetben, amikor látszólag periodicitás mutatkozott, nem belső törvényszerűségeken alapuló tényleges periodicitásról, hanem pusztán véletlen ingadozásokról van szó, amelyek a periodicitást imitálják; ezt a jelenséget pszeudoperiodicitásnak nevezik. *Szlucki* és *Romanovszki* kimutatták, hogy a stochasztikus folyamatok bizonyos elég tág osztálya mutat fel ilyen pszeudoperiodicitást (az általuk szinuszoid-nak nevezett eloszláshoz közeledik) anélkül, hogy itt valójában periodikus jelenségekről volna szó. *Szlucki* eredményei egész forradalmi átalakulást eredményeztek a meteorológiában, geofizikában, csillagászatban és egy sereg periodikusnak elfogadott jelenség újbóli megvizsgálását és a régi elmélet elvetését vonták maguk után. *Szlucki* ezirányú vizsgálatai nemcsak matematikai precizitásban állnak igen magas színvonalon, hanem elvi szempontból is valóban tudományos álláspontot képviselnek, szemben a formalista módszerrel, amely sok nyugateurópai és amerikai szerzőt jellemez. *Szlucki* egyik legjellemzőbb képviselője annak a fentemlített, a szovjet tudományra általában jellemző törekvésnek, amely az elméleti kutatásnak a gyakorlattal

[11] Nyekotorüe predelnüe teormü vetvjascsieszja szlucsainüh processzov DAN 56 (1947) 795—797.

[12] K sztatiszticseszkoi teorii krisztallizacii metallov, IAN 1937, 355—360.

[13] Probability problems connected with the discovery of variable stars in a photographic way, DAN (1931) 93—100.

[14] Ob 11-letnei periodicsnoszt szolnecsnüh pjaten, DAN 4 (1935). K vopriszu o szolnecsnoi posztojannoi, Zsurn. Geofiz. 4 (1934).

[15] Szlozsenie szlucsainüh pricsin kak isztocsnik ciklicseszkih processzov, Moszkva, Voproszi konjunkturi, 7 (1926); Sur un théorème limite rélatif aux séries des quantités eventuelles, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 185 (1927) 169—171. The summation of random causes as the source of cyclic processes, Econometrica 5 (1937).

[16] Généralisation d'un théorème de M. E. Slutsky. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 192 (1931) 718—721; Sur la loi sinuscidal limite, Rend. Palermo, 57 (1933) 130—136.

való szoros összekapcsolásában nyilvánul meg. Maga *Szlucki* tudományos munkamódszerét a következőképpen fogalmazta meg: „Az a véleményem, hogy az elméleti kutatásokkal párhuzamosan egyes konkrét problémák vizsgálatával is foglalkoznom kell, hogy ilyenmódon a módszereimet ellenőrízzem és a valósággal való összehasonlításukból adatokat gyüjtsek."[17] Valóban, *Szlucki* maga is végzett a geofizika körébe vágó statisztikai vizsgálatokat.

Áttérve az ipari alkalmazásokra, sok szovjet matematikus, így *Khincsin, Kolmogorov, Volberg, Buchman*[18] és mások foglalkoztak a telefon-hálózattal kapcsolatban fellépő valószínűségszámítási problémákkal, így például a hálózat túlterheltségének kérdésével. Legutóbb *Dünkin* oldotta meg ennek a problémakörnek egy érdekes feladatát.[19] A minőségi ellenőrzés, különösen a mintavétel kérdésében a legutóbbi időben alakult ki egy új elmélet, az ú. n. szekvenciális analízis, amely lehetővé teszi a régi módszerrel egyenértékű, de kevesebb minta megvizsgálását igénylő módszer kidolgozását. Ezt az elméletet *A. Wald* dolgozta ki igen részletesen; eredményeit a háború alatt az Egyesült Államokban hadititokként kezelték, ugyanis a lőszerszállítmányok átvételénél jelentős időmegtakarítást jelentett.[20] Elméleti szempontból a módszer lényege valószínűségi változók olyan összegeinek vizsgálata, amelyeknél az összeg tagjainak száma maga is valószínűségi változó; ilyen kérdést elsőnek *Kolmogorov* vizsgált meg, ő és *Prohorov* nemrégiben *Wald* eredményeit jelentősen általánosították.[21] A turbulencia elméletével *Kolmogorov* úttörő vizsgálatai nyomán több szovjet matematikus foglalkozott valószínűségszámítási alapon, így többek között *Obuchov*[22] vizsgálatait említjük meg. A hidrotechnikában fellépő valószínűségszámítási problémákkal *Krickij* és *Menkel*,[23] továbbá — különösen a folyók szabályozásánál és vízierőtelepek tervezésénél fellépő kérdésekkel *Szavarenszki* és *Rübkin*[24] foglalkoztak. A geológiai rétegek kialakulásának kérdésében *Kolmogorov* volt az első, aki valószínűségszámítási módszereket alkalmazott, és a kérdést bizonyos integrálegyenletek megoldására vezette vissza.[25] Meg kell itt emlékeznünk *Kolmogorov* egy elméleti szem-

[17] L. IAN 12 (1948) 417—420, Jevgeni Jevgenevics Szlucki, 1880—1948.
[18] L. IAN 5 (1941) 173—186, az 1940. évi statisztikai kongresszusról szóló beszámolót.
[19] Ob odnoi zadacse iz teorii verojatnosztei, UMN, 4 (1949) 183—197.
[20] A. Wald, Sequential Analysis, Wiley, New York, 1947.
[21] O szummah szlucsainovo csiszla szlucsainüh szlagajemüh, UMN (1949) 168—172.
[22] O raszpredelenii energii v szpektre turbulentnovo potoka DAN 2 (1941) 22—24.
[23] L. 18.
[24] U. o.
[25] Resenie odnoi zadacsi iz teorii verojatnosztei szvjazannoi sz voproszom o mechanizme szlojeobrazovanija, DAN 65 (1949) 793—796.

pontból is igen érdekes eredményéről,[26] amely bizonyos fémek porlasztásánál a részecskék nagyságszerinti eloszlását vizsgálja, és elméletileg kimutatja, hogy ebben az esetben, ugyanúgy, mint egy sereg más törési problémánál a megadott nagyságkategóriába eső részecskék számának logaritmusa tesz eleget igen jó közelítéssel a normális megoszlásnak. Eredményét a gyakorlati mérések fényesen igazolták. Nemrégiben a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete végzett ilyen vizsgálatokat a kőbányaipartól kapott, a kötörésre vonatkozó adatokon, amely vizsgálatok *Kolmogorov* elméletének újabb gyakorlati igazolását adták.

Egészen újszerű alkalmazási lehetőségei nyílnak a valószínűségszámításnak a szocialista társadalomban az új munkamódszerekkel, a munkaerő helyes elosztásával, az emberi munkaerő és a gépek gazdaságos kihasználásával kapcsolatban. *Khincsin* egyik dolgozata[27] például azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy ha egy üzemben egy munkás felügyelete alá több automatikusan működő gép tartozik, amely gépek időnkint bizonyos okból leállnak és kisebb javításra szorulnak, átlagosan mekkora kiesés lép fel a termelésben ezáltal? A probléma tárgyalásánál tekintetbe kell venni, hogy ha egy gép akkor áll le, amikor a gépekre felügyelő munkás egy már előzőleg leállt gép javításán dolgozik, akkor az időveszteség még nagyobb, hiszen a másodszorra leállt gép javításához csak az első gép kijavítása után tud a szerelő hozzáfogni. *Khincsin* eredményei lehetővé teszik a várható kiesés előre való kiszámítását, és ezen túlmenőleg helyes munkaerőelosztással az így fellépő veszteség csökkentését és ezáltal a termelékenység emelését. Hasonló kérdéssel foglalkozik *Bernstein* és *Gnedenko* egy munkája is. Ők azt vizsgálják, hogy összetett munkafolyamatoknál átlagosan mennyi munkaóra-veszteség származik abból, hogy az egyik munkáscsoport egy másik csoport munkájának befejezésére kénytelen várni. Az a tény, hogy a legkiválóbb szovjet tudósok, a valószínűségszámítás legelső elméleti szakemberei foglalkoztak ezekkel a kérdésekkel, a munkához való új viszonyt tükrözi, amely a szocialista társadalomban kialakult.

Széleskörű alkalmazási lehetőség nyílik a valószínűségszámítás módszerei számára a mezőgazdaságban is, több szovjet matematikus végzett idevágó érdekes és gyakorlatilag jelentős vizsgálatokat. Végül meg kell említenünk, hogy a nagy honvédő háború alatt *Kolmogorov* vezetése alatt a szovjet matematikusok egy csoportja foglalkozott a tüzérséggel kapcsolatos valószínűségszámítási problémákkal, különösen az ú. n. „mesterséges szórás"

[26] O logarifmicseszki normalnom zakone raszpredelenia razmerov csasztic pri droblenii DAN 31 (1941) 99—101; az idevágó mérési eredményekre vonatkozólag lásd Rasumovszki, DAN, 28 (1940) 814—816.

[27] O szrednyem vremeni prosztoja sztankov, MSZ 40 (1930) 119—123.

elméletét dolgozták ki igen alaposan.[28] A szovjet tüzérség nagyszerű teljesítményeiben ilyenmódon a szovjet matematikusoknak is részük volt, akik ezáltal is hozzájárultak a szovjet hadsereg fényes győzelmeihez.

Független valószínűségi változók.

A valószínűségszámítás megalapozásáról szóló cikkben (Matematikai Lapok I. 1. (1949) 27—64. o.) bevezettük a valószínűségszámítás *Kolmogorov*-féle elméletének néhány alapfogalmát, a valószínűségi mező, a valószínűségi változó és az eloszlásfüggvény fogalmát. A következőkben, hogy tárgyalásunkat egyszerűbbé tegyük, mindig fel fogjuk tenni, hogy a H alaphalmaz a $(0,1)$ intervallum pontjainak összessége, a T halmaztest ennek az intervallumnak *Lebesgue* szerint mérhető részhalmazainak összessége, és az abszolút additív halmazfüggvény maga a *Lebesgue*-féle mérték.[29] Egy A halmaz mértékét röviden $|A|$-val jelöljük, $V(\ldots)$ pedig a zárójelben álló „esemény” valószínűségét fogja jelenteni, másszóval azon t pontok halmazának a mértékét, amelyekre a zárójelben álló feltétel teljesül. Így például legyen $x(t)$ egy valószínűségi változó, akkor $V(x(t) < y)$ azon t pontok halmazának mértékét jelenti amelyekre $x(t) < y$; ezt a halmazt $A_x(y)$-nal fogjuk jelölni. A tárgyalt speciális esetben tehát valószínűségi változó alatt olyan $x = x(t)$ függvényt értünk, amelyre az $A_x(y)$ halmaz az y valós szám minden választása mellett mérhető, másszóval ebben az esetben a valószínűségi változó fogalma azonos a mérhető függvény fogalmával. Legyen $F(y) = V(x(t) < y) = |A_x(y)|$, az $F(y)$ függvényt $x(t)$ eloszlásfüggvényének nevezzük. Jelölje $A_x(z, y)$ azon t pontok halmazát, amelyekre $z \leq x(t) < y$, akkor nyilván

$$V(z \leq x(t) < y) = |A_x(z, y)| = F(y) - F(z) \tag{1}$$

Most bevezetjük a függetlenség fogalmát. Az x_1 és x_2 valószínűségi változókat akkor nevezzük függetlennek, ha bárhogyan választva a z_1, y_1, z_2, y_2 valós számokat (nyilván feltehetjük, hogy $z_1 \leq y_1$ és $z_2 \leq y_2$) mindig fennáll, hogy

$$|A_{x_1}(z_1, y_1) \cdot A_{x_2}(z_2, y_2)| = |A_{x_1}(z_1, y_1)| \cdot |A_{x_2}(z_2, y_2)| \tag{2}$$

ahol (2) baloldalán az $A_{x_1}(z_1, y_1)$ és $A_{x_2}(z_2, y_2)$ halmazok szorzatán, amint ez a halmazelméletben szokás, a két halmaz közös részét értjük. Két valószínűségi változó függetlensége szavakban a

[28] Szbornyik sztatei po teorii sztrelbü, Trudi Mat. Inszt. Szteklov. 12 (1945) 1—106.

[29] A következőkben az olvasóról nem tételezünk fel mást, mint a valós függvénytan alapfogalmainak ismeretét.

következőképpen fogalmazható meg: ha a $(0, 1)$ intervallum helyett csak annak egy olyan részhalmazát vizsgáljuk, amelyen x_1 értékei megadott határok közé esnek, ezen a részhalmazon x_2 értékkészleteloszlása viszonylag (azaz ezen részhalmaz mértékéhez viszonyítva) ugyanaz lesz, mint az egész $(0, 1)$ intervallumon. Hogy ezt a tényt jobban kiemeljük, jelöljük röviden az $A_{x_1}(z_1, y_1)$ halmazt A_1-gyel és $A_{x_2}(z_2, y_2)$-t A_2-vel. Feltéve, hogy A_1 mértéke pozitív (ellenkező esetben a (2) összefüggés semmitmondóvá válik) (2)-t a következő alakba írhatjuk:

$$\frac{|A_1 A_2|}{|A_1|} = |A_2| \tag{3}$$

másszóval az A_2 halmaz A_1-be eső részének mértéke úgy aránylik A_1 mértékéhez, mint a teljes A_2 halmaz mértéke a $(0, 1)$ intervallum mértékéhez, azaz egyhez.

Hasonlóképen értelmezzük 3, 4 vagy akárhány valószínűségi változó függetlenségét is: az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valószínűségi változókat akkor nevezzük függetlennek, ha a $z_1, z_2, \ldots, z_n$ és $y_1, y_2, \ldots, y_n$ valós számok tetszőleges választása mellett teljesül a

$$\begin{aligned} |A_{x_1}(z_1, y_1) A_{x_2}(z_2, y_2) \ldots A_{x_n}(z_n, y_n)| &= \\ = |A_{x_1}(z_1, y_1)| \cdot |A_{x_2}(z_2, y_2)| \ldots |A_{x_n}(z_n, y_n)| & \end{aligned} \tag{4}$$

feltétel. Megjegyzendő, hogy pl. három változó (a következőkben valószínűségi változó helyett röviden változót fogunk csak mondani) páronkinti függetlensége még nem biztosítja függetlenségüket a fenti értelemben. Hogy ebben a kérdésben félreértés ne lehessen, ha a (4) feltétel teljesül, az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változókat teljesen függetlennek fogjuk nevezni, ha viszont csak annyit teszünk fel, hogy páronkint, vagy pl. négyenként függetlenek, akkor ezt mindig hozzátesszük. Valószínűségi változók valamely végtelen sorozatát akkor fogjuk (teljesen) függetlennek nevezni, ha akárhogyan választva ki közülük véges számút, azok teljesen függetlenek.

Hogy a függetlenség fogalmát még jobban megvilágítsuk, nézzünk néhány példát. Osszuk fel a $(0, 1)$ intervallumot 2^n egyenlő részre, és ezen intervallumok mindegyikében legyen az x_n változó értéke állandó, mégpedig felváltva $+1$ és -1, magukban az osztáspontokban legyen x_n értéke 0. Az így nyert x_n függvényt n-ik *Rademacher*-féle függvénynek is szokás nevezni.[30] Ezeket a függvényeket képlettel is előállíthatjuk, a következőképpen:

$$x_n(t) = \operatorname{sgn}(\sin 2^n t \pi) \tag{5}$$

ahol sgn (z) a z valós szám előjelét jelző függvény, amely a kö-

[30] H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, Math. Ann. 87 (1922) 112—138.

vetkezőképpen van értelmezve: $\operatorname{sgn}(z) = +1$, ha $z > 0$, $\operatorname{sgn}(z) = -1$, ha $z < 0$ és $\operatorname{sgn}(0) = 0$. Az $x_n(t)$ változók teljesen függetlenek, amit beláthatunk, ha tekintetbe vesszük, hogy az $x_{n+1}(t)$ függvény úgy keletkezik, hogy minden intervallumot, amelyen $x_n(t)$ állandó, két egyenlő részre osztunk, amelyek közül az elsőn $x_{n+1} = +1$, a másodikon $x_{n+1} = -1$. Hasonlóképpen, ha x olyan változó, amely csak véges sok különböző értéket vesz fel, pl. az x_1, $x_2, \ldots, x_n$ értékeket veszi fel az $E_1, E_2, \ldots, E_n$ halmazokon, és az E_k halmazok mindegyikét m részhalmazra bontjuk, — legyenek ezek $E_{k1}, E_{k2}, \ldots, E_{km}$, — olymódon, hogy az $\frac{|E_{ki}|}{|E_k|}$ arány k-tól független legyen, és ha az y változót úgy definiáljuk, hogy annak értéke az E_{ki} halmazon y_i-vel legyen egyenlő minden k-ra, akkor ilyenmódon egy x-től független y valószínűségi változót konstruáltunk. Ezt a konstrukciót folytatva valószínűségi változók teljesen független sorozatát nyerjük. Természetesen ezek az egyszerű példák csak arra szolgálnak, hogy a függetlenség fogalmát megvilágítsák.

Egy $x = x(t)$ változónak értelmezhetjük a momentumait és centrális momentumait. Az $x = x(t)$ változó k-adik momentumán ($k = 1, 2, \ldots$) értjük az

$$M_k(x) = \int_0^1 x^k(t)\,dt \tag{6}$$

integrált, feltéve, hogy ez az integrál létezik (ami természetesen csak akkor kérdéses, ha $x(t)$ nem korlátos). Az első momentumot az x változó középértékének (vagy várható értékének) nevezzük és $M(x)$-szel vagy rövidség kedvéért $\bar{x}$-sal jelöljük. A momentumokat az eloszlásfüggvény segítségével is kifejezhetjük, mégpedig ha $F(y)$ jelenti az x változó eloszlásfüggvényét, könnyen belátható, hogy $M_k(x)$ kifejezhető az

$$M_k(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^k\,dF(y) \tag{7}$$

Stieltjes-integrállal. Az x változó k-adik centrális momentumán az $x' = x - \bar{x}$ változó k-adik közönséges momentumát értjük. A centrális momentumok közül különösen a második momentumot fogjuk gyakran használni, amelyet az x változó szórásnégyzetének nevezünk és $\sigma^2(x)$-szel jelölünk; ennek pozitív négyzetgyökét nevezzük az x változó szórásának, azaz az x változó $\sigma(x)$ szórását a következőképpen definiáljuk:

$$\sigma(x) = \left(\int_0^1 (x(t) - \bar{x})^2\,dt\right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (y - \bar{x})^2\,dF(y)\right)^{1/2} \tag{8}$$

Más szavakkal kifejezve, az x változó szórása alatt értjük x-nek a középértékétől, $\bar{x}$-tól való eltérésének négyzetének középértékének pozitív négyzetgyökét. A középérték lineáris operáció, azaz ha x_1 és x_2 valószínűségi változók, a és b valós számok, $M(ax_1 + bx_2) = aM(x_1) + bM(x_2)$. Meg kell említenünk a függetlenség két fontos következményét: ha az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók teljesen függetlenek, akkor szorzatuk középértéke egyenlő középértékeik szorzatával, azaz

$$(9) \qquad M(x_1 x_2 \ldots x_n) = M(x_1)\, M(x_2) \ldots M(x_n)$$

Ennek egyszerű következménye, hogy ha az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók páronkint függetlenek, akkor összegük szórásnégyzete egyenlő a tagok szórásnégyzetének összegével:

$$(10) \qquad \sigma^2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \sigma^2(x_1) + \sigma^2(x_2) + \ldots + \sigma^2(x_n).$$

A szórás azt méri, hogy mekkora ingadozásokat végez az x változó a középértéke körül; nyilvánvaló, hogy a szóráshoz képest igen nagy ingadozás igen valószínűtlen. Ezt a szemléletes tényt fejezi ki szabatos formában *Csebisev* híres egyenlőtlensége,[31] amely egyszerűsége ellenére a valószínűségszámítás igen jól használható segédeszköze. *Csebisev* egyenlőtlensége azt mondja ki, hogy annak a valószínűsége, hogy az $x - \bar{x}$ különbség abszolút értékben nagyobb legyen x szórásának λ-szorosánál, ahol λ tetszőleges pozitív szám, kisebb, mint $\frac{1}{\lambda^2}$. Ennek az egyenlőtlenségnek a bizonyítása rendkívül egyszerű. Jelentse E_λ azon t pontok halmazát, amelyekre $|x(t) - \bar{x}| > \lambda\sigma(x)$ akkor

$$(11) \qquad \sigma^2(x) = \int_0^1 (x(t) - \bar{x})^2\, dt \geqq \int_{E_\lambda} (x(t) - \bar{x})^2\, dt \geqq \lambda^2 \sigma^2(x)\, |E_\lambda|,$$

azaz

$$(12) \qquad V(|x - \bar{x}| > \lambda\sigma(x)) < \frac{1}{\lambda^2},$$

ami *Csebisev* egyenlőtlensége.

A konvergencia különböző definíciói.

A valószínűségszámításban valószínűségi változók konvergenciájának különböző definiciói használatosak. Ezek közül különösen kettővel fogunk foglalkozni: a gyenge és az erős konvergencia fogalmával. Az $x_1, x_2, \ldots$ valószínűségi változók sorozatát

[31] O szrednüh velicsinah, MSZ 2 (1867).

az x változóhoz gyengén konvergensnek nevezzük, ha akárhogyan adunk is meg egy pozitív ε számot, $V(|x_n - x| > \varepsilon) \to 0$, ha $n \to \infty$. A konvergenciának ezt a faját (valószínűségi) mértékben való konvergenciának is szokás nevezni. A mértékben való konvergencia fogalma a valós függvénytanban is használatos; a valós függvénytan módszereivel könnyen bebizonyítható, hogy a gyenge konvergenciára érvényes a *Cauchy*-féle konvergencia kritérium: annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az x_n változók gyengén konvergáljanak valamilyen x változóhoz az, hogy $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} V(|x_n - x_m| > \varepsilon) = 0$ minden $\varepsilon > 0$-ra fennálljon. Abból, hogy az x_n változók konvergálnak x-hez, általában még nem következik, hogy $M(x_n)$ is konvergál $M(x)$-hez, ehhez további megszorítások szükségesek (pl. elegendő, hogy az x_n változók egyenletesen korlátosak legyenek). Ezzel kapcsolatban érdekes megjegyezni, hogy viszont az ú. n. mediánok gyenge konvergencia esetén is konvergálnak. Egy x változó egy mediánján olyan m valós számot értünk, amelyre $F(y) \leq \frac{1}{2}$, ha $y \leq m$ és $F(y) > \frac{1}{2}$, ha $y > m$, ha $F(y)$ jelenti x eloszlásfüggvényét. Nyilvánvaló, hogy egy x változó mediánja nincsen általában egyértelműen meghatározva, x mediánjainak összessége általában egy teljes intervallumot tölt ki. Mármost könnyen belátható, hogy ha az x_n változók gyengén konvergálnak x-hez és m_n konvergál egy m számhoz, akkor m az x változó egy mediánja. Az x_n változók sorozatát gyengén stabilisnek nevezzük, ha létezik olyan c_n számsorozat, hogy $x_n - c_n$ gyengén 0-hoz konvergál. Amennyiben $c_n = M(x_n)$ és $x_n - c_n$ gyengén 0-hoz tart, azt mondjuk, hogy az x_n sorozat (gyengén) normálisan stabilis. Könnyen belátható, hogy egy egyenletesen korlátos x_n sorozat, ha egyáltalán stabilis, akkor mindig normálisan stabilis: általában, ha az x_n sorozat stabilis, akkor c_n helyett x_n valamely m_n mediánját választva, $x_n - m_n$ is gyengén 0-hoz fog konvergálni. A gyenge konvergencia fogalma lényegében *Bernoulli*-tól származik, modern megfogalmazása és tulajdonságainak alapos vizsgálata a valószínűségszámítás szempontjából *Szlucki* érdeme.[32]

A másik már említett, igen gyakran használatos konvergenciafogalom az erős konvergencia. Az x_n változók sorozatát erősen konvergensnek nevezzük az x változóhoz, ha $V(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x) = 1$, azaz, ha majdnem minden t értékre $x_n(t)$ konvergál $x(t)$-hez,

[32] Über stochastische Asymptoten und Grenzwerte, Metron 3 (1925).

másszóval ha azon t értékek halmaza, amelyekre $x_n(t)$ nem konvergál $x(t)$-hez, zérus mértékű. Könnyű belátni, hogy az erős konvergencia valóban erősebb a gyenge konvergenciánál, azaz, ha x_n erősen konvergál x-hez, akkor gyengén is konvergál, fordítva azonban nem. Hogy az első állítást belássuk, jelentse e_n azon t pontok halmazát, amelyekre az

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon, \ |x_{n+1}(t) - x(t)| < \varepsilon,$$
$$\ldots, |x_{n+k}(t) - x(t)| < \varepsilon, \ldots$$

egyenlőtlenségek egyidejűleg fennállnak, ahol ε tetszőlegesen választott pozitív szám. Nyilvánvaló, hogy e_n tartalmazza e_{n-1}-et, továbbá, hogy majdnem minden t valamelyik e_n-hez (és természetesen attól kezdve minden e_{n+k}-hoz) hozzátartozik, feltéve, hogy x_n erősen tart x-hez. Így tehát $\lim\limits_{n\to\infty} |e_n| = 1$. Jelentse továbbá E_n azon t pontok halmazát, amelyekre $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$ fennáll. Nyilvánvaló, hogy E_n tartalmazza e_n-t és így $\lim\limits_{n\to\infty} |E_n| = 1$, amiből már következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} V(|x_n(t) - x(t)| > \varepsilon) = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - |E_n|) = 0$, vagyis ezzel bebizonyítottuk, hogy az erős konvergenciából következik a gyenge konvergencia; arra, hogy az ellenkező állítás nem áll fenn, könnyű példát találni. Például definiáljuk az x_n változókat a következőképpen: keressük meg azt a két négyzetszámot, amely közé n esik, legyen pl. $k^2 \leq n < (k+1)^2$, azaz $n = k^2 + r$, ahol $0 \leq r \leq 2k$ és legyen $x_n(t) = 1$, ha $\frac{r}{2k+1} \leq t \leq \frac{r+1}{2k+1}$ egyébként legyen $x_n(t) = 0$. Nyilvánvaló, hogy az így definiált x_n sorozat gyengén konvergál 0-hoz, hiszen $V(x_n > 0) < \frac{1}{\sqrt{n}}$; ezzel szemben minden t-re $x_n(t)$, végtelen sok n értékre egyenlő 0-val és végtelen sok n-re 1-gyel, vagyis az $x_n(t)$ számsorozat t egyetlen értékére sem konvergál. A gyenge és erős konvergencia közötti különbséget legjobban úgy húzhatjuk alá, ha rámutatunk, hogy az erős konvergencia azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy $|x_n(t) - x(t)| > \varepsilon$ egyenlőtlenségek egyidejűleg $n = N, N+1, N+2, \ldots$-re fennálljanak, egyhez konvergáljon, ha N végtelenhez tart, vagyis az erős konvergencia egyenletes gyenge konvergenciát jelent. A fenti példából láttuk, hogy lehetséges, hogy az $x_n(t)$ változók gyengén konvergáljanak 0-hoz, de ugyanakkor az $x_n(t)$ számsorozat sehol se konvergáljon. *Kolmogorov* híres 0-vagy-1 törvénye[33] erre az esetre

[33] A. Kolmogoroff, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse d. Math. u. Grenzgebiete II. 3 Berlin, Springer 1933.

alkalmazva azt mondja ki, hogy amennyiben az x_n változók *függetlenek,* akkor azon t pontok halmaza, amelyekre $x_n(t)$ konvergál, vagy 0-mértékű vagy 1-mértékű halmazt alkotnak, azaz független változók egy sorozata vagy majdnem mindenütt konvergál, vagy pedig majdnem mindenütt divergál. Ezt a következőképpen bizonyíthatjuk be: jelentse $E_{n,k,m}$ azon t pontok halmazát, amelyekre $p=1,2,\ldots,k$-ra egyidejűleg fennállnak az $|x_{n+p}(t)-x_n(t)|<\frac{1}{m}$ egyenlőtlenségek. Ha valamely t értékre az $x_n(t)$ számsorozat konvergál, akkor minden m pozitív egész számhoz van olyan n pozitív egész szám, hogy t minden k-ra hozzátartozik az $E_{n,k,m}$ halmazhoz. Ezt fejezi ki *Kolmogorov* ismert képlete,[34] amely szerint ha E jelöli azon t pontok halmazát, amelyekre $x_n(t)$ valamilyen határértékhez konvergál,

$$E=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}E_{n,k,m}. \tag{12}$$

Könnyü belátni, hogy ugyanez a képlet fennáll akkor is, ha k, n és m nem az összes pozitív egész számokon, hanem csak pozitív egész számok valamely végtelen részsorozatain futnak végig. Jelentse $G_{n,2k,m}$ az $E_{n,k,m}$ és $E_{n+k,k,m}$ halmazok közös részét, azaz azon t pontok halmazát, amelyekre egyidejűleg fennállnak az

$$|x_{n+p}(t)-x_n(t)|<\frac{1}{m};\qquad p=1,2,\ldots,k \tag{13}$$

és

$$|x_{n+k+p}(t)-x_{n+k}(t)|<\frac{1}{m};\quad p=1,2,\ldots,k \tag{14}$$

egyenlőtlenségek. Tekintettel az x_n változók függetlenségére, könnyen belátható, hogy $|G_{n,2k,m}|=|E_{n,k,m}|\cdot|E_{n+k,k,m}|$. Másrészt nyilvánvaló, hogy a $G_{n,2k,m}$ halmaz tartalmazza az $E_{n,2k,2m}$ halmazt, hiszen ha

$$|x_{n+p}(t)-x_n(t)|<\frac{1}{2m};\quad p=1,2,\ldots,2k,$$

akkor (13) nyilván teljesül, és (14) is teljesül, tekintetbe véve, hogy

$$|x_{n+k+p}(t)-x_{n+k}|<|x_{n+k+p}(t)-x_n(t)|+|x_{n+k}(t)-$$
$$-x_n(t)|<\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}=\frac{1}{m},\ \text{ha}\ p=1,2,\ldots,k.$$

Ezért

[34] Lásd [33]

(16) $$|E_{n,\,2k,\,2m}| \leqq |E_{n,\,k,\,m}| \cdot |E_{n+k,\,k,\,m}|.$$

Mármost egymásután elvégezve a $k \to \infty$, $n \to \infty$ és $m \to \infty$ határátmeneteket, következik (16)-ból és (12)-ből, hogy

(17) $$|E| \leqq |E|^2.$$

Mivel $|E| \leqq 1$, ez csak úgy lehetséges, ha $|E| = 0$ vagy ha $|E| = 1$. Itt felhasználtuk azt a tételt, hogy ha az F_n mérhető halmazok monoton növekvő (vagy csökkenő) sorozatot alkotnak, akkor $\lim F_n = F$ is mérhető halmaz és $\lim |F_n| = |F|$. (Ha $F_n \subset F_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, akkor $\lim F_n$ mindazon pontok összességét jelenti, amelyek valamelyik F_n halmazhoz tartoznak, ha $F_n \supset F_{n+1}$ $n = 1, 2, \ldots$ akkor $\lim F_n$ mindazon pontok halmazát jelenti, amelyek minden F_n-hez hozzátartoznak). Hasonlóképpen bizonyítható be a 0-vagy-1 törvény egy másik speciális esete, mely szerint, ha $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ független valószínűségi változók, a

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

sor konvergenciájának valószínűsége vagy 0, vagy 1.

Szükségünk lesz a következőkben az erős konvergencia egy egyszerű elégséges feltételére. Jelentse E_{nm} azon t pontok halmazát, amelyekre $|x_n(t) - x(t)| > \frac{1}{m}$; ha a

(18) $$\sum_{n=1}^{\infty} |E_{nm}|$$

sor m minden pozitív egész értékére konvergál, akkor $x_n(t)$ erősen konvergál $x(t)$-hez. Ezt a következőképpen láthatjuk be: ha egy t értékre $x_n(t)$ nem konvergál $x(t)$-hez, akkor van olyan m, hogy $|x_n(t) - x(t)| > \frac{1}{m}$ végtelen sok n-re, hiszen ha minden m-re véges sok n kivételével, azaz elég nagy n-től kezdve fennáll $|x_n(t) - x(t)| \leqq \frac{1}{m}$, akkor $x_n(t)$ konvergál $x(t)$-hez. Jelöljük E_m-mel azon t pontok halmazát, amelyekre $|x_n(t) - x(t)| > \frac{1}{m}$ végtelen sok n-re teljesül; ha E jelöli azon pontok halmazát, amelyekre $x_n(t)$ nem konvergál $x(t)$-hez, akkor tehát E része a $\sum_{m=1}^{\infty} E_m$ halmaznak. Másrészt E_m része a $\sum_{n=N}^{\infty} E_{nm}$ halmaznak minden N-re, és így

(19) $$|E_m| \leqq \sum_{n=N}^{\infty} |E_{nm}|,$$

ahol a jobboldalon álló számok 0-hoz tartanak, ha $N \to \infty$. Vagyis m minden értékére E_m 0-mértékű halmaz. De viszont tudjuk, hogy megszámlálható sok 0 mértékű halmaz összege szintén 0 mértékű, és így E is 0-mértékű, vagyis $x_n(t)$ valóban erősen konvergál $x(t)$-hez.

Az erős konvergenciával kapcsolatban is bevezetjük a stabilitás fogalmát. Az $x_n(t)$ változók sorozatát erősen stabilisnak nevezzük, ha van olyan c_n számsorozat, hogy $x_n(t) - c_n$ erősen tart 0-hoz. Az erős stabilitás normális, ha c_n-nek az x_n változó középértékét is választhatjuk.

Végül bevezetjük az ekvivalens sorozatok fogalmát. Valószínűségi változók két sorozatát — jelöljük őket x_n-nel és y_n-nel — ekvivalensnek nevezünk, ha a

$$\sum_{n=1}^{\infty} V(x_n \neq y_n) \tag{20}$$

sor konvergens. Az erős konvergenciára fent adott kritériumból azonnal következik, hogy ha $x_n(t)$ erősen konvergál $x(t)$-hez és az $y_n(t)$ sorozat ekvivalens $x_n(t)$-vel, akkor $y_n(t)$ is erősen konvergál $x(t)$-hez. Ehhez ugyanis csak azt kell kimutatni, hogy $x_n(t) - y_n(t)$, erősen konvergál 0-hoz, és ez (20) alapján a fenti kritériumból azonnal következik. Az is könnyen belátható, hogy ha az x_n és y_n sorozatok ekvivalensek, és x_n gyengén konvergál x-hez, akkor y_n is gyengén konvergál x-hez. Ugyanis az x_n és y_n sorozatok ekvivalenciájából, mint láttuk, következik, hogy $x_n - y_n$ erősen konvergál 0-hoz, akkor tehát $x_n - y_n$ gyengén is konvergál 0-hoz, és mivel $x_n - x$ is gyengén 0-hoz konvergál, tehát $y_n - x = (y_n - x_n) + (x_n - x)$ is gyengén konvergál 0-hoz. Az ekvivalens sorozatok fogalmát *Khincsin* vezette be.

Megemlítjük még, hogy az erős konvergencia fogalmát először *Borel*[35] és *Cantelli*[36] vezették be.

Miután az erős és gyenge konvergencia fogalmát értelmeztük valószínűségi változók sorozataira, semmi akadálya sincsen, hogy ugyanezeket a fogalmakat valószínűségi változókból álló végtelen sorokra is átvigyük: egy ilyen sor erős, ill. gyenge konvergenciáján természetesen a részletösszegek sorozatának erős, ill. gyenge konvergenciáját értjük.

[35] E. Borel, Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, Rend. Palermo 27 (1909) 247—271.

[36] F. P. Cantelli, Sulla legge dei grandi numeri, Mem. Acad. Lincei, 11 (1916).

A nagy számok gyenge törvényei.

A valószínűségi változók tetszőleges sorozatának gyenge konvergenciájának szükséges és elégséges feltételeit *Bernstein, Kolmogorov* és *Gnedenko* adták meg.[37] Ezt a kérdést teljes általánosságban nem fogjuk itt tárgyalni, hanem csak az alkalmazások szempontjából legfontosabb és egyben legrégibb idevágó problémával, a nagy számok (gyenge) törvényével fogunk foglalkozni. A nagy számok törvényének legegyszerűbb esete még *Bernoulli*-tól származik. Bernoulli a következő tételt bizonyította be: ha egy E esemény bekövetkezésének valószínűsége p, és n kísérletet végzünk, amelyek mindegyikének eredménye az E esemény bekövetkezésében vagy nem-bekövetkezésében áll, továbbá, ha feltesszük, hogy az egyes kísérletek eredményei egymástól függetlenek, akkor ha k_n-nel jelöljük az első n kísérlet közül azok számát, amelyeknél az E esemény bekövetkezett és $f_n = \frac{k_n}{n}$, azaz f_n jelenti az E esemény gyakoriságát az első n kísérlet során, akkor f_n gyengén konvergál p-hez. Rendeljük hozzá az n-edik kísérlethez az x_n valószínűségi változót, amelyet úgy értelmezünk, hogy $x_n = +1$, ha az n-edik kísérletnél E bekövetkezett és $x_n = 0$, ha E nem következett be $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, akkor nyilván $k_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, azaz *Bernoulli* tétele úgy is megfogalmazható, hogy az

$$f_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \tag{21}$$

valószínűségi változó gyengén konvergál p-hez. Mivel $M(x_n) = p$ és így $M(f_n) = p$, ezt úgy is kifejezhetjük, hogy az f_n változók sorozata gyengén normálisan stabilis. A kísérletek függetlenségének feltevése nyilván azt jelenti, hogy az x_n változók függetlenek (teljesen függetlenek). Az újabb vizsgálatok megmutatták, hogy *Bernoulli* tétele messzemenően általánosítható és nemcsak a fenti speciális x_n változókra érvényes, hanem független változók igen általános sorozataira is igaz az, hogy a (21) által értelmezett f_n változók sorozata gyengén stabilis, sőt a függetlenség feltevését is enyhíteni lehet. Emeljük ki a *Bernoulli*-féle tételben szereplő x_n változók egy speciális tulajdonságát: az x_n változók mindegyike ugyanazon eloszlásfüggvénnyel bír, hiszen n minden értékére x_n a 0 és 1 értékeket veszi csak fel, $1-p$ és p valószínűségekkel. Ez a feltevés különleges érdekességgel bír, hiszen ez a helyzet mindig,

[37] a) S. Bernstein, O. zakone bolsih csiszel, Kharkov, Zap. Matemat. 16 (1918) 82—87. b) A. Kolmogoroff, Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen, Math. Ann. 99 (1928) 309—319. Lásd még u. o. 102 (1929) 484—488. c) B. V. Gnedenko, Predelnüe zakoni dlja szumm nyezaviszimüh szlucsainüh velicsin UMN 10 (1944) 115—165.

amikor ugyanannak a kísérletnek az ismételt végrehajtásáról és a kísérletek eredményétől függő valószínűségi változókról van szó. A nagy számok gyenge törvényei gyüjtőnév azokat a tételeket foglalja magába, amelyek az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ valószínűségi változók számtani közepeinek gyenge konvergenciájára vonatkoznak. A következőkben néhány idevágó fontos tételt mutatunk be. Nem törekszünk arra, hogy a lehető legáltalánosabb tételeket mondjuk ki, hanem csak arra, hogy néhány, elsősorban *Khincsin*től és *Kolmogorov*tól származó tételt mutassunk be, amelyeken az általuk bevezetett új módszereket megismerhetjük.

Induljunk ki a nagy számok törvényeinek *Csebisev* és *Markov*tól[38] származó klasszikus esetéből. Feltesszük, hogy az x_n változók középértéke és szórása véges. Az általánosság megszorítása nélkül a továbbiakban feltesszük, hogy $M(x_n) = 0, n = 1, 2, 3, \ldots$, ugyanis a tárgyalandó tételekben mindig normális stabilitásról lesz szó és az x_n változók helyett az $x'_n = x_n - M(x_n)$ változókat bevezetve feltevésünk mindig teljesül. Legyen $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, legyen továbbá $\sigma^2(x_n) = M(x_n^2) = b_n$ és $\sigma^2(S_n) = M(S_n^2) = B_n$. *Markov* tétele, amelynek bizonyítása teljesen *Csebisev* egyenlőtlenségén alapszik, a következőképen szól: Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{B_n}{n^2} = 0$, akkor az $f_n = \frac{S_n}{n}$ változók gyengén stabilisek. Ezt a következőképpen láthatjuk be: Mivel $\sigma^2(f_n) = \frac{B_n}{n^2}$, a *Csebisev* egyenlőtlenség szerint

$$(22) \qquad V\left(|f_n| > \lambda \frac{\sqrt{B_n}}{n}\right) < \frac{1}{\lambda^2}.$$

Legyen most ε tetszőleges pozitív szám, és válasszuk λ-t úgy, hogy $\varepsilon = \lambda \frac{\sqrt{B_n}}{n}$ legyen, azaz legyen $\lambda = \frac{\varepsilon n}{\sqrt{B_n}}$, akkor (22)-ből

$$(23) \qquad V(|f_n| > \varepsilon) < \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{B_n}{n^2}$$

Mivel feltettük, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{B_n}{n^2} = 0$, állításunk azonnal következik. Könnyen beláthatjuk azt is, hogy abban az esetben, amikor $|f_n|$ egyenletesen korlátos, a *Markov*-féle feltétel nemcsak elegendő, hanem szükséges is. Ugyanis legyen általában $x(t)$ egy korlátos valószínűségi változó, $|x| \leq M$, legyen $M(x) = 0$ és jelentse E_λ azon t pontok halmazát, amelyekre $|x(t)| > \lambda\sigma$ $(\sigma = \sigma(x))$. Akkor nyilván

[38] A. A. Markoff, Iszcsiszlenie verojatnosztei, Moszkva, 1924 (4. kiad.).

(24) $$\sigma^2 = \int_0^1 x^2\, dt \leq M^2\, |E_\lambda| + \lambda^2 \sigma^2 (1 - |E_\lambda|)$$

és így

(25) $$|E_\lambda| \geq \frac{\sigma^2 - \lambda^2 \sigma^2}{M^2 - \lambda^2 \sigma^2}.$$

Alkalmazzuk ezt a mi esetünkre: tegyük fel, hogy $|f_n| \leq M$ $(n = 1, 2, \ldots,)$ kapjuk, hogy

(26) $$V(|f_n| > \varepsilon) \geq \frac{\frac{B_n}{n^2} - \varepsilon^2}{M^2 - \varepsilon^2},$$

ha mármost $\frac{B_n}{n^2}$ nem tart 0-hoz, megadható az egész számoknak olyan n_k végtelen részsorozata, hogy $\frac{B_{n_k}}{n_k^2} \geq a > 0$; legyen $\varepsilon^2 = \frac{a}{2}$ (26)-ból nyerjük, hogy

(27) $$V(|f_n| > \varepsilon) \geq \frac{a}{2M^2},$$

f_n nem tart gyengén 0-hoz, amivel állításunkat igazoltuk. A *Markov* tétel bizonyításánál az x_n változók függetlenségére vonatkozólag nem tettünk fel semmit, de a $\lim \frac{B_n}{n^2} = 0$ feltevést általában még korlátos változók esetében is csak az x_n változók függetlenségére (vagy legalább is gyenge függőségére) vonatkozó feltevésből tudjuk kimutatni. Így például ha az x_n változók egyenletesen korlátosak, $|x_n| \leq M$ és páronként függetlenek, akkor a *Markov*-féle feltétel teljesül, ugyanis ebben az esetben (10) alapján

(28) $$\frac{B_n}{n^2} = \frac{\sigma^2(S_n)}{n^2} = \frac{\sigma^2(x_1) + \sigma^2(x_2) + \ldots + \sigma^2(x_n)}{n^2} \leq \frac{M^2}{n}.$$

Hasonlóképpen teljesül a *Markov*-féle feltétel, ha azt tesszük fel, hogy x_n és x_m közötti függőség $n - m$ növekedtével egyre gyengébbé válik. Tegyük fel például, *Bernsteint* követve,[39] R_{nm}-mel jelölve az x_n és x_m változók korrelációs együtthatóját, vagyis az

(29) $$R_{nm} = \frac{M(x_n x_m)}{\sigma(x_n)\, \sigma(x_m)}$$

jelölést bevezetve, hogy $|R_{nm}| \leq c(|n - m|)$, ahol a $c(r)$ pozitív függvény 0-hoz tart, ha $r \to \infty$, ebben az esetben (újból feltéve, hogy az x_n változók egyenletesen korlátosak),

[39] S. Bernstein, Teoria verojatnosztei, Moszkva—Leningrád, GTTI (1946) 4. kiadás. 1—556. Lásd 193. o.

$$(30) \qquad \frac{B_n}{n^2} \leqq \frac{M^2}{n} + 2\frac{\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\,c(r)}{n^2} \leqq \frac{M^2}{n} + 2\frac{\sum_{r=1}^{n-1}c(r)}{n},$$

vagyis tekintve, hogy $c(r)$-rel együtt annak számtani közepe is 0-hoz tart, nyerjük, hogy ebben az esetben is teljesül a *Markov*-féle feltétel.

Ha ránézünk (28)-ra, azonnal látjuk, hogy a *Markov*-féle feltétel teljesüléséhez nem szükséges, hogy az x_n változók egyenletesen korlátosak legyenek, elegendő (a páronkénti függetlenséget feltéve) az is, ha szórásaik egyenletesen korlátosak. Abban az említett esetben, amikor az x_n változók ugyanazon $F(y)$ közös eloszlásfüggvénnyel bírnak, ez a feltétel automatikusan teljesül, ha $F(y)$ második momentuma véges. Ilyenmódon a következő tételt nyerjük: *Ha az $x_1, x_2, \ldots$ valószínűségi változók páronként függetlenek, mind ugyanazon $F(y)$ eloszlásfüggvénnyel bírnak, $M(x_n) = 0$ és $M(x_n^2) = \sigma^2$ véges, akkor érvényes a nagy számok gyenge törvénye, azaz $f_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ gyengén tart 0-hoz. Khincsin* kimutatta,[40] hogy ebben a tételben a második momentum létezésének feltételezése mellőzhető, azaz bebizonyította, hogy igaz a következő tétel is: *Ha az $x_1, x_2, \ldots$ változók mind ugyanazon $F(y)$ eloszlásfüggvénnyel bírnak, és az x_i változók (közös) középértéke $M(x_i) = a$ létezik (azaz, ha az x_n változók integrálhatók), továbbá, ha az x_n változók páronként függetlenek, akkor érvényes rájuk a nagy számok gyenge törvénye, azaz $f_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ gyengén konvergál a-hoz.* Megjegyzendő, hogy az x_n változók integrálhatósága itt *Lebesgue* értelmében értendő, azaz abszolút integrálhatóságot jelent, azaz ez a feltevés nemcsak azt jelenti, hogy az

$$(31) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} y\,dF(y),$$

hanem, hogy az

$$(32) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |y|\,dF(y)$$

integrál is létezik, vagy másként kifejezve, azt jelenti, hogy létezik a

$$(33) \qquad \lim_{\substack{A\to\infty \\ B\to\infty}} \int_{-A}^{+B} y\,dF(y) = a$$

[40] Sur la loi des grands nombres, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 188 (1929) 477—479.

határérték, ahol A és B egymástól függetlenül tartanak végtelenhez. Hogy a bizonyítást valamivel egyszerűbbé és áttekinthetőbbé tegyük, szorítkozzunk arra az esetre, amikor az x_n változók eloszlása szimmetrikus, azaz tegyük fel, hogy $F(-y) = V(x_n < -y) = V(x_n > +y) = 1 - F(y)$; az általános esetben a bizonyítás lényegében ugyanúgy történik. Definiáljuk az y_n változót a következőképpen: legyen $y_n = x_n$ ha $|x_n| \leq n$ és legyen egyébként $y_n = 0$. Először kimutattuk, hogy az x_n és y_n sorozatok ekvivalensek. Ez úgy látható be, hogy

(34) $$p_n = V(x_n \neq y_n) = 2(1 - F(n)) = 2\int_n^\infty dF(y)$$

és így

(35) $$\sum_{n=1}^\infty p_n = 2\sum_{k=1}^\infty k\int_k^{k+1} dF(y) \leq 2\int_0^\infty y\,dF(y),$$

vagyis $\sum_{n=1}^\infty p_n$ konvergens, tehát x_n és y_n ekvivalens sorozatok. Az ekvivalens sorozatokra vonatkozó tétel szerint elegendő tehát bebizonyítani, hogy az y_n sorozatra áll a nagy számok gyenge törvénye. Először is megjegyezzük, hogy az y_n változók is páronként függetlenek, ez y_n definiciójából és az x_n változók függetlenségéből könnyen következik. Másodszor kimutatjuk, hogy az y_n változókra alkalmazható a *Markov*-féle kritérium. Legyen $T_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ és legyen

(36) $$B_n = M(T_n^2) = M(y_1^2) + M(y_2^2) + \ldots + M(y_n^2)$$

T_n szórása (itt felhasználtuk azt, hogy az x_n változók eloszlásának szimmetrikus volta folytán az y_n változók eloszlása is szimmetrikus és így $M(y_n) = 0$, továbbá az y_n változók páronkinti függetlenségét). Csak azt kell tehát *Khincsin* tételének bizonyításához kimutatnunk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{B_n}{n^2} = 0$. Ezt a következőképpen láthatjuk be: Egyszerű számolással nyerjük, hogy:

(37) $$B_n = 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^k y^2\,dF(y) = 2\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\int_k^{k+1} y^2\,dF(y) \leq$$
$$\leq 2\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,(k+1)\int_k^{k+1} y\,dF(y).$$

(37)-ből könnyen következik, hogy

(38) $$B_n \leq 2nN\int_0^N y\,dF(y) + 2n^2\int_N^\infty y\,dF(y),$$

ahol $N < n$ tetszőleges pozitív egész szám. Rögzítsük N-et és tartson n végtelenhez, (38)-ból nyerjük, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \sup \frac{B_n}{n^2} \leq 2 \int_N^{\infty} y\, dF(y). \tag{39}$$

Mivel N tetszőlegesen nagynak választható, következik (39)-ből, hogy $\lim\limits_{n \to \infty} \sup \frac{B_n}{n^2}$ tetszőleges kis pozitív számnál kisebbé tehető, vagyis $\lim\limits_{n \to \infty} \sup \frac{B_n}{n^2} = 0$ és így $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{B_n}{n^2} = 0$ (tekintve, hogy B_n pozitív), amivel *Khincsin* tételét bebizonyítottuk.

Kolmogorov megmutatta,[41] hogy még az $x_n(t)$ függvények középértékének létezését, tehát $x_n(t)$ integrálhatóságát sem kell kikötni, ehelyett elegendő a $\lim\limits_{n \to \infty} n \,.\, V\,(\,|x_k| \geqq n) = 0$ feltétel, amely viszont nemcsak elégséges, hanem szükséges is a nagy számok (gyenge) törvényének érvényességéhez. *Kolmogorov* tétele magábanfoglalja *Khincsin* tételét, ugyanis, ha $M(x_k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\, dF(y)$ létezik, akkor

$$n \,.\, V(|x_k| \geq n) = 2n \int_n^{\infty} dF(y) \leq 2 \int_n^{\infty} y\, dF(y) \to 0, \tag{40}$$

ha $n \to \infty$, azaz *Kolmogorov* feltétele teljesül. *Kolmogorov* tételének bizonyításának alapgondolata hasonlít *Khincsin* tételének fent közölt bizonyításához, és így azt az olvasóra bízzuk. Megemlítjük még, hogy *Kolmogorov* arra az esetre is megadta a nagy számok gyenge törvényének érvényességének szükséges és elegendő feltételét, amikor az x_n változókról nem tételezzük fel, hogy ugyanazon eloszlásfüggvénnyel bírnak, csak azt, hogy páronként függetlenek, azonban ennek ismertetése túlságosan messze vezetne.

Az összes eddig tárgyalt esetekben az x_n valószínűségi változók számtani közepei gyengén konvergáltak egy konstanshoz (illetőleg annak kivonásával 0-hoz). Ez jellemző általában a független, ill. majdnem független valószínűségi változók sorozataira. Mielőtt továbbmennénk és áttérnénk a nagy számok erős törvényeinek ismertetésére, egy példát mutatunk olyan esetre, amelyben a függetlenség helyett teljesen más jellegű feltevésből indulunk ki. Ez az eset az ú. n. stacionér sorozatok esete. A stacionér sorozatok fogalmát *Khincsin* vezette be,[42] és az ő nevéhez fűződik ezen sorozatok tulajdonságainak a tisztázása is. Ebben az esetben is ér-

[41] Lásd [37]

[42] A. Khintchine, Über stazionäre Reihen zufälliger Variablen MSZ 40 (1933) 124—128.

vényes a nagy számok törvénye, de az a változó, amelyhez a számtani közép gyengén konvergál, ebben az esetben már nem konstans, és így a használt módszerek is gyökeresen különböznek. A két eset közötti alapvető különbség okaira vonatkozólag az ergodikus elmélet ad felvilágosítást, azonban az ergodikus elmélettel való kapcsolatra itt nincs módunkban kitérni.

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ valószínűségi változók sorozatát *Khincsin* stacionérnek nevezi, ha a következő feltételek teljesülnek: az x_n változók mindegyikének ugyanaz a középértéke, $M(x_n) = a$, ugyanaz a szórása, $M((x_n - a)^2) = b^2$, továbbá bármely két változó korrelációs együtthatója csak indexeik különbségének abszolút értékétől függ:

$$R_{nm} = \frac{M((x_n - a)(x_m - a))}{b^2} = R(|n-m|) \tag{41}$$

A stacionér sorozatok elméletének igen nagy jelentősége van a fizika több ágában, különösen a statisztikus mechanikában. A fent definiált stacionér sorozatokra, amint ezt *Khincsin* kimutatta, érvényes a nagy számok gyenge törvénye. *Khincsin* elméletét általánosította és kiterjesztette stacionér változók folytonos seregére is, megalkotta az ú. n. stacionér stochasztikus folyamatok elméletét, amelyekről a későbbiekben még szó lesz. Most szorítkozzunk *Khincsin* tételének bebizonyítására. Legyen $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ valószínűségi változók egy stacionér sorozata, az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $M(x_n) = 0$ és $M(x_n^2) = 1$. Legyen

$$f_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \tag{42}$$

Annak bebizonyításához, hogy f_n gyengén konvergál valamely f valószínűségi változóhoz, csak azt kell kimutatnunk, hogy

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} M[(f_n - f_m)^2] = 0, \tag{43}$$

ugyanis ebből a *Csebisev*-egyenlőtlenség segítségével következik, hogy

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} V(|f_n - f_m| > \varepsilon) = 0 \tag{44}$$

(ha $\varepsilon > 0$) és ebből a *Cauchy*-féle kritérium felhasználásával állításunk már következik. (43) bizonyításához bizonyos mélyebb segédeszközökre is szükségünk lesz. Legyen $r_0 = 1$, $r_k = R(|k|)$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$), ahol $R(k) = M(x_n x_{n+k})$ az x_n és x_{n+k} változók korrelációs együtthatója, amely feltevéseink értelmében csak k-tól függ. Mivel

$$(45) \qquad M\left[\left(\sum_{k=1}^{n} x_k u_k\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{i-j}\, u_i\, u_j\,,$$

tehát a (43) jobboldalán álló quadratikus alak pozitív definit, vagyis az r_k számsorozat pozitív definit. Ismeretes, hogy egy r_k pozitív definit számsorozat mindig előállítható

$$(46) \qquad r_k = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos k\, t\; d\, G(t)$$

alakban, ahol $G(t)$ egy monoton nem csökkenő függvény. (L. G. Herglotz, Leipz. Berichte 63 (1911), 501—511.) Ezt nevezik a korrelációs együtthatók spektrál-előállításának. Legyen

$$(47) \qquad U_n = n + 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\, r_k\,,$$

egyszerű számítással beláthatjuk, hogy

$$(48) \qquad M_{n,n+q} = M\left[(f_n - f_{n+q})^2\right] = \left(\frac{q}{n+q}\right)\frac{U_n}{n^2} + \left(\frac{q}{n+q}\right)^2 \frac{U_q}{q^2} - \\ - \frac{q}{n(n+q)^2}\left(U_{n+q} - U_q\right).$$

Mivel (47) szerint $\frac{U_n}{n}$ az $r_0 + 2r_1 + 2r_2 + \ldots$ sor n—1-edik számtani közepe, *Fejér* jólismert képlete szerint[43]

$$(49) \qquad U_n = \int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 d\, G(t).$$

Legyen most τ a $G(t)$ függvény ugrása a 0 helyen, $\tau = G(+0)$ — — $G(-0)$, továbbá legyen $G_1(t) = G(-0)$, ha $t < 0$ és $G_1(t) = G(+0)$, ha $t \geqq 0$, akkor $G_2(t) = G(t) - G_1(t)$ a 0-helyen folytonos lesz, és így

$$(50) \qquad \varepsilon_n = \frac{U_n}{n^2} - \tau = \frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 d\, G_2(t) \to 0$$

[43] L. Fejér, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, 131 (1900) 984—987.

ha $n\to\infty$, azaz $\lim\frac{U_n}{n^2}=\tau$. Hasonlóképpen beláthatjuk, hogy ha

(51)
$$\delta_{n,n+q}=U_{n+q}-U_q-\tau n(n+2q)=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sin(n+2q)\frac{t}{2}\sin n\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dG_2(t),$$

akkor

(52)
$$|\delta_{n,n+q}|\leq n(n+2q)\int_{-\frac{1}{\sqrt{q}}}^{+\frac{1}{\sqrt{q}}}dG_2(t)+Cq=n(n+2q)\triangle_q+Cq,$$

ahol $\lim\limits_{q\to\infty}\triangle_q=0$ és C pozitív (n-től és q-tól független) konstans. Behelyettesítve (48)-ba nyerjük, hogy

(53)
$$M_{n,\,n+q}\leq\left(\frac{q}{n+q}\right)\varepsilon_n+\left(\frac{q}{n+q}\right)^2\varepsilon_q+\frac{q(n+2q)}{(n+q)^2}\triangle_q+\frac{C}{n}\left(\frac{q}{n+q}\right)^2,$$

tekintetbevéve, hogy $\tau\left(\left(\frac{q}{n+q}\right)+\left(\frac{q}{n+q}\right)^2-\frac{q(n+2q)}{(n+q)^2}\right)=0.$

Ha most n rögzítve van és $q\to\infty$, nyerjük, hogy

(54)
$$\overline{\lim_{q\to\infty}}\,M_{n,\,n+q}\leq\varepsilon_n+\frac{C}{n}=\eta_n,$$

ahol tehát $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n=0$. Mivel nyilván $M_{n,m}\leq 2(M_{n,\,n+q}+M_{m,\,n+q})$, következik, hogy

(55)
$$M_{n,m}\leq 2\left(\overline{\lim_{q\to\infty}}\,M_{n,n+q}+\overline{\lim_{q\to\infty}}\,M_{m,m+(q+n-m)}\right)\leq\eta_n+\eta_m,$$

amivel (43)-at és így *Khincsin* tételét bebizonyítottuk.*

A nagy számok erős törvényei.

A nagy számok erős törvényét abban a speciális esetben, amikor az x_n változók páronként függetlenek és egyenletesen korlátosak, $|x_n|\leq M$, $(n=1,2,\ldots)$, igen egyszerűen bebizonyíthatjuk. Legyen újból $M(x_n)=0$ és

* A fenti bizonyítás alapgondolatában teljesen megegyezik Khincsin eredeti bizonyításával, de részleteiben kissé át van alakítva.

(56) $$f_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

A *Csebisev*-egyenlőtlenségből azonnal adódik, hogy

(57) $$V(|f_n| > \varepsilon) < \frac{M^2}{\varepsilon^2 n}$$

Mivel a

(58) $$\sum_{n=1}^{\infty} V(|f_{n^2}| > \varepsilon)$$

sor (57) szerint konvergens, az erős konvergenciára adott elégséges feltételből azonnal következik, hogy f_{n^2} erősen konvergál 0-hoz. Ebből már azonnal következik, hogy f_n is erősen tart 0-hoz, tekintetbevéve, hogy ha az n szám k^2 és $(k+1)^2$ közé esik, akkor $0 \leq n - k^2 \leq 2k$ és így az x_n változók egyenletes korlátosságára való tekintettel

(59) $$\left| f_n - f_{k^2} \cdot \frac{k^2}{n} \right| = \left| \frac{x_{k^2+1} + \ldots + x_n}{n} \right| < \frac{2Mk}{n} < \frac{2M}{k}.$$

Tekintetbevéve, hogy ha $n \to \infty$, akkor $k \to \infty$, és $\frac{k^2}{n} \to 1$, továbbá, hogy f_{k^2} erősen tart 0-hoz, következik, hogy f_n is erősen tart 0-hoz. Már ez az egyszerűen bizonyítható tétel is tartalmazza *Borel* klasszikus tételét,[44] amely szerint egy tetszőleges α valós számot tizedestört alakba írva és megszámolva, hogy az első n jegy között hányszor fordul elő egy kiszemelt számjegy — mondjuk a 7-es —, ez a szám n-nel osztva (azaz a 7-es gyakorisága) $\frac{1}{10}$-hez konvergál, ha $n \to \infty$, kivéve, ha α az ebből a szempontból kivételes számok halmazához tartozik, amely halmaz viszont 0-mértékű.

Az x_n sorozat korlátossága helyett, amint ezt *Cantelli* kimutatta,[45] elegendő az x_n változók 4-ik momentumainak egyenletes korlátosságát feltételezni, ebben az esetben is könnyen kimutatható a nagy számok erős törvényének érvényessége, ha még azt is feltesszük, hogy az x_n változók négyenkint függetlenek (ami természetesen a páronkinti függetlenségnél valamivel erősebb kikötés). Ezt a következőképpen láthatjuk be: *Csebisev* egyenlőtlenségét általánosíthatjuk 4-edrendű momentumra is, azaz legyen $M_4(x) = B^4$, akkor

(60) $$V(|x| > \lambda B) < \frac{1}{\lambda^4}.$$

Mármost ha az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók 4-enként függetlenek, akkor

[44] Lásd [35]
[45] Lásd [36]

$$(61)\qquad M_4(f_n)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} M_4(x_k)+6\sum\limits_{1\leq i<k\leq n}\sum M_2(x_i)\,M_2(x_k)}{n^4}.$$

Ha most feltesszük, hogy $M_4(x_n) < K$ minden n-re, tekintetbevéve, hogy a *Cauchy—Schwarz* egyenlőtlenség szerint

$$M_2(x_n) < \sqrt{M_4(x_n)} < \sqrt{K},$$

következik (61)-ből, hogy

$$(62)\qquad M_4(f_n) < \frac{6K}{n^2}$$

és így (60) felhasználásával nyerjük, hogy

$$(63)\qquad V(|f_n| > \varepsilon) < \frac{K}{\varepsilon^4 n^2}.$$

Ebből azonnal következik, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V(|f_n| > \varepsilon)$ konvergens, amiből az előbb használt kritérium alkalmazásával adódik, hogy f_n erősen tart 0-hoz.

Abban az esetben, ha az x_n változók mind ugyanazon $F(y)$ közös eloszlásfüggvénnyel bírnak, akkor elegendő tehát *Cantelli* tétele szerint feltenni, hogy $F(y)$ negyedik momentuma, azaz $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^4\, dF(y)$ véges. Abban az esetben, ha az $x_1, x_2, \ldots$ változókról feltesszük, hogy teljesen függetlenek, *Kolmogorov* bebizonyította,[46] hogy már az első momentum létezése is elegendő, azaz ha az x_n változók középértéke létezik, akkor f_n erősen konvergál ehhez a középértékhez. Hogy *Kolmogorov* tételét bebizonyítsuk, szükségünk van a *Csebisev*-egyenlőtlenség *Kolmogorov*tól származó következő élesítésére:[47] *Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ teljesen független valószínűségi változók, legyen $S_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ és legyen $M(x_k)=0$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Ha b_n^2 jelenti x_n szórásnégyzetét, és $B_n = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2$, akkor*

$$(64)\qquad V(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| > \varepsilon) < \frac{B_n}{\varepsilon^2},$$

azaz annak a valószínűsége, hogy az $S_1, S_2, \ldots, S_n$ összegek közül valameiyik abszolút értékben nagyobb legyen mint ε, kisebb $\frac{B_n}{\varepsilon^2}$-nál. Ez nyilván *Csebisev* egyenlőtlenségénél erősebb állítás,

[46] Lásd [33]
[47] Lásd [37]

hiszen a *Csebisev*-egyenlőtlenség csak arra vonatkozik, hogy $|S_n| > \varepsilon$ legyen, viszont a többi lehetőséget magábafoglaló esemény valószínűségére *Kolmogorov* egyenlőtlensége ugyanazt a felső korlátot adja meg; igaz viszont, hogy *Csebisev* egyenlőtlenségének bizonyításához csak a páronkénti függetlenséget kell feltenni (t. i. ahhoz, hogy $M(S_n^2) = b_1^2 + \ldots + b_n^2$ érvényes legyen), *Kolmogorov* viszont az n változó teljes függetlenségét teszi fel. Hogy (64)-et bebizonyítsuk, szükségünk van először is a feltételes valószínűség fogalmára. A és B legyen két ugyanahhoz a valószínűségi mezőhöz tartozó esemény, és tegyük fel, hogy B bekövetkezésének valószínűsége $V(B)$ pozitív. A-nak B-re vonatkozó feltételes valószínűségét $V_B(A)$-val jelöljük és a következőképpen definiáljuk:

(65)
$$V_B(A) = \frac{V(AB)}{V(B)},$$

azaz A-nak B-re vonatkozó feltételes valószínűsége alatt A és B együttes bekövetkezésének valószínűségének és B valószínűségének hányadosát értjük. Egy másik fogalom, amelyre szükségünk lesz, az események teljes rendszerének a fogalma. Az $E_1, E_2, \ldots, E_n$ eseményekről akkor fogjuk azt mondani, hogy teljes rendszert alkotnak, ha páronként kizárják egymást, és egyikük mindig bekövetkezik. Másszóval az $E_1, E_2, \ldots, E_n$ események akkor alkotnak teljes rendszert, ha az ezen eseményeket reprezentáló részhalmazoknak nincsen közös pontja, és összegük a teljes alaphalmazzal (azaz az általunk vizsgált esetben a $(0, 1)$ intervallummal) egyenlő. Ha A egy tetszőleges esemény és $E_1, E_2, \ldots, E_n$ egy teljes eseményrendszer, akkor $A = AE_1 + AE_2 + \ldots + AE_n$ és így (figyelembevéve, hogy az E_i események egymást páronként kizárják) $V(A) = V(AE_1) + V(AE_2) + \ldots + V(AE_n)$. Egy x valószínűségi változónak az E eseményre vonatkozó eloszlásfüggvényét, $F_E(y)$-t a következőképpen értelmezzük:

(66)
$$F_E(y) = V_E(x(t) < y)$$

(természetesen feltesszük, hogy $V(E) > 0$). A feltételes eloszlásfüggvény segítségével értelmezhetjük az x változónak az E eseményre vonatkozó feltételes középértékét is:

(67)
$$M_E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, d\, F_E(y).$$

Az általunk tárgyalt esetben (amikor a valószínűségi mező a $(0,1)$ intervallum *Lebesgue* szerint mérhető részhalmazainak összessége, az azon értelmezett additív halmazfüggvény pedig a *Lebesgue*-féle mérték), könnyen beláthatjuk, hogy az $x = x(t)$ változónak az E halmazra vonatkozó feltételes középértéke az

$$(68) \qquad M_E(x) = \frac{1}{|E|} \int_E x(t)\, dt$$

képlettel is előállítható. (68)-ból most már könnyen leolvashatjuk, hogy ha az $E_1, E_2, \ldots, E_n$ események (részhalmazok) teljes rendszert alkotnak, akkor

$$(69) \quad M(x) = M_{E_1}(x) \,.\, |E_1| + M_{E_2}(x) \,.\, |E_2| + \ldots + M_{E_n}(x) \,.\, |E_n|.$$

A feltételes valószínűség fogalmáról még csak annyit kell tudnunk, hogy ha az A és B események függetlenek és $V(B) > 0$, akkor $V_B(A) = V(A)$, ugyanis a függetlenségből következik, hogy $V(AB) = V(A)V(B)$. Hasonlóképpen ha az E eseményhez hozzárendelünk egy x_1 valószínűségi változót, amelynek értéke 1, ha E bekövetkezett, és 0, ha nem, továbbá, ha az x_2 változó független az így definiált x_1 változótól, akkor $M_E(x_2) = M(x_2)$; ugyanis x_1 és x_2 függetlenségéből következik, hogy $F_E(y) = V_E(x_2 < y) = V(x_2 < y) = F(y)$, amiből (67) segítségével az állításunk következik. Jelentse most E azt az eseményt, hogy $|S_1| \leqq \varepsilon, |S_2| \leqq \varepsilon, \ldots, |S_{k-1}| \leqq \varepsilon$ és $|S_k| > \varepsilon$ egyidejűleg teljesülnek ($k = 1, 2, \ldots, n$) és legyen $E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n$; másszóval E éppen azt jelenti, hogy a $k = 1, 2, \ldots, n$ értékek közül legalább egyre teljesül $|S_k| > \varepsilon$, azaz azt, hogy $\max\limits_{1 \leqq k \leqq n} |S_k| > \varepsilon$. Mivel az E_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) események egymást páronként kizárják, az $E_1, E_2, \ldots, E_n$ és $\overline{E}$ események (ahol $\overline{E}$ az E esemény tagadását jelenti), teljes rendszert alkotnak, és így (69)-et alkalmazva az $x = S_n^2$ változóra nyerjük. hogy

$$(70) \qquad M(S_n^2) = \sum_{k=1}^{n} M_{E_k}(S_n^2)\, |E_k| + M_{\overline{E}}(S_n^2)\, |\overline{E}|.$$

Mármost

(71)

$$M_{E_k}(S_n^2) = M_{E_k}(S_k^2) + 2\, M_{E_k}(S_k^2 \sum_{i>k} x_i) + M_{E_k}(\sum_{i>k} x_i^2) + 2\, M_{E_k}(\sum_{i>j>k} x_i x_j).$$

Tekintettel arra, hogy az x_k változókról feltettük, hogy függetlenek, az E_k esemény csak az $x_1, x_2, \ldots, x_k$ változóktól függ, a feltételes középértékről mondottakból azonnal következik, hogy

$$M_{E_k}(x_i x_j) = M(x_i x_j) = M(x_i)\, M(x_j) = 0, \text{ ha } i > j > k.$$

Hasonló meggondolással látható be, hogy

$M_{E_k}(S_k^2 x_i) = M_{E_k}(S_k^2)\, M(x_i) = 0$, ha $i > k$. Végül tekintetbe véve, hogy az E_k esemény definiciója szerint ennek bekövetkezése esetén $|S_k| > \varepsilon$ és ezért $M_{E_k}(S_k^2) > \varepsilon^2$, nyerjük, hogy

$$(72) \qquad M_{E_k}(S_n^2) > \varepsilon^2.$$

A (70)-ben szereplő utolsó tag nemnegatív lévén, (72)-ből és (70)-ből nyerjük, hogy

$$(73) \qquad B_n = M(S_n^2) > \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} |E_k| = \varepsilon^2 \, V(\operatorname*{Max}_{1 \leq k \leq n} |S_k| > \varepsilon),$$

amivel *Kolmogorov* egyenlőtlenségét bebizonyítottuk. Ezt az egyenlőtlenséget felhasználjuk, hogy bebizonyítsuk a következő, *Khincsin*től és *Kolmogorov*tól származó tételt:[48] *Az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ valószínűségi változók legyenek teljesen függetlenek, legyen $M(x_n) = 0$, $M(x_n^2) = b_n^2$ és tegyük fel, hogy a*

$$(74) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor 1 valószínűséggel konvergens. Másszóval az $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ részletösszegek erősen konvergálnak, ha (74) konvergens. *Khincsin* és *Kolmogorov* azt is bebizonyították, hogy a (74) feltétel nemcsak elégséges, hanem szükséges is a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)$ sor majdnem mindenütt való konvergenciájához, és a már említett 0—vagy—1 törvény szerint ez annyit jelent, hogy ha (74) divergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)$ sor majdnem mindenütt divergens.

Ezt a tételt a következőképpen bizonyíthatjuk be: jelentse $E_{n,k,m}$ azon t pontok halmazát, amelyekre

$$(75) \qquad \operatorname*{Max}_{1 \leq p \leq k} |S_{n+p} - S_n| > \frac{1}{m}$$

és legyen

$$(76) \qquad V_{n,k,m} = |E_{n,k,m}| = V\left(\operatorname*{Max}_{1 \leq p \leq k} |S_{n+p} - S_n| > \frac{1}{m}\right).$$

Kolmogorov egyenlőtlenségéből azonnal adódik, hogy

[48] A. N. Kolmogoroff és A. Ja. Khincsin: Über die Konvergenz von Reihen deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden, MSZ, 32 (1925) 668—677.

$$V_{n,k,m} \leqq m^2 \sum_{p=1}^{k} b_{n+p}^2. \tag{77}$$

Legyen most $E_{n,m}$ azon t pontok halmaza, amelyekre

$$\operatorname*{Max}_{p \geqq 1} |S_{n+p} - S_n| > \frac{1}{m}. \tag{78}$$

Tekintve, hogy $E_{n,m} = E_{n,2n,m} + E_{2n,4n,m} + \ldots$ következik

$$V_{n,m} = |E_{n,m}| \leqq m^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2. \tag{79}$$

Legyen E_m azon t pontok halmaza, amelyekre

$$\limsup_{n \to \infty} \left(\operatorname*{Max}_{p \geqq 1} |S_{n+p} - S_n| \right) > \frac{1}{m}. \tag{80}$$

Tekintve, hogy E_m részhalmaza $E_{n,m}$-nek n minden értékére, (79)-ből következik, hogy

$$V_m = |E_m| < m^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2 \quad \text{minden } n\text{-re.} \tag{81}$$

Mivel a (74) sor konvergens, (81)-ből leolvasható, hogy E_m 0-mértékű halmaz. Mivel E_m tartalmazza mindazon t pontokat, amelyekre $S_n(t)$ nem konvergál 0-hoz, következik, hogy a divergenciapontok halmaza is 0-mértékű, amivel állításunkat bebizonyítottuk.

A most bizonyított tételből következik *Kolmogorov* következő tétele:[49] *Az $x_1, x_2, \ldots$ valószínűségi változók legyenek teljesen függetlenek, legyen $M(x_n) = 0$ és $M(x_n^2) = b_n^2$. Ha a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{n^2} \tag{82}$$

sor konvergens, akkor $f_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ *erősen konvergál 0-hoz.* Ugyanis a (82) feltételből a fenti *Khincsin—Kolmogorov*-tétel alkalmazásával azonnal következik, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} \tag{83}$$

majdnem mindenütt konvergens. Ismeretes továbbá, hogy ha a $\sum a_k$

[49] A. Kolmogorov, Sur la loi forte des grandes nombres, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 191 (1930) 910—911.

sor konvergens, akkor $\frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{n}$ 0-hoz tart, ugyanis, ha $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, akkor

$$(84)\quad \frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{n} = \frac{n+1}{n}s_n - \frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n},$$

amiből az állítás leolvasható. Így tehát (83) majdnem mindenütt való konvergenciájából következik, hogy $f_n = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ erősen tart 0-hoz.

A most bebizonyított *Kolmogorov*-féle tételből első pillantásra csak az látszik, hogy ha az $x_1, x_2, \ldots$ változók teljesen függetlenek és ugyanazon $F(y)$ eloszlásfüggvénnyel bírnak, továbbá $F(y)$ második momentuma létezik, akkor érvényes a nagy számok erős törvénye. Ugyanis ebben az esetben $b_n^2 = \sigma^2$ nem függ n-től és így (82) konvergál. Az ekvivalens sorozatok fogalmának felhasználásával azonban ugyanebből a tételből azt is levezethetjük, hogy egyenlő eloszlású változók esetében már az első momentum létezése is elegendő a nagy számok törvényének érvényességéhez. Legyen ugyanis $y_n = x_n$, ha $|x_n| \leq n$ és egyébként $y_n = 0$. Amint ezt már előzőleg kimutattuk (l. (34) és (35)), az x_n és y_n sorozatok ekvivalensek, és így elegendő, ha kimutatjuk, hogy az y_n sorozatra teljesül a (82) feltétel.

Hogy a számolást kissé egyszerűsítsük, tegyük fel újból, hogy az x_n változók szimmetrikus eloszlásúak. Ebben az esetben egyszerű számolással adódik, hogy

(85)
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\sigma^2(y_n)}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\int_0^n t^2\,dF(t) \leq 8\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\int_{n-1}^{n} t^2\,dF(t) \leq$$
$$\leq 8\int_0^N t\,dF(t),$$

tehát már az első momentum létezése biztosítja a

$$(86)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma^2(y_n)}{n^2}$$

sor konvergenciáját, és így a *Kolmogorov*-féle feltétel teljesülését. (Az általános eset, amikor az x_n változók eloszlása nem szimmetrikus, a szimmetrikus esetre visszavezethető; ezt a rövidség kedvéért itt nem részletezzük.) Ilyen módon a következő tételt bizonyítottuk be: *Ha az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ valószínűségi változók ugyan-*

azon $F(y)$ eloszlásfüggvénnyel bírnak, teljesen függetlenek, továbbá létezik az x_n változók középértéke $M(x_n) = a$, akkor érvényes a nagy számok erős törvénye, azaz annak a valószínűsége, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = a$, *1-gyel egyenlő.*

Megemlítjük még a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergenciájára vonatkozó *Khincsin—Kolmogorov*-féle tétel egy érdekes sorelméleti következményét. Legyen $\sum b_n$ valós számoknak egy sora, és legyen $x = x\ (t)$ az n-edik *Rademacher*-féle függvény. Mivel $M(x_n) = 0$ és $M(x_n^2) = 1$, alkalmazva az említett tételt, arra az eredményre jutunk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\, x_n\ (t)$ sor majdnem minden t-re konvergál, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergens és majdnem minden t-re divergál, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ divergens. Tekintettel arra, hogy a *Rademacher*-függvények (a diadikus racionális pontok 0-mértékű halmazától eltekintve) csak a $+ 1$ és $- 1$ értékeket veszik fel, a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\, x_n\,(t)$ sor t minden (nem diadikus racionális) értékére felfogható, mint a $\sum b_n$ sor egy *előjelezése,* megfordítva pedig, ha megadunk egy tetszőleges $+ 1$ és $- 1$ jelekből álló végtelen sorozatot, amelyben mindkét jegy végtelen sokszor fordul elő, ehhez találhatunk egy és csak egy olyan t értéket, hogy az $x_n(t)$ sorozat $(n = 1, 2, \ldots)$ éppen a megadott jelsorozattal azonos. Ilyenmódon (egy 0-mértékű halmaztól eltekintve) egy-egyértelmű hozzárendelést nyertünk a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor előjelezései és a $(0, 1)$ intervallum pontjai között. A fenti eredmény tehát a következőképpen is kimondható: a $\sum b_n$ sor a tagok majdnem minden előjelezése mellett konvergens, feltéve, hogy $\sum b_n^2$ konvergál s majdnem minden előjelezés mellett divergens, ha $\sum b_n^2$ divergál.

Hasonló eredmény bizonyítható be, amint ezt *Steinhaus* megmutatta,[50] komplex tagú sorok komplex „előjelezésére", ahol „előjelezés" alatt azt értjük, hogy a komplex szám abszolút értékét változatlanul hagyjuk, de argumentumát megváltoztatjuk. Mindkét tétel állítását úgy lehet kifejezni, hogy összehasonlítjuk azzal az ismert ténnyel, hogy egy $\sum b_n$ sor akkor és csak akkor konvergál

[50] H. Steinhaus, Sur la probabilité de la convergence des séries. Studia Math. 2 (1930) 21—39.

tetszőleges előjelezés mellett, ha abszolút konvergens, ahhoz azonban, hogy *majdnem minden* előjelezés mellett konvergens legyen, szükséges és elégséges, hogy $\sum b_n^2$ konvergáljon.

Az iterált logaritmus-tétel és általánosításai.

Ebben a fejezetben az egyszerűség kedvéért a legegyszerűbb esetre szorítkozunk, és a vizsgálandó teljesen független valószínűségi változók sorozatának a *Rademacher*-féle függvényeket választjuk. Az eredmények azonban, amelyeket ebben a fejezetben ismertetni fogunk, érvényesek az általános esetben is, erre a fejezet végén fogunk kitérni. Legyen tehát $x_n = x_n(t)$ az n-edik *Rademacher* függvény, és legyen $S_n(t) = x_1(t) + x_2(t) + \ldots + x_n(t)$. Az előző fejezetben láttuk, hogy $\frac{S_n(t)}{n}$ majdnem mindenütt konvergál 0-hoz. Ezt az eredményt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha n-szer feldobunk egy pénzdarabot, a_n jelenti a dobások közül a fej előfordulásának a számát, b_n az írás előfordulásának számát ($a_n + b_n = n$) és ha $S_n = a_n - b_n$, akkor 1 valószínűséggel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$. De úgy is értelmezhetjük ezt az eredményt, ha az α valós számot ($0 < \alpha < 1$) előállítjuk a 2 alapú számrendszerben,

$$(87) \qquad \alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{2^n}, \text{ ahol } d_n = 0 \text{ vagy } 1,$$

és a_n jelenti az első n jegy közül az egyesek, b_n a nullák számát, továbbá $S_n = a_n - b_n$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$ majdnem minden α valós szám esetében teljesül. *Hausdorff* volt az első, aki észrevette,[51] hogy S_n nemcsak n-nel, hanem kisebb nagyságrendű $f(n)$ függvénnyel osztva is, majdnem mindenütt 0-hoz tart, mégpedig azt bizonyította be, hogy majdnem mindenütt $\frac{S_n}{n^{1/2+\delta}} \longrightarrow 0$, ha $\delta > 0$ tetszőleges pozitív szám. *Hausdorff* eredményét a következőképpen láthatjuk be: vizsgáljuk a

$$(88) \qquad J_{n,2p} = \int_0^1 (x_1(t) + x_2(t) + \ldots + x_n(t))^{2p}\, dt$$

integrált. A hatványozást elvégezve, és tagonként integrálva, csak azok a tagok maradnak meg, amelyekben minden x^k páros hatvá-

[51] F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig Veit, (1914) p. 421.

nyon szerepel, ezeknek az integrálja viszont éppen *1*. Ilyenmódon egyszerű kombinatorikai meggondolásokkal beláthatjuk, hogy

$$J_{n,2p} < \frac{(2p)!}{2^p} n^p. \tag{89}$$

Alkalmazva *Csebisev* egyenlőtlenségét, nyerjük, hogy

$$V\left(\frac{|S_n|}{n^{\frac{1}{2}+\delta}} > \varepsilon\right) < \frac{(2p)!}{2^p \varepsilon^{2p} n^{2p\delta}}. \tag{90}$$

Legyen $\delta > 0$ tetszőleges, és válasszuk a p egész számot $\frac{1}{2\delta}$-nál nagyobbnak, akkor (90)-ből nyerjük, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} V\left(\frac{|S_n|}{n^{\frac{1}{2}+\delta}} > \varepsilon\right) \qquad (\varepsilon > 0) \tag{91}$$

konvergens, amiből már az előzőkben többször használt kritérium alkalmazásával adódik, hogy $\frac{S_n}{n^{\frac{1}{2}+\delta}}$ erősen konvergál *0*-hoz.

Hausdorff eredményét *Hardy* és *Littlewood*[52] még javították, amenynyiben bebizonyították, hogy $\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}}$ majdnem mindig korlátos. Ezt a következőképpen láthatjuk be:[53] Legyen

$$\varepsilon_{n,\lambda} = \int_0^1 e^{\lambda S_n(t)}\, dt. \tag{92}$$

Felhasználva az x_n változók függetlenségét, könnyen következik, hogy

$$\varepsilon_{n,\lambda} = \left(\int_0^1 e^{\lambda x_1(t)}\, dt\right)\left(\int_0^1 e^{\lambda x_2(t)}\, dt\right)\cdots\left(\int_0^1 e^{\lambda x_n(t)}\, dt\right) = \left(\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}\right)^n \tag{93}$$

Felhasználva az $\frac{1}{2}(e^{\lambda}+e^{-\lambda}) < e^{\frac{\lambda^2}{2}}$ egyenlőtlenséget és (93)-ba $\lambda = \sqrt{2(1+\varepsilon)\frac{\log n}{n}} - t$ helyettesítve, (93)-ból leolvashatjuk, hogy

$$V\left(\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} > \sqrt{2(1+\varepsilon)}\right) < \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}. \tag{94}$$

[52] G. H. Hardy és J. E. Littlewood, Some problems of diophantine approximation, Acta Math. 37 (1914) p. 185.

[53] V. ö. A. Rényi, Simple proof of a theorem of Borel and of the law of the iterated logarithm, Matematisk Tidsskrift B, (1948) 41—48.

Hasonlóképpen $\lambda = -\sqrt{2(1+\varepsilon)\frac{\log n}{n}}$ választással nyerjük, hogy

(95) $$V\left(\frac{S_n}{\sqrt{n\log n}} < -\sqrt{2(1+\varepsilon)}\right) < \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\,.$$

(94)-ből és (95)-ből következik, hogy a

(96) $$\sum_{n=1}^{\infty} V\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{n\log n}} > \sqrt{2(1+\varepsilon)}\right)$$

sor konvergens és tekintettel arra, hogy $\varepsilon > 0$-t tetszőlegesen választhatjuk, annak a valószínűsége, hogy

(97) $$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\log n}} \leq 1$$

legyen, 1-gyel egyenlő.

Természetesen felmerül a kérdés, nem lehet-e ezt az eredményt is tovább javítani? Ezt a problémát véglegesen *Khincsin* oldotta meg,[54] aki bebizonyította, hogy annak a valószínűsége, hogy

(98) $$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\log\log n}} \leq 1$$

legyen, 1-gyel egyenlő, és kimutatta, hogy ez az eredmény már nem javítható tovább, ugyanis annak a valószínűsége, hogy

(99) $$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\log\log n}} \leq q < 1$$

legyen, már 0-val egyenlő, azaz *Khincsin* tétele azt mondja ki, hogy 1 valószínűséggel

(100) $$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1\,.$$

Amint láttuk, a fenti módszerek ennek a tételnek bebizonyításához nem elégségesek. Ahhoz, hogy a *Hardy—Littlewood*-tétel bizonyításában log n-et loglog n-nel tudjuk helyettesíteni, lényegében arra a gondolatra van szükség, amely *Kolmogorov*nak az előző fejezetben tárgyalt, a *Csebisev* egyenlőtlenség javítását képező lemmájának az alapját képezi, hogy tudniillik S helyett $\max\limits_{1\leq k\leq n} |S|$ -t vizsgáljuk. A következőkben csak (98)-at fogjuk bizonyítani, mégpedig a tárgyalt speciális esetre szabott egyszerű bizonyítás segít-

[54] Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Fundamenta Math. 6 (1924) 9—20.

ségével,[55] amelynek alapgondolata azonban azonos Kolmogorov-nak a szóbanforgó tételre adott és az általános esetben is érvényes bizonyításának alapgondolatával.[56] Legyen

$$T_n(t) = \mathrm{Max}\,|S_k(t)| \text{ és legyen}$$

$$(101) \qquad T_{n,\lambda} = \int_0^1 e^{\lambda T_n(t)}\,dt.$$

Egyszerű kombinatorikus meggondolással belátható, hogy

$$(102) \qquad T_{n,\lambda} < 2\left(\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}\right)^n.$$

Ebből ugyanúgy, mint az előbb, nyerjük $\lambda = \sqrt{\frac{2(1+\delta)\log\log n}{n}}$ helyettesítéssel, hogy

$$(103) \qquad V\left(\frac{T_n(t)}{\sqrt{2n\log\log n}} > \sqrt{1+\delta}\right) < \frac{2}{(\log n)^{1+\delta}}.$$

Legyen $\gamma > 0$ és tekintsük az $n_k = [\,(1+\gamma)^k\,]$ számsorozatot (ahol [ ] a zárójelben álló valós szám egész részét jelenti). (103)-ból

$$(104) \qquad V\left(\frac{T_{n_k}(t)}{\sqrt{2n_k\log\log n_k}} > \sqrt{1+\delta}\right) < \frac{C}{k^{1+\delta}},$$

ahol a C konstans csak a γ és δ számok választásától függ és így

$$(105) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} V\left(\frac{T_{n_k}(t)}{\sqrt{2n_k\log\log n_k}} > \sqrt{1+\delta}\right)$$

konvergens, és ezért majdnem mindenütt

$$(106) \qquad \limsup_{k\to\infty} \frac{T_{n_k}(t)}{\sqrt{2n_k\log\log n_k}} \leq \sqrt{1+\delta}.$$

Tekintetbe véve, hogy a $T_n(t)$ számsorozat t minden értékére monoton növekvő (ez éppen a bizonyítás alapgondolata, ezért dolgozunk $T_n(t)$-vel $S_n(t)$ helyett), továbbá azt, hogy ha $n_k < n \leq n_{k+1}$ akkor $n(1+\gamma) > n_{k+1}$ és ha k végtelenhez tart, akkor $\frac{\log\log n}{\log\log n_{k+1}} \to 1$, következik (106)-ból, hogy

[55] Lásd [53]

[56] A. Kolmogorov, Über das Gesetz des iterierten Logarithmus, Math. Ann. 101, (1929) 126—135.

$$(107)\qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{T_n(t)}{\sqrt{2n\log\log n}} \leq \sqrt{(1+\delta)(1+\gamma)}.$$

Mivel úgy δ-t, mint γ-t tetszőleges kicsinynek választhatjuk, továbbá, mivel nyilván $|S_n(t)| \leq T_n(t)$, (106)-ból leolvasható, hogy

$$(108)\qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n(t)|}{\sqrt{2n\log\log n}} \leq 1,$$

amivel állításunkat bebizonyítottuk.

Khincsin és *Kolmogorov* utóbb kimutatták, hogy a most bebizonyított tétel, amelyet az iterált logaritmus tételének szokták nevezni, nemcsak a tárgyalt egyszerű esetben, hanem igen általános feltételek mellett is érvényes. Annak ellenére, hogy az iterált logaritmus-tétel bizonyos értelemben lehetséges legjobb eredmény, mégis sikerült utóbbi időben többeknek élesíteni, a következő értelemben: Legyen $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ valószínűségi változók egy sorozata, és legyen $f(n)$ az n index meghatározott függvénye. Az $f(n)$ függvényt az x_n sorozat felső függvényének nevezzük akkor, ha az $x_n > f(n)$ egyenlőtlenség 1 valószínűséggel csak véges sok n indexre teljesül, ha viszont $x_n > f(n)$ 1 valószínűséggel végtelen sokszor teljesül, akkor nevezzük $f(n)$-t az x_n sorozat alsó függvényének. *Kolmogorov* már említett 0-vagy-1 törvényéből következik, hogy ha az x_n változók teljesen függetlenek, akkor az x_n sorozatra vonatkozólag minden $f(n)$ függvény vagy felső vagy alsó függvény, azaz annak a valószínűsége, hogy $x_n > f(n)$ végtelen sokszor teljesül, vagy 1-gyel vagy 0-val egyenlő. Ugyanis a 0-vagy-1 törvény szerint mindn olyan, az x_n független változók értékétől függő eseménynek a valószínűsége, amely az x_n változók közül véges soknak a megváltozásánál változatlan marad, csak 0 vagy 1 lehet. Az iterált logaritmus-tétel általános alakban úgy szól, hogy ha az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ változók függetlenek,

$$M(x_n) = 0,\ M(x_n^2) = b_n^2,\ S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$
$$B_n = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2,$$

akkor (bizonyos további feltevések mellett) az $f(n) = (1+\varepsilon)\sqrt{2B_n \operatorname{loglog} B_n}$ függvény az S_n sorozatnak felső függvénye, ha $\varepsilon > 0$ és alsó függvénye, ha $\varepsilon < 0$. Ennél még pontosabb eredményeket értek el *Erdős*[57] és *Feller*,[58] akik kimutatták,

[57] P. Erdős, On the law of the iterated logarithm, Annals of Math. 43 (1942) 419—436.

[58] W. Feller, The general form of the so-called law of the iterated logarithm. Trans. Amer. Math. Soc. 54 (1943) 373—402.

hogy ha $H(n)$ monoton növekvő függvény, akkor az előbbi esetben $f_l(n) = H(B_n)$ felső függvénye lesz az S_n sorozatnak, ha az

$$\int_T^{\infty} \frac{f(t)\, e^{-\frac{f^2(t)}{2}}}{t}\, dt \qquad (T > 0) \tag{109}$$

integrál konvergens, és alsó függvénye, ha divergens.

A centrális középértéktétel problémaköre.

A centrális középértéktétel kifejezés olyan tételeket foglal magában, amelyek arra vonatkoznak, hogy ha $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ valószínűségi változók, $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, akkor alkalmasan választva az A_n és H_n konstansokat, $F_n(y)$-nal jelölve a $z_n = \frac{S_n - A_n}{H_n}$ változók eloszlásfüggvényét, $F_n(y)$ y minden értékére konvergál az ú. n. normális vagy *Gauss*-féle eloszláshoz, azaz

$$\lim_{n \to \infty} F_n(y) = \Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \tag{110}$$

A centrális középértéktétel fennállását igen általános feltételek mellett a XIX. század nagy orosz matematikusai, *Csebisev,*[59] *Markov*[60] és *Ljapunov*[61] bizonyították be. A klasszikus orosz iskola hagyományait folytatva *Bernstein*[62] ért el ebben az irányban jelentős új eredményeket, rajta kívül a szovjet matematikusok közül *Gnedenko,*[63] *Khincsin*[64] és mások fejlesztették tovább a valószínűségszámításnak ezt a központi jelentőségű fejezetét. Eredményeik részletes ismertetésére — éppen nagy általánosságuk miatt — itt nincsen helyünk. Ezért csak arra fogunk szorítkozni, hogy ismertessük a centrális középértéktétel bizonyítására vonatkozó *Kolmogorov*-tól és *Petrovszki*-tól származó új módszert, aminek a további eredmények elérésében nagy jelentősége volt. A centrális

[59] P. L. Csebisev, O dvuh teoremah otnoszityelno verojatnesztei, Zap Imper. Akad. Nauk 6 (1887).

[60] Lásd [38]

[61] A. M. Ljapunoff, Sur une proposition de la théorie des probabilités IAN, 13 (1900) 359—386.

[62] S. N. Bernstein, Sur l'extension du théoreme limite du calcul des probabilités aux sommes des quantités dépendantes, Math. Ann. 97 (1926) 1—59.

[63] B. V. Gnedenko, Elementi teorii funkcii praszpredelenie szlucsainüh vektorov, UMN 10 (1944) 230—244.

[64] A. Ja. Khincsin, Predelnüe zakoni dija szumm nyezaiszimüh szlucsainüh velicsin, Moszkva—Lennigrád, GONTI, (1938) 1—116.

középértéktétel első bizonyításai (*Csebisev* és *Markov*) a *momentumok módszerével* dolgoztak, azaz azt mutatták ki, hogy $F_n(y)$ összes momentumai konvergálnak a $\Phi(y)$ normális eloszlás megfelelő momentumaihoz és ebből következtettek arra, hogy $F_n(y)$ konvergál $\Phi(y)$-hoz. Ennek a módszernek a hátránya, hogy csak abban az esetben alkalmazható (és még akkor sem mindig), ha a szóbanforgó x_n változók összes momentumai léteznek. Ennél sokkal szélesebb körben alkalmazható a *karakterisztikus függvény módszere*, amelynek jelentőségét elsőnek *Ljapunov*[65] ismerte fel, és amely ma már szintén klasszikussá vált. Egy $F(y)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényén $F(y)$ *Fourier—Stieltjes*-transzformáltját értik, azaz $F(y)$ karakterisztikus függvényének az

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}\, dF(y) \tag{111}$$

függvényt nevezik. Ismeretes, hogy az $f(t)$ karakterisztikus függvény teljesen meghatározza az $F(t)$ eloszlásfüggvényt, továbbá, ha az $F_n(y)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye $f_n(t)$ és $f_n(t)$ egy $-a \leq t \leq +a$ intervallumban egyenletesen konvergál egy $F(y)$ eloszlásfüggvény $f(t)$ karakterisztikus függvényéhez, akkor $F_n(y)$ is konvergál $F(y)$-hoz, minden olyan y-ra, amelyre $F(y)$ folytonos. Ilyenmódon a centrális középértéktétel bizonyításához elegendő kimutatni, hogy a fentemlített $F_n(y)$ eloszlásfüggvények $f_n(t)$ karakterisztikus függvényei valamely $(-a, +a)$ intervallumban egyenletesen konvergálnak a normális eloszlás karakterisztikus függvényéhez, azaz

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity - \frac{y^2}{2}}\, dy = e^{-\frac{t^2}{2}}\text{-hez.} \tag{112}$$

Hogy megértsük, miben áll a karakterisztikus függvények módszerének előnye, tudnunk kell, hogy ha $F_1(y)$ és $F_2(y)$ jelentik az x_1 és x_2 valószínűségi változók eloszlásfüggvényeit, továbbá, ha x_1 és x_2 függetlenek, akkor $x_1 + x_2$ eloszlásfüggvényét $F_3(y)$-nal jelölve

$$F_3(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(y-u)\, dF_1(u). \tag{113}$$

$F_3(y)$-t az $F_1(y)$ és $F_2(y)$ eloszlásfüggvények *kompoziciójának* nevezzük. Rövidség kedvéért a kompozíció műveletét $*$-gal jelöljük, vagyis (113)-at a következőképpen írjuk: $F_3(y) = F_1(y) * F_2(y)$. Mármost ismeretes, hogy ha $f_1(t)$ és $f_2(t)$ jelentik $F_1(y)$ és

[65] Lásd [61]

$F_2(y)$ karakterisztikus függvényeit, és $F_3(y) = F_1(y) * F_2(y)$ karakterisztikus függvénye $f_3(t)$, akkor $f_3(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$, azaz két eloszlásfüggvény kompozíciójának karakterisztikus függvénye egyenlő a két eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényének szorzatával. Ez a tény teszi lehetővé, hogy független változók összegeinek eloszlásának karakterisztikus függvényét könnyen kiszámíthassuk. Így például ha $x_n = x_n(t)$ újból a *Rademacher* függvényeket jelentik, akkor az $x_n(t)$ változók eloszlásfüggvényei és így karakterisztikus függvényeik is egyenlők, mégpedig könnyen adódik, hogy ez a közös eloszlásfüggvény $f(t) = \cos t$. Legyen most $z_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sqrt{n}}$, akkor az előbb mondottak értelmében z_n karakterisztikus függvénye $f_n(t) = \left(\cos \dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$ és tekintetbevéve, hogy

$$\cos \frac{t}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{t^4}{4!\,n^2} - \ldots \tag{114}$$

sorfejtésben az első két taghoz képest a többi elhanyagolhatóan kicsinnyé válik, ha $|t| \leqq a$ és n végtelenhez tart, továbbá, mivel ismeretes, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a,$$

könnyen következik, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \left(\cos \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{115}$$

azaz a fentebb mondottakra való tekintettel z_n eloszlásfüggvénye konvergál a normális eloszláshoz; másszóval azt bizonyítottuk be, hogy

$$\lim_{n \to \infty} V\left(\alpha < \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} < \beta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{116}$$

Ez a módszer igen általános feltevések mellett is hasonlóképpen alkalmazható.

Mielőtt továbbmennénk, nézzük meg a karakterisztikus függvény módszerének alkalmazását a nagy számok gyenge törvényére. Ez már azért is érdekes, mert az előzőkben megismert tételeket így más oldalról megvilágítva, mélyebb betekintést nyerünk a kérdés lényegébe. Csak egy példát nézünk meg közelebbről, *Khincsin*nek azt a tételét, hogy ha az x_n változók ugyanazon eloszlással bírnak és függetlenek, továbbá a közös eloszlásfüggvényük első momentuma létezik, akkor érvényes a nagy számok gyenge törvénye, azaz $z_n = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ gyengén konvergál az x_n változók közös középértékéhez. *Khincsin* tételének bizonyításához az x_n változókról csak páronkénti függetlenséget tételeztünk fel. Ha feltesszük, hogy teljesen függetlenek, akkor a tétel a karakterisztikus függvény módszerével szinte minden fáradság nélkül belátható. Ugyanis ha $F_n(y)$ jelenti z_n eloszlásfüggvényét, akkor az, hogy z_n gyengén konvergál az m konstanshoz, azt jelenti, hogy $F_n(y) \to 0$, ha $y < m$ és $F_n(y) \to 1$, ha $y > m$, másszóval $F_n(y)$ az $y=m$ kivételével konvergál az $F(y)$ függvényhez, amelyet úgy definiálunk, hogy $F(y) = 0$, ha $y < m$ és $F(y) = 1$, ha $y > m$. Ez viszont, mint láttuk, ekvivalens azzal az állítással, hogy $F_n(y)$ $f_n(t)$ karakterisztikus függvénye konvergál $F(y)$ karakterisztikus függvényéhez, azaz e^{imt}-hez. Utóbbit a következőképpen láthatjuk be: feltevéseinkből következik, hogy ha $f(t)$ jelenti x_n karakterisztikus függvényét (mivel az x_n változók eloszlásfüggvénye ugyanaz, tehát karakterisztikus függvényük is közös), akkor, ha $t \to 0$,

$$f(t) = 1 + mit + o(t),$$

ahol $o(t)$ olyan kifejezést jelent, hogy $\lim\limits_{t\to 0} \frac{o(t)}{t} = 0$. Ebből következik, tekintetbevéve, hogy z_n karakterisztikus függvénye (a teljes függetlenségre való tekintettel) $\left(f\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$, vagyis

$$f_n(t) = \left[1 + \frac{mit}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \to e^{imt}$$

ha $n \to \infty$, amivel állításunk be van bizonyítva. Ez a meggondolás azért is érdekes, mert azt mutatja, hogy a nagy számok törvényeivel foglalkozó fejezetekben bemutatott viszonylag elemi módszerek többet adnak, mint a karakterisztikus függvény módszere, — utóbbi csak akkor alkalmazható, ha a teljes függetlenséget feltételezzük, míg az előbbiek a páronkénti függetlenség esetében is célhoz vezettek. Ettől eltekintve a nagy számok gyenge törvényénél is van a karakterisztikus függvények módszerének jelentősége, elsősorban mint heurisztikus módszernek; az erős konvergencia kérdésének tárgyalására viszont ez a módszer nem igen alkalmas.

A már említett *Kolmogorov—Petrovszki*-féle módszer, amelyet Khincsin fejlesztett tovább közismert könyvében,[66] egész más elven alapszik, mint a karakterisztikus függvények módszere. Kiinduláspontja az a megjegyzés, hogy ha Φ jelenti a normális el-

[66] A. Khintchine, Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse d. Math. u. Grenzgebiete, II, 4 (1933) Berlin, 1—77.

oszlásfüggvényt (lásd (110)), akkor a $G(x, y) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)$ kétváltozós függvény eleget tesz a

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \tag{117}$$

ú. n. hővezetési egyenletnek. A módszer lényege a „felső" és „alsó" függvények bevezetése, azaz olyan G_ε (x, y) függvények bevezetése, amelyek a

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \varepsilon$$

differenciálegyenletnek tesznek eleget (G_ε (x, y)-t felső függvénynek nevezzük (117)-re vonatkozólag, ha $\varepsilon > 0$ és alsó függvénynek, ha $\varepsilon < 0$) és ilyen függvényekkel való összehasonlítás útján vezet el a módszer a centrális középértéktétel bizonyításához. Előnye ennek a módszernek — egyszerűségén és áttekinthetőségén kívül —, hogy ilyenmódon lehetővé teszi valószínűségszámítási problémáknak differenciálegyenletekre vonatkozó problémákra való átfogalmazását, és viszont (ezen összefüggést felhasználják újabban differenciálegyenletek numerikus megoldásánál is), ami más problémáknál, különösen diffuzió-jelenségek vizsgálatánál előnyös. Ez az előny még nyilvánvalóbbá vált akkor, amikor változók diszkrét sorozatainak vizsgálatáról stochasztikus folyamatok vizsgálatára tértek át, ahol azok a megoldások (pl. a normális eloszlás), amelyek a diszkrét esetben mint határértékek léptek fel, pontos megoldásokként jelentkeztek.

A centrális középértéktétellel kapcsolatban nem térhetünk ki *Bernstein* alapvető munkáinak részletesebb ismertetésére. *Bernstein* munkásságának jelentősége ezen a téren abban áll, hogy egyrészt elsőnek terjesztette ki a centrális középértéktétel érvényességét majdnem független változókra, továbbá ő volt az első, aki a többváltozós esetben a többváltozós normális eloszlás felé való konvergencia feltételeit behatóan megvizsgálta. Itt nem egyszerű általánosításról van szó, mert a változók számának (a dimenziószámnak) a növekedésével sajátságos új problémák merülnek fel. A többdimenziós eset gyakorlati jelentősége nyilvánvaló, hiszen az alkalmazásokban a legegyszerűbb esetektől eltekintve mindig több (2- vagy 3-) dimenziós esettel van dolgunk. Hogy egy példát említsünk, a tüzérségnél 2-dimenziós problémával állunk szemben, ha sík terepen a becsapódást vizsgájuk, azonban, ha levegőben robbanó lövedékről van szó, akkor 3-dimenziós problémát kell vizsgálnunk.

Végül megemlítjük, hogy igen mély eredményeket ért el *Lin-*

nik[67] az $F_n(y) - F(y)$ különbség maximumának meghatározásának kérdésében. Ezt a kérdést, abban a speciális esetben, amikor az x_n változók ugyanolyan eloszlásúak, *Esseen*[68] tárgyalta. *Linnik* eredményeinek egyik érdekessége, hogy *Vinogradov* híres, trigonometrikus összegek becslésére vonatkozó, módszerét[69] (amelyet *Vinogradov*, mint ismeretes, számelméleti problémák megoldására alkotott meg), alkalmazta a valószínűségszámításban.

Eloszlásfüggvények algebrája.

Az előző fejezetben definiáltuk eloszlásfüggvények kompozícióját. Ez a művelet, amint ezt könnyű belátni, asszociatív és kommutatív, és így az összes eloszlásfüggvények erre a műveletre vonatkozólag ú. n. kommutatív félcsoportot alkotnak. A valószínűségszámítás sok jelentős problémája ennek a félcsoportnak algebrai vizsgálatára vezethető vissza. Így például *Khincsin, Lévy*[70] és mások foglalkoztak a következő problémával: meghatározandók azok az eloszlásfüggvények, amelyek felléphetnek, mint a $z_n = \frac{S_n - A_n}{H_n}$ változók eloszlásfüggvényeinek a határértéke, ahol $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ és az x_n változók mind ugyanazon eloszlással bírnak és függetlenek. Ezeket az eloszlásfüggvényeket stabilisnek szokás nevezni. A stabilis eloszlások osztálya algebrailag is jellemezhető. Eloszlásfüggvények valamely összességét zárt családnak nevezzük, ha a kompozíció művelete nem vezet ki ebből az összességből. Mármost könnyen belátható, hogy az $F(y)$ eloszlásfüggvény akkor és csak akkor stabilis, ha az összes $F(ax + b)$ alakú eloszlásfüggvények, ahol $a > 0$, b valós, zárt családot alkotnak. *Khincsin* és *Lévy*[71] meghatározták az összes stabilis eloszlásfüggvényeket, mégpedig bebizonyították, hogy ha $f(t)$ jelenti a stabilis $F(y)$ karakterisztikus függvényét, akkor $\log f(t)$ a következő alakban állítható elő:

Természetesen a *Gauss*-eloszlás a stabilis eloszlások közé tartozik, amint ezt akár a definicióból, akár a (118) előállításból

[67] Ju. V. Linnik, O tocsnoszti priblizseniia k Gaussovu raszpredeleniju szumm nyezaviszimüh szlucsainüh velicsin, IAN, 11 (1947) 111—138.

[68] C. G. Esseen, Fourier analysis of distribution functions, Acta Math. 77 (1945) 1—125.

[69] I. M. Vinogradov, Metod Trigonometricseszkih szumm v teorii csiszel, Trudi Mat. Inszt. Szteklov, XXIII. (1947) 1—108.

[70] a) A. Ja. Khincsin, Invariantnüe klasszi zakonov raszpredelenija Bull. Moszk. Univ. 1937, 4—5; b) A. Khintchine és P. Lévy, Sur les lois stables, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 202 (1936); c) P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, 1937, 1—328.

[71] Lásd [70] b).

$$(118) \qquad \log f(t) = it\gamma - \mu |t|^{\alpha} \left(1 + i\beta \frac{t}{|t|} \omega\right),$$

ahol γ valós, $0 < \alpha \leqq 2$, $\mu > 0$, $|\beta| \leqq 1$, továbbá $\omega = tg \frac{\pi \alpha}{2}$,

ha $\alpha \neq 1$ és $\omega = \frac{2}{\pi} t \log |t|$, ha $\alpha = 1$.

beláthatjuk, amely utóbbi képlet $\alpha = 2$ esetben adja a *Gauss*-eloszlás karakterisztikus függvényét, az $f(t) = it\gamma - \mu t^2$ függvényt (ez a $\Phi\left(\frac{y-\gamma}{\sqrt{\mu}}\right)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye).

A stabilis eloszlásokat magábanfoglaló szintén rendkívül fontos osztály a végtelenül osztható eloszlások osztálya. Az $F(y)$ eloszlásfüggvényt végtelenül oszthatónak nevezik, ha minden n természetes számhoz található olyan $G(y)$ eloszlásfüggvény, hogy $G(y)$ n-szer önmagával komponálva $F(y)$-t adja (azaz $G(y) * G(y) * \ldots * G(y) = F(y)$, ha a „tényezők" száma n). A véges második momentumú végtelenül osztható eloszlásfüggvények általános alakját *Kolmogorov*[72] határozta meg, az általános esetben *Lévy*[73] adta meg az általános képletet; *Kolmogorov* tétele úgy szól, hogy ha $f(t)$ egy végtelenül osztható $F(y)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye, akkor $f(t)$ előállítható a következő alakban:

$$(119) \qquad \log f(t) = i\gamma t + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ity} - 1 - ity}{y^2} \, d\,G(y),$$

ahol $G(y)$ egy tetszőleges eloszlásfüggvény. A (119) képletből speciális esetként nyerjük a *Gauss*-eloszlás karakterisztikus függvényének logaritmusát, ha $G(x)$-nek az $E(x)$ függvényt választjuk, amely a következőképpen van definiálva: $E(x) = 0$, ha $x \leqq 0$, és $E(x) = 1$, ha $x > 0$; $E(x)$ az eloszlásfüggvények félcsoportjának egységeleme.

Bawly[74] és *Khincsin*[75] kimutatták, hogy független változók oly s_n összegeinek eloszlásának határértékeként fellépő eloszlások, amely összegek minden tagja határértékben magához s_n-hez képest tetszőleg kicsiny lesz, ha $n \to \infty$, csak végtelenül

[72] A. N. Kolmogorov, Sulla forma generele di un processo stocastico omogeneo Atti Accad. naz. Lincei 15 (1931) 805—808; Ancora sulla forma generale etc. u. o. 866—869.

[73] Lásd [70] c) 190 o.

[74] G. M. Bawly, Über einige Verallgemeinerungen der Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, MSZ, 1 (1936) 917—930.

[75] A. Khintchin, Contribution à l'arithmétique de lois de distribution, Bull. Math. Univ. Moszkva, 1 (1937) 6—17. Zur Theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze MSZ 2 (1937) 79—117.

osztható eloszlások lehetnek. Igen érdekesek *Gnedenko*[76] vizsgálatai is, aki a következő problémával foglalkozott: a független és ugyanazon $F(y)$ eloszlásfüggvénnyel bíró x_n változókra képezzük az $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ összegeket; ha léteznek olyan a_n és b_n számsorozatok, hogy $\frac{s_n - a_n}{b_n} = z_n$ eloszlásfüggvénye konvergál egy $\psi(y)$ eloszláshoz, akkor azt mondjuk, hogy $F(y)$ a $\psi(y)$ eloszlásfüggvény *vonzókörébe* esik. Könnyű belátni, hogy az ilyenmódon számbajövő eloszlások (amelyek tehát vonzókörrel egyáltalán rendelkeznek) a stabilis eloszlások. Mármost *Gnedenko* meghatározta egy általános stabilis eloszlás vonzókörébe tartozó eloszlásokat. Ezek az eredmények a centrális középértéktétel problémakörének természetes általánosításának tekinthetők. Míg régebben azt hitték, és azt is igyekeztek bizonyítani, hogy a fenti vonatkozásban csak a *Gauss*-féle eloszlás szerepelhet határeloszlásként, kiderült, hogy ez nem áll fenn, hanem az összes stabilis eloszlások számbajönnek. Ennek ellenére ezek az eredmények nemhogy csökkentenék, hanem inkább még aláhúzzák a normális eloszlás jelentőségét, ugyanis *Gnedenko* eredményei azt mutatják, hogy ahhoz, hogy a normális eloszlástól különböző stabilis eloszlás vonzókörébe essék egy megadott $F(y)$ eloszlásfüggvény, igen speciális tulajdonságokkal kell rendelkeznie, míg igen általános feltételek mellett $F(y)$ a normális eloszlás vonzókörébe esik. Ettől teljesen független kérdés az, hogy a statisztikusok — más irányban — túlbecsülik általában a normális eloszlás szerepét, hiszen a normális eloszlás speciálisan additív jellegű jelenségekre vonatkozik (ahol a különböző hatások *összeadódnak),* míg például multiplikatív jelenségeknél (ahol tehát a különböző hatások *összeszorzódnak)* a logaritmikus normális eloszlás a természetes: erre szép példa a bevezetésben említett, a törésre vonatkozó *Kolmogorov*-féle eredmény.

Az eloszlásfüggvények „algebrájának" igen nehéz és nagyobbrészt még megoldatlan problémája az eloszlások faktorizációjának kérdése: vagyis az a kérdés, hogy egy megadott eloszlásfüggvényt hogyan lehet más eloszlásfüggvények kompoziciójaként előállítani. A probléma nehézségét mutatja az a tény — amelyet elsőnek *Khincsin* vett észre —, hogy az eloszlások algebrájában nincsen „egyszerűsítési szabály", azaz lehetséges, hogy $F_1 * F_3 = F_2 * F_3$, de $F_1 \neq F_2$. Érdekes eredményt ért el a faktorizáció problémája terén *Raikov*,[77] aki bebizonyította, hogy egy *Poisson*-eloszlás tényezői maguk is *Poisson*-eloszlások (egy x valószínűségi változóról akkor mondjuk, hogy *Poisson*-eloszlással bír, ha x lehetséges értékei $a_n = m + na$ alakúak $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ és x az a_n értéket

[76] B. V. Gnedenko, K teorii predelnüh teorem dlja szumm nyezaviszimüh szlucsainüh velicsin, IAN, (1939), 181—232.

[77] D. Raikov, On the decomposition of Gauss and Poisson laws, IAN, (1938), 91—120.

$p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ valószínűséggel veszi fel; itt m és a valós számok, $a \neq 0$, λ pozitív szám). Ennek megfelelő tételt a normális eloszlásra vonatkozólag *Cramér* bizonyított be.[78] *Cramér* tétele úgy szól, hogy egy normális eloszlás tényezői is csak normális eloszlások lehetnek. Az eloszlások faktorizáció-problémáiban nagy szerepet játszanak az úgynevezett irreducibilis eloszlások, azaz olyan eloszlások, amelyek nem bonthatók fel (nem triviális) tényezőkre. Egy tetszőleges eloszlásnak irreducibilis eloszlások és végtelenül osztható eloszlások szorzataként való előállítására vonatkozólag a legmesszebbmenő eredményeket *Khincsin* érte el.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a valószínűségszámítás összes ismertetett ágaiban a szovjet valószínségszámítási iskola világviszonylatban vezető és irányító szerepet visz; a szovjet matematikusok nagyjelentőségű eredményei a matematikának ezt az ágát teljesen áformálták és hatalmas mértékben kifejlesztették; nagy elvi jelentőségű és rendkívül általános elméleti eredményeiket sikerrel alkalmazták a gyakorlatban, a valószínűségszámítás alkalmazási területét óriási mértékben kibővítették és a tudomány eredményeinek alkalmazásával segítették a szocialista társadalom felépítését.

МАТЕМАТИКА В СССР ЗА ТРИДЦАТЬ ЛЕТ.
II. НОВЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Часть 1.

Настоящая статья содержит обзор некоторых из блестящих результатов Советских математиков, открывших новые направления в теорий вероятностей, относительно проблемы поведения сумм независимых или слабо зависимых случайных величин.

Часть 2. будет посвящена результатам Советской школы теорий вероятностей по теорий случайных процессов, и Часть 3. резултатам принадлежащим к математической статистике.

В начале статьи дается обзор достижений Советских учёных применяющих методы теорий вероятностей в различных областях естествознаний и техники. После этого изложены и доказаны некоторые избранные результаты, принадлежащие к следующими главами теории вероятностей: закон больших чисел для сумм независимых и слабо зависимых случайных величин и для стационарных последовательностей случайных величин; усиленный закон больших чисел; закон повторного логарифма; притяжение к закону Гаусса; устойчивые и неограниченно делимые законы расспределения.

[78] H. Cramér, Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion, Math. Zeitschr. 41 (1936), 405—414.

30 YEARS OF MATHEMATICS IN THE SOVIET UNION.

II. NEW LINES OF RESEARCH IN PROBABILITY THEORY.

Part 1.

by *Alfréd Rényi.*

The present paper contains a survey of some brilliant results of Soviet mathematicians, opening new lines of research in the theory of probability, concerning the problem of the behaviour of sums of independent or weakly dependent random variables.

The 2. part will be devoted to results of the Soviet school of probability theory concerning stochastic processes, and the 3. part to results belonging to mathematical statistics.

At the beginning of the paper a survey is given of results of Soviet scientists applying probability methods in different fields of natural sciences and engineering. Following this some selected theorems are discussed and proved, belonging to the following chapters of probability theory: the law of large numbers for independent and weakly dependent random variables, as well as for stationary sequences of random variables; the strong law of large numbers; the law of the iterated logarithm; attraction to the normal distribution; stable and indefinitely divisible distributions.