A SZOVJET MATEMATIKA 30 ÉVE.

*A Bolyai János Matematikai Társulat egyik legfontosabb céljaként tűzte maga elé, hogy a szovjet matematikusok munkásságát és eredményeit ismertesse. Ebből a célból folyóiratában cikksorozatot indít a szovjet matematika nagy eredményeiről. Alábbi tanulmány ezen cikksorozatot nyitja meg. A szovjet matematika eredményeinek ismertetésében nagy segítséget jelent az 1948-ban a Moszkvai Matematikai Társulat kezdeményezésére kiadott „A szovjet matematika 30 éve" című hatalmas, összefoglaló munka.**

I. A valószínűségszámítás megalapozásáról.

Írta: Rényi Alfréd.

Bevezetés.

A valószínűségszámítás az elmult 30 évben hatalmas fejlődésen ment keresztül. Ezt a fejlődést a valószínűségszámításnak a természettudományok területén és az iparban való alkalmazásai, a valószínűségszámítási módszerek alkalmazási területének nagymértékű kibővülése és elmélyülése tették szükségessé, az elmélet fejlődése pedig újabb alkalmazásokat tett lehetővé. A kinetikus gázelmélet, a Brown-féle mozgás elmélete, a radioaktiv bomlásjelenségek, a quantummechanika egyre újabb problémákat vetettek fel, amelyek megoldásához a klasszikus valószínűségszámítás nem volt elégséges. De nemcsak a fizika, a biológia, az orvostudomány, sőt nem egyszer a termelés közvetlen problémái is nagy számban vetettek fel kérdéseket, amelyekkel az új valószínűségszámításnak meg kellett birkóznia. A klasszikus valószínűségszámítást ki kellett bővíteni, egy új, a régitől nemcsak mennyiségileg, de minőségileg is különböző modern valószínűségszámítás kialakítása vált szükségessé. A modern valószínűségszámítás fejlődését hosszú ideig hátráltatta az, hogy a valószínűségszámítás megalapozásának kérdése tisztázatlan volt. A fejlődés során nyil-

* Ezen munka nagy vonalakban való ismertetését lásd Természet és Technika, 1949 április, 220—227. old.

vánvalóvá vált, hogy a klasszikus valószínűségszámítás logikai megalapozása hiányos, elavult és hogy ennélfogva a valószínűségszámítás exaktság és az alapfogalmak tisztázottsága szempontjából messze elmaradt a matematika többi ága mögött. Az új és gyors iramban fejlődő elméletnek biztos alapokra volt szüksége, mert az alapok körüli bizonytalanság az elmélet megbízhatóságát, áttekinthetőségét veszélyeztette. A valószínűségszámítás megalapozására irányuló kísérletek a matematikában szokatlan heves vitákat váltottak ki. Számtalan új elmélet született és a különböző elméletek hívei egymással éles hangú polémiákat folytattak. Különösen nagy harcok alakultak ki MISES tetszetős, de alapjában elhibázott elmélete körül. A valószínűségszámítás megalapozásának kérdését kielégítő módon elsőnek KOLMOGOROFF szovjet matematikusnak sikerült tisztáznia 1933-ban megjelent, „A valószínűségszámítás alapfogalmai"[1] című korszakalkotó munkájában. Habár a viták ezután sem szűntek meg, sőt még élesedtek, azonban az 1937-ben Genfben tartott nemzetközi valószínűségszámítási kongresszuson nyilvánvalóvá vált, hogy a legkiválóbb kutatók túlnyomó többsége elfogadta KOLMOGOROFF rendszerét és felismerte, hogy a KOLMOGOROFF-féle elmélet egyrészt egyszerűsége és világos logikai felépítése folytán, másrészt azáltal, hogy a gyakorlat által felvetett új problémák tárgyalására is biztos alapul szolgál, a valószínűségszámítás megalapozásának teljes mértékben kielégítő és termékeny útja. A következőkben igyekezni fogunk KOLMOGOROFF elméletének lényegét és ezen keresztül a modern valószínűségszámítás módszereit bemutatni. A valószínűségszámítás megalapozásának kérdését csak úgy láthatjuk világosan, ha azt történeti fejlődésében vizsgáljuk meg, ezért erre is részletesen kitérünk. Hogy KOLMOGOROFF rendszerének jelentőségét tisztán lássuk, összehasonlítjuk más kísérletekkel, különösen MISES és követőinek kísérleteivel. Jelen cikkünkben a szovjet matematikusoknak csak a valószínűségszámítás megalapozására vonatkozó eredményeit tárgyaljuk, a valószínűségszámítás új ágainak fejlesztése terén elért fontos eredményeit egy további cikkben fogjuk ismertetni.

Történeti áttekintés.

A valószínűségszámítás a matematikának viszonylag fiatal ága, kialakulása a XVII. század közepére tehető és elsősorban PASCAL, FERMAT és HUYGHENS nevéhez fűződik. A valószínűségszámítás történetének ezt az első fejezetét az jellemzi, hogy

[1] Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse d. Math. u. ihrer Grenzgebiete, II. 3, Berlin, Springer 1933.

tárgyát elsősorban a szerencsejátékokra vonatkozó kombinatorikus feladatok képezték. BERNOULLI JAKAB-nak az Ars coniectandi[2] című 1713-ban megjelent munkája tartalmazza a valószínűségszámítás első rendszeres tárgyalását, amely ennek a korszaknak az eredményeit rendszerbe foglalja. BERNOULLI nevéhez fűződik a nagy számok törvényének felfedezése is, amely a további fejlődés kiindulópontja volt. A valószínűségszámítás történetének következő fejezetét — a XVIII. században és a XIX. század első felében — az jellemzi, hogy a valószínűségszámítás ezen korszakának nagy mesterei — BAYES, MOIVRE, LEGENDRE, LAPLACE és GAUSS — a matematikai analizis időközben kifejlődött módszereit alkalmazzák a valószínűségszámításra. Ez fejeződik ki ezen korszak legnagyobb valószínűségszámítási művének, LAPLACE Théorie analytique des probabilités című 1812-ben megjelent munkájának a címében is. A XIX. század második felében a valószínűségszámítás fejlődésében Nyugat-Európában törés állott be. Erre az időre esik a matematika szabatos megalapozására irányuló törekvés, amely teljesen átformálta a matematikát, azonban ebből az átalakulásból a valószínűségszámítás kimaradt, annyira hogy egyesek a valószínűségszámítást nem is számították a matematikához, hanem valami különleges helyet tulajdonítottak neki a tudományok között. Ez mutatkozik meg például abban is, hogy F. KLEIN a matematika fejlődéséről a XIX. században szóló nagy munkájában[3] egy szóval sem emlékszik meg a valószínűségszámításról. A valószínűségszámítás fejlődésének megakadására jellemző az is, hogy ebben az időben a fizika — különösen a statisztikus mechanika — által felvetett új problémák matematikai feldolgozása is csak kis mértékben történt meg. Ebben az időben lényeges előrehaladást kizárólag az orosz valószínűségszámítási iskola nagy mesterei: CSEBISEV, MARKOFF és LJAPUNOFF értek el, akiknek a munkássága a XX. században megindult nagy fejlődés alapjául szolgált. A XX. században megújuló valószínűségszámítást elsősorban az alkalmazási területek kibővülése jellemzi. Ennek következtében nőtt meg nagymértékben az érdeklődés világszerte a valószínűségszámítás problémái iránt. A modern valószínűségszámítás megalkotói közül első helyen E. BOREL-t kell megemlítenünk. BOREL[4] ismerte fel

[2] Ostwalds Klassiker der Exacten Wissenschaften, Nr. 107, 108, Leipzig, Engelmann, 1899.

[3] Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Berlin, Springer 1926.

[4] Sur les probabilités dénombrables, Rendiconti di Palermo, 27, 1909. 247—271.

elsőnek a valószínűség és mérték fogalmainak mély kapcsolatát és indította el ezzel azt a fejlődést, amely éppen KOLMOGOROFF-nál érte el tetőpontját. A modern valószínűségszámítás fejlődése elválaszthatatlanul összekapcsolódik a mérték és integrál fogalmainak fejlődésével, amelynek modern elméletét elsőnek LEBESGUE alkotta meg. A valószínűségszámítás fejlődése szempontjából döntő jelentőségű volt FRÉCHET munkássága is, aki a LEBESGUE-féle mérték és integrál fogalmát kiterjesztette absztrakt terekre. Nagy szerepe volt a modern valószínűségszámítás kialakításában PÓLYA GYÖRGY-nek, akinek az 1912-ben megjelent „A valószínűségszámítás néhány kérdéséről és bizonyos velök összefüggő határozott integrálokról" című disszertációja egy sereg fontos gondolatot tartalmaz, amelyek azóta alapvetővé váltak és későbbi dolgozatai is nagy hatással voltak a valószínűségszámítás fejlődésére. A XX. század első évtizedeiben S. BERNSTEIN és R. v. MISES munkássága volt a legjelentősebb. S. BERNSTEIN-nek, a szovjet valószínűségszámítási iskola alapítójának értékes munkássága kiterjed a valószínűségszámítás szinte minden lényeges kérdésére. MISES jelentősége, a mellett hogy sok értékes eredménnyel gyarapította a valószínűségszámítást, főképpen abban áll, hogy munkáival[5] széles körökben felkeltette az érdeklődést a valószínűségszámítás szabatos megalapozásának kérdése iránt és ezt az érdemét az sem csökkenti, hogy az általa javasolt út zsákutcába vezetett. Mióta KOLMOGOROFF-nak sikerült a valószínűségszámítás megalapozásának kérdését tisztázni, a valószínűségszámítás fejlődése útjából minden akadály elhárult és az elmélet az elmult években egyre gyorsabb ütemben fejlődött tovább. Fejlesztésében vezető szerepet visznek a szovjet matematikusok, akik közül a már említett KOLMOGOROFF-on és BERNSTEIN-en kívül — a nélkül, hogy teljességre törekednénk — megemlítjük KHINCSIN SZLUCKI, PETROVSZKI, GNEDENKO, GLIVENKO, ROMANOVSZKI, RAIKOV és LINNIK neveit, akiknek munkásságát egy következő cikkben fogjuk ismertetni. A felsoroltakon kívül megemlítjük még P. LÉVY, H. CRAMÉR, W. FELLER, M. KAC, H. STEINHAUS, E. MARCZEWSKI és ERDŐS PÁL neveit, azok közül, akik az utóbbi években jelentős eredményeket értek el a valószínűségszámítás terén.[6]

[5] pl. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig u. Wien, Deuticke, 1931.

[6] A legutóbbi évek irodalmára vonatkozólag jó összefoglalást adott H. Cramér az 1946-ban a princetoni konferencián tartott beszámolójában, l. Annals of Math. Statistics, XVIII., 2. 1947, 165—193, ahol részletes irodalmi utalásokat is ad.

A valószínűség klasszikus fogalma.

A valószínűség klasszikus, naiv definiciója a következőképpen hangzik: valamely esemény valószínűségén értjük az esemény bekövetkezése szempontjából kedvező esetek számának és a lehetséges összes esetek számának hányadosát. Ezen definició értelmében valamely esemény valószínűsége 0 és 1 közé eső racionális szám. Ez a definició feltételezi, hogy az összes számbajövő esetek egyformán lehetségesek; sok félreértésre adott okot, hogy ezt nem mindig hangsúlyozták ki kellőképpen. Ennek a naiv definiciónak a modern kritikusai szinte kivétel nélkül megjegyzik, hogy ez a definició logikai circulus vitiosust tartalmaz. Hiszen az, hogy „egyenlően lehetséges", lényegében ugyanazt jelenti, mint „egyenlően valószínű", úgyhogy a valószínűség fenti definiciója feltételezi, hogy el tudjuk dönteni, hogy különböző események egyformán valószínűek még mielőtt a valószínűség fogalmát definiáltuk volna. Nem kétséges, hogy itt bizonyos logikai nehézséggel állunk szemben, bár azokban a speciális esetekben, amelyekkel a klasszikus elmélet foglalkozott, általában bizonyos szimmetria tulajdonságok felhasználásával ez a nehézség áthídalható. Például egy játékkockánál — amennyiben valóban szabályos kocka alakja van és anyaga homogén — szimmetria okokból feltehetjük, hogy egyformán lehetséges az, hogy bármelyik lapjára essék a 6 közül. Meg kell jegyezni azonban, hogy a valószínűségszámítás XVIII. és XIX. századbeli művelői, akik szintén látták már az említett logikai nehézséget, ezt a „hiányzó ok elvére" való hivatkozással próbálták áthídalni, például azt mondták, hogy azért egyenlően lehetséges a kockánál mind a hat lap, mert „semmi ok nincs arra, hogy inkább essék az egyik lapjára, mint a másikra". Mondani sem kell, hogy ez az állítólagos „elv" a nehézséget semmiképpen nem oldja meg. Azonban nem ez az egyetlen hiányossága a valószínűség klasszikus definiciójának, hanem sokkal súlyosabb nehézségek is fellépnek. Ez a definició például egyáltalán nem alkalmazható abban az esetben, ha a szóbanforgó lehetőségek nem egyformán lehetségesek. Hogy az előbbi példánál maradjunk, tegyük fel, hogy kocka helyett egy hatoldalú ferde hasábot veszünk, vagy szabályos alakú, de inhomogén tömegeloszlású kockával dobunk — mondjuk olyan kockával játszunk, amely két részből van összeragasztva, az egyik rész ólomból, a másik fából van. Ezekben az esetekben a valószínűség fenti naiv definiciója nem alkalmazható.[7] Ha-

[7] Hasonlóképpen nem alkalmazható a klasszikus definició például az életbenmaradási, halálozási valószínűségekre, amelynek folytán a klasszikus valószínűségszámítás és a már régóta kifejlődött biztosítási matema-

sonló nehézségek léptek fel az ú. n. „geometriai valószínűség" fogalmával kapcsolatban. Tegyük fel például, hogy egy zárt udvarra egy emeleti ablakból vaktában pénzdarabokat dobunk. Krétával körülkerítjük az udvar egy részét és azt kérdezzük, mi a valószínűsége annak, hogy egy pénzdarab a körülkerített részbe essék? Vagy vegyük BUFFON klasszikus problémáját: egy papírlapon egyenlő távolságban párhuzamos egyeneseket húzunk és vaktában egy tűt dobunk a papírlapra; mi a valószínűsége, hogy a tű úgy helyezkedik el, hogy egy, két, három, stb. vonalat metsz? Ilyen típusú feladatok megoldása bizonyos esetekben sikerült a klasszikus definició alapján is, határátmenet segítségével. Ebből a célból azonban be kellett vezetni az aritmetikai és geometriai valószínűségek teljesen természetellenes különválasztását. A geometriai valószínűségek elméletének ugyan értékes mellékhajtásaként kialakult CROFTON óta az ú. n. integrálgeometria, de magának a valószínűségszámításnak a fejlődése szempontjából a diszkrét és folytonos eset különválasztása káros volt és a modern valószínűségszámítás egyik eredménye, hogy ezt a megkülönböztetést — az integrálfogalom STIELTJES-féle általánosításának felhasználásával — sikerült kiküszöbölni.[8] A valószínűségszámításnak szorosan a klasszikus definicióhoz ragaszkodó felépítései közül a legsikerültebb S. BERNSTEIN axiomatikus rendszere. BERNSTEIN rendszere a valószínűségek összehasonlításának axiomáján épül, tehát azon a feltevésen, hogy bármely két esemény valószínűsége összehasonlítható (azaz eldönthető, hogy melyik valószínűbb). BERNSTEIN elméletének egyik érdekessége, hogy rendszerében a valószínűség számszerű mértéke mint önkényes feltevés jelenik meg és ezzel kapcsolatban rámutat arra, hogy logikailag kifogástalan rendszert kaphatunk úgy is, hogy például — a klasszikus definició terminológiáját használva — egy esemény valószínűségét mint a kedvező és kedvezőtlen esetek számának hányadosát definiáljuk; ebben az esetben persze

tika között nem volt meg az összhang. Itt jegyezzük meg, hogy a biztosítási matematikában fellépő valószínűségek nem illenek bele a később tárgyalandó, a valószínűséget mint a gyakoriság határértékét definiáló rendszerekbe sem, míg Kolmogoroff rendszere ezen a területen ugyanolyan sikerrel alkalmazható, mint például a fizika problémáiban.

[8] A gyakorlatban fellépnek olyan esetek is, amelyek az aritmetikai és geometriai valószínűségek eseteit vegyesen tartalmazzák. A modern elméletben ez semmi nehézséget nem okoz, és csak annyit jelent, hogy a szóbanforgó eloszlásfüggvény olyan monoton függvény, amelynek Lebesgue-féle felbontása tartalmaz egy abszolut folytonos függvényt és egy ugrásfüggvényt is.

egy esemény valószínűségét nem egy 0 és 1 közé eső szám, hanem tetszőleges nemnegatív szám fejezi ki és a bizonyosságnak végtelen nagy valószínűség felel meg.[9] BERNSTEIN vizsgálatai sokban hozzájárultak a fogalmak tisztázásához, azonban a valószínűségszámítás fejlődése szükségessé tette olyan elmélet kiépítését, amely a klasszikus definiciótól lényegesen eltér. A következőkben az erre irányuló kísérleteket fogjuk ismertetni.

A valószínűség mint a gyakoriság határértéke.

Induljunk ki a legegyszerűbb példából, a fej-vagy-írás játékból. Amikor azt mondjuk, hogy egy szabályos pénzdarabbal való dobásnál a „fej" valószínűsége ½, ez természetesen nem jelenti azt, hogy ha ugyanazzal a pénzdarabbal nagy számú dobást hajtunk végre, akkor felváltva kapunk „fejet" és „írást", de még azt sem, hogy páros számú dobásnál a dobások számának a felében kapunk írást és a felében fejet. Azt azonban várhatjuk, hogy a dobások számának körülbelül a felében jön ki írás. Mi ennek az állításnak a precíz tartalma? Erre először BERNOULLI adott választ híres tételével, a nagy számok róla elnevezett törvényével. Ez azt mondja ki, hogy annak a valószínűsége, hogy az „írás" gyakorisága (azaz azon dobások száma, amelyekben „írás" jön ki, osztva az összes dobások számával) egy tetszőlegesen kicsiny megadott pozitív számnál kevesebbel térjen el ½-től, tetszőlegesen közel lesz 1-hez (a bizonyossághoz), feltéve, hogy a dobások száma elég nagy. Más szóval, ha n jelenti a dobások számát és k azon dobások számát, amelyekben „írás" jött ki, annak a valószínűsége, hogy az írás gyakoriságának és való-

[9] I. Bernstein, Teoria verojatnostei, Ogiz, Gosztechizdat, Moszkva—Leningrád 1946, 4. kiadás, 7—21. Ha n jelenti az összes esetek számát és k a kedvező esetek számát, Bernstein szerint a szóbanforgó esemény valószínűségén az $F\left(\frac{k}{n}\right)$ számot értjük, ahol $F(x)$ valamely megadott monoton növekvő nemnegativ függvény. Ha $F(x)$-nek az $\frac{x}{1-x}$ függvényt választjuk, akkor jutunk a szövegben említett alternativ definicióhoz. Az $F(x)$ függvény megválasztását Bernstein célszerűségi meggondolásokkal dönti el. Ugyanis, ha $x = G(y)$ jelenti az $y = F(x)$ függvény inverz függvényét, továbbá ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ egymást kölcsönösen kizáró események valószinűségei $p_1, p_2, \ldots, p_n$, akkor annak a valószinűségét, hogy az $A_1, \ldots, A_n$ események valamelyike bekövetkezzék, az $F(G(p_1) + G(p_2) + \ldots + G(p_n))$ kifejezés adja meg, amiből látható, hogy az addiciótétel akkor nyeri el legegyszerűbb alakját, ha $F(x) = x$.

színűségének különbsége, tehát $\frac{k}{n} - \frac{1}{2}$ abszolut értékben kisebb legyen egy tetszőleges kis pozitiv számnál, 1-hez konvergál, ha n végtelenhez tart. Fontos megjegyezni, hogy ez a tétel nem állítja, hogy k/n konvergál ½-hez, ha n végtelenhez tart, hanem annál kevesebbet mond ki. Itt a konvergencia egy gyengébb válfajáról van szó, amely közel áll a valós függvénytanban használatos „aszimptotikus konvergencia" fogalmához,[10] ugyanis a tétel nem zárja ki, hogy k/n lényegesen eltérjen 1/2-től tetszőlegesen nagy n-re, hanem csak annyit állít, hogy ez igen valószínűtlen. BOREL és CANTELLI kimutatták, hogy a szóbanforgó esetben — az úgynevezett BERNOULLI-féle esetben — több is igaz, mégpedig fennáll a nagy számok ú. n. erős törvénye, (amellyel összehasonlítva a BERNOULLI-tételt szokás a nagy számok gyenge törvényének is nevezni). BOREL tétele szerint annak a valószínűsége, hogy k/n konvergáljon 1/2-hez, ha n végtelenhez tart, 1-gyel egyenlő, másszóval annak a valószínűsége, hogy k/n ne konvergáljon 1/2-hez, 0 val egyenlő. Azonban előfordulnak olyan esetek is, amikor a nagy számok gyenge törvénye fennáll, de az erős törvény nem. Mindebből azonban látható, hogy egy esemény valószínűsége és gyakorisága között szoros kapcsolat áll fenn: a gyakoriság bizonyos — szűkebb vagy tágabb — értelemben közeledik a valószínűséghez, ha a kísérletek számát növeljük.

A valószínűségszámításnak azon rendszerei, amelyekről most beszélni fogunk, azzal jellemezhetők, hogy a valószínűség és gyakoriság fogalmainak szerepét felcserélik, és egy esemény valószínűségét mint a gyakoriság határértékét definiálják. Az első ilyen elmélet MISES-től származik,[5] a későbbi elméletek, bár bizonyos pontokon javították és módosították MISES rendszerét, ugyanazon a felfogáson alapulnak. MISES elmélete a következőképpen jellemezhető: ahhoz, hogy egy esemény valószínűségéről beszélhessünk, előbb meg kell adni egy kollektivumot. Kollektivum alatt MISES a kísérletek egy végtelen sorozatát érti, amely kísérletek mindegyikéhez egy ismertető jegy van hozzárendelve. Hogy a fent tárgyalt példánál maradjunk, egy pénzdarabbal való dobások végtelen sorozatában minden dobáshoz rendeljük hozzá az F vagy I betűt, a szerint, hogy a dobás eredménye „fej" vagy „irás"; így egy kollektivumot kapunk. Egy ismertető jegy valószínűségén MISES az illető jegy gyakoriságának határértékét érti. Mielőtt tovább mennénk, már itt meg kell jegyeznünk, hogy MISES ilyen módon csak oly sorozatokkal foglalkozik, ahol létezik a gyakoriság határér-

[10] A Kolmogoroff-féle elméletben a két fogalom teljesen azonos.

téke és ezáltal a valószínűségszámítás alkalmazási területét szükségtelenül megcsonkítja. Amint PÓLYA GYÖRGY igen találóan megjegyzi:[11] „Mindazok a szerzők, akik a valószínűséget mint a gyakoriság határértékét akarják definiálni, több-kevesebb világossággal feltételezik, hogy nemcsak BERNOULLI tétele, hanem egy annál erősebb tétel is fennáll". Ennél sokkal súlyosabb nehézségeket okoz MISES második axiomája, amelyre elméletének felépítéséhez szüksége van. MISES felteszi, hogy ha a szóbanforgó kollektivúmból kiválasztjuk a kísérleteknek egy tetszőleges részsorozatát, és ebben a részsorozatban vizsgáljuk valamely ismertető jegy gyakoriságát, ez a gyakoriság konvergál, mégpedig ugyanahhoz a határértékhez, mint a teljes kollektivum esetében. MISES ezt a feltevést a rendszertelenség elvének, vagy a játékrendszer lehetetlensége elvének nevezi. Erre a feltevésre MISESnek azért van szüksége, mert ezáltal akarja kizárni az olyan sorozatokat, amelyekben a szóbanforgó ismertető jegy előfordulása valamilyen szabályosságot mutat, ugyanis a gyakorlati tapasztalatok azt mutatják, hogy a valóságban ilyen szabályosság nem fordul elő. Hivatkozik arra, hogy például a Monte Carlo-i kaszinóban sok játékos éppen azon ment tönkre, hogy ilyen szabályosság létezését feltételezte; ez indokolja a „játékrendszer lehetetlensége" elnevezést.[12] MISES arra törekszik, hogy ezzel az axiomával elméletét az olyan sorozatok vizsgálatára korlátozza, amelyeket a véletlen valóban létrehoz. Ezzel kapcsolatban BOREL[13] kritizálja MISES eljárását, és azt igyekszik bizonyítani, hogy az emberi agy nem képes a véletlent utánozni. BOREL-nek kétségtelenül igaza van abban, hogy MISES túlságosan merev és szkematikus módon igyekszik a véletlent matematikai modellel ábrázolni, azonban megjegyzése félreértésekre adhat okot és a véletlen fogalmának misztikus, irracionalista felfogását eredményezheti. Jelen ismertetés kereteiben nem térhetünk ki részletesen a természetben tapasztalt valószínűségi törvények és a kauzalitás viszonyára, csak félreértések elkerülése végett kívánjuk leszögezni, hogy a természetben tapasztalt valószínűségi törvényszerűségek egyáltalán nincsenek ellentétben a természet deter-

[11] Eine Ergänzung zu dem Bernoullischen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Nachrichten d. Ges. Wiss. Göttingen, 1921.

[12] Mises a játékrendszer lehetetlenségének elvét (nem tudni miért) párhuzamba állítja a perpetuum mobile lehetetlenségével a mechanikában, 1. 5. 1. c. 4. oldal.

[13] E. Borel, Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications, Tome IV, Fasc. III. Valeur practique et philosophie des probabilités, 82—84. o.

minista, materialista felfogásával, sőt azt nagymértékben alátámasztják. A valószínűségszámításnak nemcsak hogy nincsen szüksége a véletlen fogalmának irracionális értelmezésére, hanem azt egyenesen ki is zárja; éppen abban áll a valószínűségszámítás feladata, hogy a véletlen jelenségek területén is kimutassa a természet szigorúan determinisztikus törvényszerűségeit. Nagyon tanulságos ebből a szempontból H. STEINHAUS egyik legújabb dolgozata,[14] amelyben azt a problémát vizsgálja, hogy ha egy kockaalakú zárt edényben nagyszámú elasztikus golyó van, amelyeknek kezdő helyzetét és kezdeti sebességét ismerjük, milyen lesz a golyók eloszlása az edényben egy bizonyos idő elteltével (amely idő alatt a golyók sokszor keresztülrepülték a kockát és rugalmas ütközést szenvedtek a falakon). STEINHAUS kimutatja, hogy ebben az esetben — amelynek fontos fizikai alkalmazásai vannak —, a golyók eloszlása elegendő idő elteltével jólismert statisztikus eloszláshoz fog közeledni. STEINHAUS rámutat annak a jelentőségére, hogy minden egyes golyó pontos helyét egy tetszőleges időpillanatban kezdeti helyzetéből és sebességéből egyszerű képlettel pontosan ki tudjuk számítani. Ezzel kapcsolatban megállapítja, hogy „ez a modell tehát két tulajdonságot egyesít magában, amelyeket sokan összeférhetetlennek tartottak: a mozgás szigorúan determinált jellegét és a statisztikus eloszlást". Ilyen módon — folytatja STEINHAUS — „példánk alkalmas arra, hogy megcáfolja azt az előítéletet, hogy a determinisztikus és statisztikus felfogás nem egyeztethető össze", továbbá megállapítja, hogy „ez az egyszerű példa cáfolatául szolgálhat annak az eléggé elterjedt előítéletnek, hogy a kezdeti állapot ismeretlensége az a mágikus erő, amely szükséges ahhoz, hogy a statisztika törvényszerűségei érvényesüljenek". STEINHAUS példája valóban igen alkalmas arra, hogy a szóbanforgó kérdést tisztázzuk. Valójában az a helyzet, hogy a valószínűségszámítás statisztikus törvényszerűségei fellépnek ott, ahol nagyszámú, egymástól független, vagy egymással csak laza kapcsolatban álló, egyenkint kishatású jelenség együttes hatását vizsgáljuk; teljes mértékben másodrendű jelentőségű kérdés, hogy az egyes jelenségek pontos lefolyását ismerjük-e vagy nem, az eredményeként fellépő statisztikus eloszlást ez semmiképpen sem befolyásolja. Akár ismerjük az egyes jelenségek lefolyását, akár nem, ezek a természetben mindenképpen szigorúan meghatározott törvényszerűségek szerint foly-

[14] Sur les fonctions indépendantes VII, Studia Mathematica, 12, 1949, 1—20. o. A problémát először König Dénes és Szűcs Adolf vetették fel, Rendiconti di Palermo 36, 1913, 79—83. o.

nak le. Bizonyos esetekben mérési módszereink korlátozott lehetőségei folytán mi csak az eredményként adódó összlefolyását tudjuk a jelenségnek regisztrálni, más esetekben viszont — mint például a STEINHAUS által felhozott példában — az összetevőket is pontosan ismerjük.

Visszatérve ezek után a MISES-féle második alpfeltevésre, a rendszertelenség elvére, megállapíthatjuk, hogy ez a feltevés nemcsak erős megszorítást jelent, hanem súlyos logikai ellentmondásokra vezet. Ha ugyanis az említett részsorozat kiválasztását illetőleg semilyen megszorítást nem teszünk, akkor meg kell engednünk olyan részsorozat kiválasztását is, amely éppen azokból a kísérletekből áll, — hogy példánknál maradjunk — amelyekhez *F* van rendelve. Ebben a részsorozatban *F* gyakorisága természetesen 1; ha viszont a kísérletek azon részsorozatát választjuk, amelyekhez *I* van rendelve, ebben a részsorozatban *F* gyakorisága 0, feltéve, hogy mindkét részsorozat végtelen sok kísérletből áll. Ha tehát semmiféle megszorítást nem teszünk a részsorozatokra vonatkozólag, akkor a triviális esetektől eltekintve (amikor véges kivétellel minden kísérlethez ugyanaz a jegy van rendelve) egyáltalán nem létezhet olyan kollektivum, amely MISES feltételeinek eleget tesz. Ezen a ponton támadták leginkább MISES elméletét és a mentési kísérletek is ekörül a kérdés körül forogtak. MISES maga először azt a megszorítást tette, hogy csak olyan részsorozatokban köti ki a határérték létezését, amelyeknél annak eldöntésénél, hogy az *n*-ik kísérlet a kiválasztottak közé tartozzék-e, ezen kísérlet eredményére nem vagyunk tekintettel, azonban nem sikerült neki bebizonyítani, hogy ezen feltételnek eleget tevő nem triviális kollektivumok valóban léteznek.[15] Ugyancsak nem sikerült eddig senkinek kimutatni, hogy létezik olyan kollektivum, amely eleget tesz a MISES-féle feltételeknek, ha a megengedett részsorozatok összessége kontinuum számosságú. MISES egyik követője, WALD, azonban bebizonyította,[16] hogy ha az egész számok részsorozatainak csak egy megszámlálható *W* halmazára kívánjuk meg a gyakoriság határértékének létezését, akkor léteznek kollektivumok, amelyek ezen feltételt kielégítik. WALD ebből kiindulva a MISES-féle elmélet egy javított formáját adta meg, amely ugyan már logikailag

[15] A. Church (On the concept of a random sequence, Bulletin of the Amer. Math. Soc. 46 No. 1, 1940, 130—135. o.) igyekezett bebizonyítani, hogy a Mises-féle értelemben nem létezhet (nemtriviális) kollektívum, azonban bizonyítása nem meggyőző.

[16] A. Wald, Die Widerspruchsfreiheit des Kollektivbegriffs, Actualités Scientifiques et Industrielles 735, Paris, Hermann, 1938. 79—99. o.

nem vezet ellentmondásra, azonban meglehetősen bonyolult. WALD elméletében a részsorozatok W halmazának választása teljesen önkényes, és ilyen módon nem egy, hanem kontinuumnyi számosságú különböző valószínűségszámítási rendszert kapunk, ami legkevésbbé sem mondható természetesnek. Amint FRÉCHET a genfi kongresszuson megállapította:[17] „... WALD munkássága hozzájárult ahhoz, hogy MISES elméletét logikailag összefüggő építménnyé tegye, azonban ezt csak úgy tudta elérni, hogy megfosztotta ezt az elméletet egyszerű és szemléletes jellegétől, amellyel rendelkezett és amely sokakat megtévesztett". Ugyanezt a véleményt vallja H. CRAMÉR is,[18] amikor megállapítja, hogy „bár kétségtelenül az ilyen típusú" (t. i. a valószínűséget mint a gyakoriság határértékét értelmező) „definició első látásra igen megkapó, azonban bizonyos matematikai nehézségeket hord magában, amelyek jórészt megfosztják látszólagos egyszerűségétől. E mellett a valószínűség ilyen definiciója tapasztalati és elméleti elemek összekeverését jelenti, amit a modern axiomatikus elméletek általában kerülni szoktak. Hasonlít például ahhoz, amikor egy geometriai pontot mint egy minden határon túl csökkenő kiterjedésű krétafolt határértékét akarnánk definiálni".[19] CRAMÉR itt igen jól rámutat a MISES-féle elméletnek nemcsak alapvető hibáira, hanem meglátja ezek okát is. Valóban ez a helyzet, hogy MISES elmélete azért kellett hogy bonyodalmakra vezessen, mert kiindulópontja alapjában helytelen. Hogy ezt beláthassuk, ki kell térnünk a matematika és alkalmazásainak viszonyára általában.

[17] M. Fréchet, Exposé et discussion de quelques recherches récentes sur les fondements du calcul des probabilités, Actualités Scientifiques et Industrielles, 735, Paris, Hermann, 1938. 29. o.

[18] H. Cramér, Mathematical methods of statistics, Princeton, 1946, 150. o.

[19] Az ilyen tipusú ú. n. empirikus geometria Pasch-tól és Hjelmslevtől származik. Az empirizmus igen divatos volt a fasiszta Németországban és Olaszországban, különösen B. Mania és H. Dingler képviselték ezt az irányzatot. Dingler maga határozta meg ennek az irányzatnak a helyét, amikor azt írta: „A geometria megszünt megismerés lenni, hanem tetté vált. Ezen új geometria irányában való törekvés része annak az általános irányzatnak, amely a mai Németországban a külső formalizmustól a belső tartalom (?) irányába halad, ... és része a bolsevizmus elleni ... nemzeti forradalomnak". (H. Dingler, Die Grundlagen der Geometrie 1933.) E. Kolman, Predmet i metod szovremennoi matematiki (A modern matematika tárgya és módszere) című 1936-ban Moszkvában megjelent munkájában rámutat ennek az irányzatnak gyökerében reakciós, tudományellenes jellegére.

A probléma elvi háttere.

A matematikának a természettudományokban és a technikában való alkalmazásait objektív, materialista szempontból vizsgálva, a következő alapvető mozzanatokat állapíthatjuk meg: A gyakorlatban felmerülnek olyan problémák, amelyek megoldása matematikai módszereket igényel. A matematikusok a különböző gyakorlati kérdések kapcsán felmerülő, hasonló logikai struktúrájú feladatokból kihámozzák azt, ami bennük közös, a gyakorlati feladatok matematikai magvát, és ebből kiindulva absztrakt matematikai elméletet építenek fel. Az elvont matematikai elmélet a valóságnak mindig egy leegyszerűsített modelljével foglalkozik. Ezt a modellt a matematikusok úgy igyekeznek megválasztani, hogy minél jobban hozzásimuljon a valósághoz, arról minél hűbb képet adjon.[20] Végül is a matematikai elmélet eredményeit alkalmazzák gyakorlati problémákra, gyakran olyan területeken is, melyekre az elmélet megalkotói nem is gondoltak. A kiindulásul szolgáló feltevéseket állandóan javítják, módosítják, hogy a matematikai modellt minél pontosabban hozzáidomítsák a valósághoz. A kiindulási pont helyességét végső fokon az elmélet alkalmazhatósága dönti el. Ilyen módon az absztrakció a matematika lényegéhez tartozik, célja, hogy a matematika eredményeit minél általánosabbá, minél szélesebb körben alkalmazhatóvá tegye. Az absztrakció a matematikában tehát nem jelent eltávolodást a valóságtól, hanem éppen ellenkezőleg, a matematikának a valóságra való alkalmazását, tehát a természet megismerését és az ember szolgálatába állítását szolgálja. Az absztrakció és a gyakorlat viszonya a matematikában az ellentétek dialektikus egységének egyik legszebb példája. Az elmondottakat ENGELS ismerte fel elsőnek. ENGELS az Anti-Dühringben a következőket mondja:[21] „Mint minden más tudomány, a matematika is az emberek *szükségleteiből* származott... A fejlődés egy bizonyos fokán azonban, mint a gondolkodás valamennyi területén, a valóságos világból absztra-

[20] Más kérdés, amelyre itt nem térhetünk ki hosszabban, hogy a kutatók maguk néha látszólag önmagáért, az alkalmazásokra való tekintet nélkül foglalkoznak a matematika egyes problémáival, és ennek folytán magát a matematikát is öncélú spekulációnak tartják. Az ilyen nézetek társadalmi hátterére találóan rávilágít Alexits György és Fenyő István munkája (Matematika és dialektikus materializmus, Szikra, Budapest, 1948.).

[21] F. Engels, Hogyan forradalmasítja Eugen Dühring úr a tudományt. („Anti-Dühring“). Idegennyelvű Irodalmi Kiadó, Moszkva, 1947, 57—58. oldal.

hált törvények elválasztódnak a valóságos világtól, vele, mint önálló valamik, mint kivülről jött törvények állíttatnak szembe, amelyek szerint a világnak igazodni kell... így és nem máskép alkalmazzák utólag a világra a tiszta matematikát, bárha éppen ebből a világból kölcsönözték ki s a világ összetételi formáinak csak egy részét képezi — és éppen *csakis e miatt* alkalmazható egyáltalán." ENGELS és vele együtt mindenki, aki a dialektikus materializmus módszerével vizsgálja a kérdést, világosan látja, hogy az absztrakció a matematika sajátos és nélkülözhetetlen módszere. Amint ALEXITS GYÖRGY és FENYŐ ISTVÁN megállapítják:[22] „Ha az alapvető matematikai fogalmak... eredetét vizsgáljuk, arra az eredményre jutunk, hogy ezek mind a tapasztalati világból származnak, annak bizonyos jegyeinek és tulajdonságainak elvonatkoztatása (absztrakciója) révén". Ugyanezt írja KOLMAN is:[23] „A matematika egyedül lehetséges módszere abban áll, hogy a valóságos világból kiemeli annak mennyiségi viszonylatait és térbeli formáit, egyre fokozottabb absztrakció útján". Ezt a felfogást csak az vonhatja kétségbe, aki idealista szemlélettel közeledik a kérdéshez. Amint KOLMAN kifejezi:[24] „Az, aki minden létezőt, minden tapasztalatot, minden elméletet saját akarata szüleményének tekint, az természetesen nem tud mit kezdeni az absztrakció fogalmával". Valóban, aki az anyagi világ tudatunktól független létezéséből indul ki, nem riad vissza attól, hogy ennek a világnak bizonyos jegyeit absztrahálja, míg aki idealista, pozitivista, empirista szemléletet vall, az ettől idegenkedik, és nem a világot, hanem „tapasztalatainkat" igyekszik leírni és ábrázolni. Utóbbi kategóriába tartozik MISES elmélete is. Nagyon helyesen állapítja meg W. FELLER:[25] „Valóban a modern elméletek (itt FELLER elsősorban KOLMOGOROFF elméletére céloz) konkrét problémákból alakultak ki, és a nehezebb problémák tárgyalásához egy általános axiomatikus felépítés, amely az additiv halmazfüggvény fogalmán alapszik, teljesen nélkülözhetetlen... Úgy tűnik, hogy a modern fejlődés kritikája jórészt félreértésen alapszik (itt FELLER céloz MISES követőinek KOLMOGOROFF elméletével szemben felhozott kifogásaira) és sokat nyerünk azáltal, ha a tisztán matematikai és gyakorlati problémákat világosan megkülönböz-

[22] Alexits György és Fenyő István, Matematika és dialektikus materializmus, 34. o.

[23] Kolman, Predmet i metod szovremennoi matematiki, 11. o.

[24] u. o. 286—287. o.

[25] W. Feller, Sur les axiomatiques du calcul des probabilités et leurs relations avec les experiences, Actualités Sc. et Ind. 735, 8. o.

tetjük, olyan metodológiai elvek alapján, amelyek az alkalmazott matematika minden más ágában általánosan elfogadottak, és amelyek ma már csak a valószínűségszámítás területén képezik vita tárgyát". FELLER fenti kijelentése a genfi kongresszuson tartott előadásából származik, amelyben rendkívül világos logikával mutatott rá a MISES-féle elmélet alapvető hibáira. Felhívja a figyelmet arra a körülményre, hogy MISES és követőinek látszólagos „gyakorlati" kiindulásának mennyire semmi köze sincsen a gyakorlathoz, hiszen kiinduláspontját végtelen sok kísérletből álló kollektivumok alkotják, míg természetesen a gyakorlatban mindíg csak véges kísérletsorozatokkal van dolgunk. Rámutat arra is, hogy semmi szükség nincsen arra, hogy a valószínűségszámítás területén eltérjünk azoktól az elvektől, amelyek a matematika más területein használatosak, és például előre megkössük az elmélet alkalmazási területét. „Csak a valószínűségszámításban igyekeznek egyesek az elmélet alkalmazási területét előre körülhatárolni azáltal, hogy a valószínűség nominális definicióit adják meg. Ilyen módon nem érhetünk el mást, minthogy több-kevesebb pontossággal leírjuk a jelenségeknek egy olyan csoportját, amelyre az elmélet már beigazolást nyert. Lényegében az összes nominális definicók erre vezetnek; például a MISES által javasolt elmélet nem más, mint a valószínűségszámítás klasszikus alkalmazási területeinek eléggé szemléletes leírása... Azonban más területeken MISES felfogása elveszti természetességét és ha ragaszkodunk hozzá, ezzel feleslegesen megszorítjuk az alkalmazási lehetőségeket".[26] FELLER utal arra, hogy a rádioaktív folyamatoknál, a diffuzió-problémákban, a telefonhálózat terhelésének problémáiban a valószínűségnek MISES-féle definiciója semmiképpen sem alkalmazható. Ugyanebben az előadásában FELLER igen találó kritikát mond MISES egyik követőjének, TORNIER-nek az elméletéről, amelyre még visszatérünk.

Ami MISES elmélete kiinduláspontjának elvi kritikáját illeti, megállapíthatjuk, hogy MISES elmélete összekeveri a tapasztalati és elméleti elemeket, a valószínűség MISES-féle definiciója a valóság machista, pozitivista szemléletét tükrözi. MISES maga gyakran hangoztatta a valószínűségszámítás és a mechanika hasonlóságát. Ez az álláspont elvben helyes is, de akkor le kell vonnunk ennek minden konzekvenciáját. Idézzük újból FELLER-t:[27] „Két problémát kell itt világosan megkülönböztetnünk. Egyik oldalon egy tiszta matematikai elméletet látunk" (t. i. a mechanikában) „amely természeténél fogva

[26] u. o. 12. o.
[27] u. o. 9. o.

tisztán formális meggondolásokkal dolgozik, formális axiomákból kiindulva. Ennek az elméletnek nincs más célja, mint hogy a lehetőségekhez képest hű képet adjon a külvilág jelenségeinek bizonyos osztályáról, amelyben a tapasztalatok lefordíthatók az elmélet nyelvére és viszont. Egy ettől különböző probléma az, hogy valami szótárfélét adjunk meg, hogy ezt az elméletet átvihessük a gyakorlatba... Az axiomáinkat viszont lehetőleg szemléletes úton kell egyszerű tapasztalatokból levezetnünk... A geometria és a mechanika története elég világosan megmutatják, hogy a gyakorlat gyakran kényszerít arra, hogy a természetesnek látszó fogalmaktól eltávolodjunk, de azt is, hogy a szemlélet számára eleinte legidegenebb fogalmak hogyan válnak idővel természetessé számunkra..., továbbá azt, hogy milyen veszélyeket rejt magába, ha nem a gyakorlati ellenőrzést tekintjük az elmélet helyessége egyedüli kritériumának". MISES elméletének pozitivista jellegét legjobban úgy láthatjuk meg, ha a mechanikával való hasonlatot konzekvensen tovább visszük. Ha a mechanikát MISES valószínűségszámításának mintájára építenénk fel, akkor egy test tömegét úgy kellene értelmeznünk, mint a tömeg meghatározására irányuló mérések végtelen sorozatának határértékét. Világos, hogy erre semmi szükség nincsen, hiszen ha konzekvens materialista alapon állunk, akkor — a klasszikus mechanikában — minden testnek meghatározott tömeget kell hogy tulajdonítsunk, amely mérési eredményeinktől független. Más kérdés az, hogy egy adott test tömegét esetleg valóban ismételt mérések (nem végtelen, hanem véges) sorozatával határozzuk meg a gyakorlatban, de ez már nem az elméleti mechanika feladata. A mechanikában úgy járunk el, hogy minden testnek meghatározott tömeget tulajdonítunk, és ezen tömegek ismeretének feltételezése mellett meghatározzuk a testek egymásra gyakorolt vonzóerejét, adott tömegű testek mozgását megadott erők hatására, stb. KOLMOGOROFF elmélete lényegében nem más, mint ha ugyanezt lefordítjuk a valószínűségszámítás nyelvére: a szóbanforgó eseményeknek meghatározott valószínűséget tulajdonítunk, a nélkül, hogy előre korlátoznánk azt, hogy a különböző gyakorlati alkalmazásokban az egyes események valószínűségét hogyan határozzuk meg, amire valójában nincs is szükség, ezt minden egyes alkalmazás esetén különböző módon lehet végrehajtani, de ennek vizsgálata egy további kérdés és a valószínűségszámítás megalapozásának kérdéséhez ugyanúgy semmi köze, mint ahogy az elméleti mechanikának sem az az alapfeladata, hogy egy adott test tömegének gyakorlati meghatározására egyszer és mindenkorra érvényes szabályt adjon. Események valószínűségének gyakorlati meghatározására a statisztikában ugyanúgy megvannak a kidolgozott módszerek, ahogyan a fizikusoknak vannak módszereik a tömegmérésre.

Összefoglalva, MISES elméletének kritikáján keresztül igyekeztünk megmutatni azt, hogy a valószínűségszámítás megalapozásához nincsen szükség arra, hogy a valószínűséget formálisan (ahogy FELLER mondja „nominálisan") definiáljuk, mint a gyakoriság határértékét (vagy más módon) és ezáltal a valószínűségszámítás területét szükségtelen módon megszorítsuk, eltekintve attól, hogy ez az eljárás nemcsak szükségtelen, hanem súlyos logikai nehézségekhez is vezet. Nem kell visszariadnunk attól, hogy a valószínűségszámítást — ugyanúgy mint a matematika más ágait — absztrakt, axiomatikus módon építsük fel. Ha az elmélet alapjait a gyakorlat szükségleteinek megfelelően választjuk meg, matematikailag exakt módon építjük fel és ha az elmélet következményei a valóságban lejátszódó jelenségeket jól leírják, akkor az így kapott elmélet a természet megismerésének értékes eszköze lesz. Ilyen elmélet KOLMOGOROFF elmélete, amelynek ismertetésére ezek után rátérünk.

A valószinűségszámítás Kolmogoroff féle axiomatikus megalapozása.

Amint KOLMOGOROFF „A valószínűségszámítás alapfogalmai" című munkájának előszavában megjegyzi, az a törekvés vezette őt, hogy „a valószínűségszámítás alapfogalmait, amelyeket a legutóbbi időkig sajátos jellegűeknek tekintettek, a modern matematika általános fogalomalkotásai közé sorolja be".[28] Máshelyütt azt mondja, hogy „a valószínűségszámítást, mint a matematika egyik ágát, ugyanabban az értelemben lehet és ugyanúgy fogjuk is axiomatikusan felépíteni, mint például a geometriát vagy az algebrát".[29] A matematika valamely ágát axiomatikusan felépíteni annyit jelent, hogy bevezetünk bizonyos alapfogalmakat és ezekre vonatkozólag bizonyos axiomák, alapfeltevések teljesülését tételezzük fel, a továbbiakban pedig kizárólag ezekre az axiomákra alapítjuk a tárgyalást, másszóval a bevezetett alapfogalmak esetleges szemléleti tartalmát a tárgyalás folyamán mellőzzük és az alapfogalmakról csak annyit tételezünk fel ismertnek, amennyit az axiomák ezekre vonatkozólag tartalmaznak. KOLMOGOROFF-nak a valószínűségszámítás alapfogalmait úgy sikerült a modern matematika általános fogalomalkotásai közé besorolni, hogy vissza-

[28] 1. alatt idézett mű, III. o.
[29] u. o. 1. o

vezette a halmazelmélet és mértékelmélet fogalmaira. Ezért, mielőtt KOLMOGOROFF axiomarendszerét ismertetnénk, néhány szóval összefoglaljuk az elmélet megértéséhez szükséges halmazelméleti ismereteket. Halmaznak nevezzük bizonyos elemek meghatározott összességét. Amennyiben a halmaz elemeinek száma véges, definiálhatjuk a halmazt úgy, hogy elemeit felsoroljuk, ha azonban a halmaz elemeinek száma végtelen, más módon kell pontosan meghatározni, hogy milyen elemekből áll a halmaz. Egy A halmazt a B halmaz részhalmazának nevezünk, ha A összes elemei B-nek is elemei, másszóval ha az A halmaz a B halmaz elemeinek egy részéből áll. Azt, hogy az A halmaz részhalmaza B-nek, a következőképpen szokás jelölni: $A \subset B$. Minden halmaz része önmagának: $A \subset A$, továbbá az üres halmaz (tehát az a halmaz, amely nem tartalmaz egy elemet sem), amelyet 0-val jelölünk, minden más halmaznak része. A matematikában leggyakrabban használt halmazok elemei pontok, egyenesek, számok, függvények, stb., a későbbiekben olyan halmazokról lesz szó, amelyeknek elemei események, egyelőre azonban a halmaz elemeinek természetét illetőleg semmilyen feltevést nem teszünk. Két halmaz összegén értjük mindazon elemek összességét, amelyek a két halmaz közül legalább az egyiknek elemei. Az A és B halmazok összegét $A+B$-vel jelöljük. Két halmaz szorzatán azon elemek összességét értjük, amelyek mindkét halmazhoz hozzátartoznak. Az A és B halmazok szorzatát $A.B$-vel jelöljük. Ha az A halmaz részhalmaza a B halmaznak a $B-A$ különbségen értjük azt a halmazt, amely mindazon elemekből áll, amelyek B-nek elemei, de A-nak nem. Szokták a $B-A$ halmazt A-nak B-re vonatkozó kiegészítő halmazának is nevezni. Ha világos az, hogy mely B halmazra vonatkozólag képezzük valamely A halmaz kiegészítő halmazát, akkor szokták A kiegészítő halmazát $\bar{A}$-sal is jelölni. Ha az A és B halmazok részhalmazai a C halmaznak és a kiegészítő halmaz képezését mindig C-re vonatkozóan értjük, könnyel belátható a következő összefüggés:

$$AB = \overline{\bar{A} + \bar{B}} \tag{1}$$

másszóval A és B kiegészítő halmazainak összegének kiegészítő halmaza azonos az A és B halmazok közös részével.

Már a valószínűségszámítás legelemibb fejezeteinek vizsgálatánál is szembetűnik bizonyos formális hasonlóság a halmazelmélet fogalmaival. Jelöljük egy kísérlet lehetséges kimeneteleit $a_1, a_2, \ldots, a_n$-nel, és nevezzük ezeket elemi eseményeknek. Képezzük az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemi eseményekből az összes lehetséges kombinációkat, és jelöljük őket nagy latin betűkkel, például $A = (a_1, a_2, a_5)$, $B = (a_7, a_9)$, stb.

Legyen A az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valamely kombinációja, mondjuk $A = (a_{i_1}, a_{i_2} \ldots, a_{i_k})$. Nevezzük A eseménynek azt, hogy a kísérlet végrehajtásakor az A definiciójában szereplő lehetőségek valamelyike valósul meg. Másszóval az A esemény bekövetkezik akkor, ha a kísérlet eredményeképpen az $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ lehetőségek valamelyike valósul meg. Hogy ezt a fogalmat világosabbá tegyük, vegyük a következő példát: nézzük azt a kísérletet, hogy egy 32 lapos magyar kártyából találomra kihúzunk egy lapot. A kísérletnek nyilván 32 különböző kimenetele lehetséges, mégpedig a 32 egymástól különböző lap valamelyikének húzása. Ebben az esetben összetett esemény például az, hogy alsót húzunk, ez az esemény négy elemi esemény kombinációjából áll, ezek: a piros, zöld, makk és tök alsó húzásai. Halmazelméleti nyelvre lefordítva összetett eseményen, vagy röviden eseményen értjük a szóbanforgó halmaz tetszőleges részhalmazát. Ehhez hasonlóan a valószínűségszámítás összes fogalmainak megadhatjuk halmazelméleti megfelelőjét, másszóval egy szótárt szerkeszthetünk, amelynek segítségével a valószínűségszámítás fogalmait átfogalmazhatjuk a halmazelmélet nyelvére és viszont. Így például: annak, hogy két esemény egymást kizárja, az felel meg, hogy a megfelelő részhalmazoknak nincsen közös elemük. Két esemény egyidejű bekövetkezésének megfelel a két halmaz szorzata. Két esemény valamelyikének bekövetkezésének megfelel a két halmaz összege. Annak, hogy egy esemény nem következik be, megfelel a halmaz kiegészítő halmaza (az összes lehetőségek halmazára vonatkozólag). Annak, hogy egy esemény lehetetlen, megfelel az üres halmaz, az, hogy egy esemény bizonyosan bekövetkezik, azt jelenti, hogy a megfelelő halmaz az összes lehetőségek halmaza; továbbá az, hogy a B esemény bekövetkezése maga után vonja az A esemény bekövetkezését, annyit jelent, hogy az A halmaz részhalmaza a B halmaznak. Ezen szótár segítségével az elemi (azaz végesszámú lehetőségre vonatkozó) valószínűségszámítást lefordíthatjuk a halmazelmélet nyelvére. Ez a gondolat már KOLMOGOROFF előtt is megvolt, többek között például JORDÁN KÁROLY egy 1927-ben írt dolgozatában is megtaláljuk.[30] JORDÁN azonban, miután a halmazelméleti fogalmazást bevezette, egy esemény valószínűségét úgy értelmezi, hogy minden elemi eseménynek (azaz a kísérlet minden lehetséges kimenetelének) egyenlő valószínűséget (azaz a kísérlet lehetséges kimenetelei számának reciprok értékét) tulajdonít, és ilyen módon egy összetett esemény valószínűsége a definiciójában szereplő elemi

[30] Jordán Károly, A valószínűségszámítás alapfogalmai, Mathematikai és Fizikai Lapok, 34. kötet, 1927, 109—136. o.

események számának és az összes elemi események számának hányadosa lesz. Ilyenmódon JORDÁN a klasszikus valószínűségszámításnak a szokásosnál világosabb és áttekinthetőbb kifogástalan felépítését adja ugyan, azonban ezen nem jut túl.[31] Ahhoz, hogy ebből a valószínűségszámítás KOLMOGOROFF-féle rendszeréhez eljussunk, még két további lényeges gondolatra van szükség. Az első az, hogy az elemi események valószínűségeit nem kell feltétlenül egyenlőknek választanunk. Az $a_1, a_2, \ldots, a$ elemi események valószínűségeinek válasszunk tetszőleges nemnegatív $p_1, p_2, \ldots, p$ számokat, amelyeknek öszszege 1-gyel egyenlő, és az A (összetett) esemény valószínűsége alatt értsük a $p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots, + b_{i_k}$ összeget, ahol $i_1, i_2, \ldots, i_k$ azon elemi események indexei, amelyek az A összetett eseményt alkotják. Másszóval az a_i elemek egy tetszőleges részhalmazához hozzárendeljük a részhalmaz elemeihez tartozó p számok összegét. Ilyen módon a szóbanforgó véges halmazunkon egy úgynevezett additiv halmazfüggvényt értelmeztünk, amin azt értjük, hogy a halmaz minden A részhalmazához hozzárendeltünk egy nemnegatív $p(A)$ számot olymódon, hogy ha az A és B halmazoknak nincsen közös elemük, akkor az $A + B$ halmazhoz rendelt szám az A-hoz és B-hez rendelt számok összegével egyenlő: $p(A + B) = p(A) + p(B)$. Ugyanez igaz természetesen több, páronkint közös elem nélküli, halmaz összegére is. Lefordítva ezt a valószínűségszámítás nyelvére, a valószínűségek u. n. addició tételére jutunk, amely szerint több páronként egymást kizáró esemény valamelyikének bekövetkezésének valószínűsége egyenlő az egyes események valószínűségeinek összegével. Ez az állítás, amely a klasszikus valószínűségszámításban tételként szerepel, KOLMOGOROFF elméletének alapfeltevése. Ahogy FELLER írja: „KOLMOGOROFF éppen azt bizonyította be, — amiben néhány éve még kételkedtek, — hogy az egyetlen reláció, amely az elmélet felépítéséhez szükséges, az additivitás, és hogy matematikai szempontból, ha valószínűségről beszélünk, tulajdonképpen additiv halmazfüggvényekre gondolunk."[32] A másik lényeges gondolat a valószínűségszámí-

[31] Meg kell azonban jegyezni, hogy Jordán igen találóan mutat rá a Mises-tipusú elméletek helytelenségére, amikor azt írja: „Téves az a nézet, hogy ha az észlelések számát növeljük, a tapasztalati valószínűség" (tapasztalati valószínűségnek nevtzi Jordán a gyakoriságot) „határérték felé közeledik; tapasztalatilag ez nem igazolható, mert ahhoz végtelen sok észlelést kellene végezni, elméleti okoskodásokkal pedig tapasztalati tényt igazolni nem lehet. Különben is a tapasztalat azt mutatja, hogy hosszabb észlelési sorozatokban a tapasztalati valószínűségek ingadozása nem csökken." (idézett mű 112. o.)

[32] id. mű 13. o.

tás KOLMOGOROFF-féle felépítésében, hogy a valószínűség fogalmát a lehetőségek véges halmaza helyett tetszőleges számosságú végtelen halmazra is kiterjeszti. Az első lépést ebbe az irányba BOREL tette meg, de az általa felvetett termékeny gondolatot nem vitte következetesen végig. BOREL érdeme mindenesetre, hogy a valószínűségszámítás addiciótételének megszámlálható sok eseményre való kiterjesztését elsőnek bevezette. Amikor az elemi események véges halmaza helyett egy tetszőleges végtelen halmazból indulunk ki, bizonyos nehézségek lépnek fel az additiv halmazfüggvény értelmezésénél. A nélkül, hogy itt a részletekbe belemennénk, csak két példát említünk meg, hogy a kérdést megvilágítsuk. Amint láttuk, az absztrakt valószínűségszámítás kiindulópontja az, hogy egy tetszőleges halmaz részhalmazain egy additiv halmazfüggvényt értelmez. Ha a szóbanforgó halmaz megszámlálható, ez semmilyen nehézségbe sem ütközik. Legyenek a halmaz elemei $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ és minden a-hez rendeljünk hozzá egy nemnegatív p_i számot, úgy hogy a p számokból alkotott sor konvergáljon és összege éppen 1 legyen. Ebben az esetben akármilyen $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots$ elemekből álló véges vagy végtelen részhalmazát tekintjük a szóbanforgó halmaznak, ezen halmazhoz a $p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots$ számot rendelhetjük hozzá, tekintettel arra, hogy egy nemnegatív tagokból álló konvergens végtelen sor tagjainak tetszőleges részsorozatából alkotott sor szintén konvergens. Ilyenmódon a szóbanforgó megszámlálható halmaz összes részhalmazain egy additiv halmazfüggvényt értelmeztünk, amely *abszolut additiv* is lesz, azaz, ha $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ezen halmaz páronként közös elem nélküli részhalmazainak egy véges *vagy végtelen* sorozata, ezen halmazok összegéhez rendelt szám az egyes halmazokhoz rendelt számok (véges vagy végtelen) sorának összegével lesz egyenlő. Azonban, ha megszámlálhatónál magasabb számosságú halmazból indulunk ki, a helyzet sokkal bonyolultabb. Ebben az esetben le kell mondanunk arról, hogy a halmaz összes részhalmazain értelmezzünk egy abszolut additiv halmazfüggvényt[33] és meg kell elégednünk azzal, hogy a halmazfüggvényt a szóbanforgó halmaz részhalmazainak valamely halmaz-

[33] Ennek a problémának legegyszerűbb esete a mérték problémája. Legyen H a (0,1) intervallum pontjainak halmaza. Ha A a (0,1) intervallum egy részintervalluma, akkor A mértékén ezen részintervallum hosszát értjük. Ha A véges vagy megszámlálható sok közös pont nélküli intervallum összege, A mértékén ezen intervallumok hosszösszegét értjük. Kérdés, hogyan lehet ezt a mérték-definiciót a (0,1) intervallum összes részhalmazaira kiterjeszteni. A fent értelmezett mérték a következő tulajdonságokkal rendelkezik: 1. abszolut additiv, 2. eltolásra invariáns. Utóbbi állítás azt jelenti, hogy ha az A halmazt mod 1 valamely d távolsággal eltoljuk, az így nyert B halmaz mértéke megegyezik A mértékével. Már-

testére értelmezzük[34]. Halmaztesten — HAUSDORFF nyomán[35] — halmazok olyan összességét értjük, hogy két, az összességhez tartozó halmaz összege és különbsége szintén hozzátartozik a szóbanforgó összességhez. Amennyiben egy adott halmaz részhalmazainak összességéről van szó, ezek halmaztestet alkotnak, ha feltesszük, hogy maga az eredeti halmaz hozzátartozik az összességhez, továbbá két halmazzal együtt azok összege és egy halmazzal együtt annak a teljes halmazra vonatkozó kiegészítő halmaza is hozzátartozik a szóbanforgó összességhez. Ebből — két halmaz szorzatának az összeg- és kiegészítőhalmaz segítségével való, (1) alatt megadott kifejezése alapján — következik, hogy két, a vizsgált halmaztesthez tartozó halmaz szorzata is beletartozik a halmaztestbe. KOLMOGOROFF rendszere éppen abból indul ki, hogy feltételezi, hogy egy megadott alaphalmaz részhalmazainak halmaztestén értelmezve van egy additiv halmazfüggvény. Pontosabban, axiomarendszere a következő: 1. Legyen megadva tetszőleges elemeknek — amelyeket elemi eseményeknek nevezünk — egy H halmaza, továbbá ezen H halmaz részhalmazainak egy T halmazteste, amely magát H-t is

most Hausdorff (Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, Veit, 1914. 402—403 o.) kimutatta, hogy a mérték fenti fogalmát nem lehet úgy kiterjeszteni a (0,1) intervallum összes részhalmazaira, hogy a felsorolt két tulajdonság érvényben maradjon. Banach bebizonyította, hogy ha abszolut additivitás helyett csak véges számú halmazra kívánjuk meg az additivitást, akkor a probléma megoldható (l. S. Banach, Théorie des opérations lineaires, Monografje Matematyczne I, Warszawa 1932, 32—33. o.). Banach és Kuratowski bebizonyították (Fundamenta Math. 14 (1929) 127—131), hogy ha az ú. n. kontinuum-hipotézis igaz, akkor nem létezik a (0,1) intervallum összes részhalmazain értelmezett nem triviális abszolut additiv mérték, amely azzal a tulajdonsággal bír, hogy minden pont mértéke zérus. A mértékelmélet megoldatlan problémáira vonatkozólag l. E. Szpilrajn K problematike teorii meri, Uspekhi Matematicseszkih Nauk I, 2(12) 1946, 179—188 o.

[34] A legegyszerűbb példa az ú. n. Lebesgue-féle mérték, amely a (0,1) intervallum Lebesgue szerint mérhető részhalmazain értelmezett abszolut additiv halmazfüggvény. Lebesgue 1902-ben tette közzé híres diszertációját (Intégrale, longueur, aire. Annali di Mat. (3) 7 (1902)), amelyben a róla elnevezett mértékfogalmat és integrálfogalmat bevezette, és ezzel a modern valós függvénytant megalapította. A Lebesgue-féle integrál elméletének továbbfejlesztése terén alapvetőek Riesz Frigyes munkái, l. pl. A Lebesgue-féle integrálról, mint a differenciálás műveletének megfordításáról, Mat. és Fiz. Lapok XLII. 1 (1935), továbbá: Sur l'existence de la dérivée des fonctions d'une variable réelle et des fonctions d'intervalle, Verh. Internat. Mathematiker-Kongresses, Zürich, 1932, Orell Füssli.

[35] id. mű, 15. o.

tartalmazza. 2. A T halmaztesten legyen értelmezve egy additiv halmazfüggvény, azaz a H halmaz minden a T halmaztesthez tartozó A részhalmazához legyen hozzárendelve egy nemnegatív $p(A)$ szám olymódon, hogy ha A, és B a T halmaztesthez tartozó, közös elem nélküli halmazok, akkor fennálljon a $p(A+B)=p(A)+p(B)$ összefüggés, továbbá legyen $p(H)=1$, azaz a teljes halmazhoz az 1 szám legyen hozzárendelve. Ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor KOLMOGOROFF a H halmaz részhalmazainak T halmaztestét az azon értelmezett $p(A)$ additív halmazfüggvénnyel együtt tágabb értelemben vett valószínűségi mezőnek nevezi, a T halmaztesthez tartozó A részhalmazt eseménynek, a hozzárendelt $p(A)$ számot pedig az A esemény valószínűségének nevezi. Könnyen beláthatjuk, hogy ezen axiomarendszer ellentmondásmentes. Egy axiomarendszer ellentmondásmentességét olyanmódon lehet kimutatni, hogy megadunk egy konkrét modellt, amelyre a rendszer összes axiomái teljesülnek. Ilyen modellt könnyen megadhatunk: álljon a H halmaz egyetlen a elemből, a T halmaztest tartalmazzon két részhalmazt: magát H-t és az üres halmazt, 0-t, legyen továbbá $p(H)=1$ és $p(0)=0$. Ebben az esetben, amint azonnal belátható, az összes feltevések teljesülnek, amivel a rendszer ellentmondásmentessége be van bizonyítva. A fenti két feltételnek eleget tevő rendszert, amint mondottuk, KOLMOGOROFF tágabb értelemben vett valószínűségi mezőnek nevezi. Szűkebb értelemben, valószínűségi mezőnek nevezi KOLMOGOROFF az olyan rendszert, amely a felsorolt feltételeken kívül még egy axiomának, az úgynevezett folytonossági axiomának is eleget tesz. A valószínűségszámítás modern fejezeteinek felépítéséhez erre az axiomára is szükség van. A folytonossági axioma a következőképpen hangzik: legyen $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ a T-hez tartozó részhalmazoknak (eseményeknek) egy „egymásba skatulyázott" részsorozata, azaz tegyük fel, hogy A_2 részhalmaza A_1-nek, A_3 részhalmaza A_2-nek, s. i. t.; általában A_{n+1} részhalmaza A nek, és tegyük fel, hogy nincsen H-nak olyan eleme, amely az A_n halmazok mindegyikéhez hozzátartozik (azaz, hogy az A_n halmazok végtelen sorozatának szorzata üres), ebben az esetben legyen $p(A_n)$ határértéke 0, ha n végtelenhez tart. A folytonossági axioma bevezetésére KOLMOGOROFF-nak azért van szüksége, hogy a $p(A)$ halmazfüggvény additivitását végtelen sok halmaz esetére is kiterjeszthesse. A folytonossági axioma segítségével ugyanis bebizonyítható, hogy ha $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ páronkint közös elem nélküli részhalmazok megszámlálható sorozata, akkor, ha A-val jelöljük ezen részhalmazok összegét és feltesszük, hogy a sorozat minden tagja és maga A is a T halmaztesthez tartozik (e nélkül ugyanis nem beszélhetünk az illető események valószínűségéről), akkor fennáll $p(A)=p(A_1)+$ $+p(A_2)+\ldots+p(A\ )+\ldots$. Véges számú halmaz esetére ez könynyen következik abból, hogy a $p(A)$ halmazfüggvény additivitását két halmazra posztuláltuk, azonban megszámlálható sok halmaz esetében ez csak a folytonossági axiomából vezethető le. A valószínűségi mezők közül különös fontossággal bírnak azok, amelyekben nem jelent külön feltevést az, hogy megszámlálható sok, a T halmaztesthez tartozó halmaz összege is T-hez tartozik. Az ilyen valószínűségi mezőt KOLMOGOROFF BOREL-féle valószínűségi mezőnek nevezi. A következőkben csak ezekkel foglalkozunk.

Nem lehet célunk, hogy bemutassuk itten a valószínűségszámítás felépítését a fenti axiomarendszer alapján, azonban, hogy valami képet adjunk az elméletről, röviden kitérünk néhány alapvető fogalomra. A modern valószínűségszámítás legjelentősebb eszköze a *valószínűségi változó* fogalma. Valószínűségi változónak nevezzük a H halmazon értelmezett $f(a)$ függvényt (ahol a végigfut H összes elemein), amelynek értékei valós számok, és amely a T halmaztestre vonatkozólag *mérhető*. Utóbbi feltétel azt jelenti, hogy ha x tetszőleges valós szám, a H halmaznak azon részhalmaza, amely azokból az a elemekből áll, amelyekre $f(a) < x$, az x valós szám minden választása mellett hozzátartozik a T halmaztesthez. Ezek szerint például valószínűségi változó minden T-hez tartozó A részhalmaz karakterisztikus függvénye (vagyis az a függvény, amelynek értéke 1 az A részhalmaz minden elemére és 0 az A részhalmaz kiegészítő halmazán), továbbá a H halmazon értelmezett minden függvény, amely ilyen karakterisztikus függvények lineáris kifejezése, vagy azokkal tetszőleges pontossággal megközelíthető. Ha például a H halmaz a 0 és 1 közé eső valós számok halmaza, a T halmaztest a $(0, 1)$ intervallum mérhető halmazaiból áll és a $p(A)$ halmazfüggvény a LEBESGUE-féle mérték, akkor fenti definició értelmében az ezen a valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók összessége azonos a LEBESGUE szerint mérhető függvények összességével. Minden valószínűségi változónak értelmezhetjük az *eloszlásfüggvényét:* Legyen $f(a)$ egy valószínűségi változó, jelöljük A_x-szel H azon részhalmazát, amelynek a elemeire $f(a) < x$, akkor $f(a)$ eloszlásfüggvényén értjük az $F(x) = p(A_x)$ függényt, azaz $F(x)$ megadja annak a valószínűségét, hogy $f(a)$ értéke kisebb legyen x-nél. Mutassuk még meg, hogyan értelmezi KOLMOGOROFF egy valószínűségi változó *várható értékét:* az $f(a)$ valószínűségi változó várható értékén értjük az $f(a)$ függvénynek a $p(A)$ mértékre vonatkozó, az egész H halmazra kiterjesztett absztrakt LEBESGUE-féle integrálját, amint ezt FRÉCHET értelmezte:

$$E(f) = \int_H f . p(dH) \tag{2}$$

amennyiben ez az integrál létezik.

Ez a kifejezés tudvalevőleg a

$$(3) \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} kh \,.\, p(A_{(k+1)h} - A_{kh})$$

összeg határértékét jelenti, ha $h \to 0$, ahol A_{kh}-val jelöltük azon a elemek halmazát, amelyekre $f(a) < kh$. Egy valószínűségi változó várható értéke kifejezhető absztrakt integrál helyett közönséges STIELTJES-féle integrállal is, az eloszlásfüggvény felhasználásával:

$$(4) \qquad E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \,.\, dF(x)$$

Vizsgáljuk meg ezek után, hogy miben áll KOLMOGOROFF rendszerének jelentősége, mi magyarázza nagy sikerét, azt, hogy a modern valószínűségszámítás általánosan elfogadott alapjává vált. A következő főbb tényezőket kell szem előtt tartanunk, hogy KOLMOGOROFF elméletének jelentőségét megértsük: Először is a valószínűségszámítás teljes axiomatizációi közül (tehát a valószínűségszámítás olyan absztrakt axiomatikus elméletei közül, amelyek a tárgyalt fogalmak szemléleti tartalmára való minden hivatkozást kiküszöbölnek és ezáltal a valószínűségszámítás logikailag kifogástalan rendszerét építik fel) KOLMOGOROFF rendszere a legegyszerűbb és ugyanakkor a legátfogóbb. KOLMOGOROFF elmélete nemcsak a klasszikus valószínűségszámítás területét öleli fel és teszi lehetővé a valószínűségszámítás terén az alapok tisztázatlansága folytán fellépett vitás kérdések megoldását és a paradoxonok kiküszöbölését, hanem megfelelő alapul szolgál a valószínűségszámítás legújabb, a fizikai alkalmazások követelményei által létrehozott modern fejezeteihez is. Végül pedig, azáltal, hogy a valószínűségszámítást a halmazelmélet és mértékelmélet alapjaira építi fel, lehetővé tette, hogy a modern analízis fejlett módszerei és eredményei alkalmazhatók legyenek a valószínűségszámításban, ami a további fejlődést igen megkönnyítette és meggyorsította. Mint minden absztrakt, axiomatikus elméletnek, a valószínűségszámítás KOLMOGOROFF-féle axiomatikus rendszerének is sokféle konkrét interpretációja lehetséges, ennek folytán alkalmazható elmélete olyan területeken is, amelyeknek a valószínűség és a véletlen fogalmaival semilyen kapcsolatuk sincsen, és így a matematika más ágaiban (például a számelméletben is) érdekes és meglepő alkalmazást nyert.[36] Ezen

[36] l. pl. A. Rényi, Probability methods in number theory, Publicationes Math. Coll. Budapest, I. (1949) 1—9.

alkalmazások száma távolról sincsen lezárva, és egész bizonyos, hogy a matematika és alkalmazásainak a legkülönbözőbb területein a kutatóknak a jövőben is értékes eszközül fog szolgálni KOLMOGOROFF elmélete. A következőkben röviden kitérünk még néhány más valószínűségszámítási elmélet ismertetésére és kritikájára.

Tornier elmélete.

Mint említettük, a valószínűségszámítás alapjai körüli viták a matematikai irodalomban szokatlan éles hangon folytak. Ebből a vitából is kirí TORNIER hangja, aki (KOLMOGOROFF elméletére célozva) a következőket írja: „...el akartam kerülni az életteljes alapszemléletnek élettelen matematikai formalizmussá való laposítását, ami a valószínűségszámítás és a LEBESGUE-féle mértékelmélet bizonyos számolási szabályok analógiáján alapuló azonosításának következménye".[37] Úgy hisszük, KOLMOGOROFF elméletének az előző fejezetben való részletes ismertetése és jelentőségének kiértékelése feleslegessé teszi, hogy TORNIER fenti szavaival és az azokban foglalt üres váddal bővebben foglalkozzunk.[38] Vizsgáljuk meg e helyett, miben különbözik KOLMOGOROFF állítólag „élettelen formalizmusától" TORNIER nyilván merőben más „életteljes alapszemlélettől(?)" duzzadó elmélete. FELLER a már fentebb többször idézett, a genfi kongresszuson tartott előadásában[39] kimutatta, hogy TORNIER elmélete nemcsak hogy nem ellentéte KOLMOGOROFF elméletének, hanem, ha eltekintünk bizonyos jelölésbeli és terminológiabeli lényegtelen különbségektől, tulajdonképpen KOLMOGOROFF rendszerének speciális esetét képezi. TORNIER elméletének lényege, hogy bizonyos speciális halmazok részhalmazainak egy halmaztestén értelmez egy additiv halmazfüggvényt, és ezt a halmazfüggvényt utólag mint bizonyos speciális kísérletsorozatokhoz tartozó gyakoriságok határértékét értelmezi, azonban ennek az elmélet további felépítése szempontjából nincsen jelentősége. A másik — egyébként meglehetősen másodrendű jelentőségű — pont, ahol TORNIER elmélete KOLMOGOROFF-étól eltér, a szóbanforgó additiv halmazfüggvény értelmezésének kiterjesztésére vonatkozik. TORNIER álláspontja egyébként — amint ezt FELLER kimu-

[37] E. Tornier, Wahrscheinlichkeitsrechnung und allgemeine Integrationstheorie, Leipzig u. Berlin, Teubner, 1936.

[38] Az ilyen tipusú frázisok különben is jól ismeretesek, megtaláljuk őket például Bieberbach „fajelméleti" kirohanásaiban, l. pl. Deutsche Zukunft No. 14, 1934.

[39] id. mű, 14—21. o.

tatja — ellentmondásokra vezet. Vizsgáljuk most meg részletesebben, miben áll TORNIER elmélete. Legyen adva egy kísérlet, amelynek véges vagy megszámlálható különböző eredménye lehetséges. Azáltal, hogy TORNIER kizárólag olyan kísérletekre szorítkozik, amelyeknek csak megszámlálható sok különböző eredménye lehet, — ugyanúgy, mint MISES és tanítványai — nagymértékben megszorítja a valószínűségszámítás alkalmazási területeit, és például a geometriai valószínűségek tárgyalását eleve kizárja. Ettől eltekintve, nézzük meg, hogy a megszámlálható esetben mi újat jelent TORNIER elmélete. Az egyszerűség kedvéért szorítkozzunk a legegyszerűbb esetre, a fej-vagy-írás példájára. TORNIER a kísérlet realizációjának a kísérlet eredményeinek végtelen sorozatát nevezi. Rendeljük hozzá minden kísérlethez — azaz a pénzdarab minden feldobásához — a 0 vagy 1 számot, a szerint, hogy fej vagy írás a dobás eredménye. Ilyen módon a fej-vagy-írás játék minden realizációjához hozzárendeltünk egy a 0 és 1 jegyekből álló végtelen számsorozatot, legyen ez a sorozat $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Szokásos módon ehhez a számszorzathoz hozzárendel TORNIER egy valós számot, mégpedig azt az x számot, amelynek éppen a szóbanforgó 0-ból és 1-ből álló sorozat adja meg a diadikus kifejtését, másszóval legyen

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

Így tehát a kísérlet minden egyes realizációjának megfelel a (0,1) intervallum egy pontja. Mármost a (0,1) intervallum minden $\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ alakú intervallumához rendeljünk hozzá egy nemnegatív számot olyan módon, hogy az így kapott intervallumfüggvény a szóbanforgó diadikus intervallumokra nézve additiv legyen, és a szokásos módon terjesszük ki ennek az intervallumfüggvénynek az értelmezését a (0,1) intervallum összes PEANO—JORDAN-értelemben mérhető A részhalmazaira. Tekintettel arra, hogy a PEANO—JORDAN-értelemben mérhető halmazok halmaztestet alkotnak, ilyen módon ezen a halmaztesten egy $p(A)$ additiv halmazfüggvényt értelmeztünk. Ezt nevezi TORNIER valószínűségi mezőnek. Ez nyilvánvalóan a KOLMOGOROFF értelmében vett valószínűségi mező fogalmának speciális esete. Ezek után TORNIER a már értelmezett additiv halmazfüggvényt utólag még mint gyakoriságok határértékét is értelmezi. Kimutatja azt, hogy megadható a kísérlet realizációinak olyan végtelen sorozata, hogy ha A a (0,1) intervallum egy tetszőleges PEANO—JORDAN-értelemben mérhető részhalmaza, ha $N_k(A)$ jelenti a megadott realizációsorozat első k eleme közül azok számát, amelyekhez rendelt pont az A halmazhoz tartozik, akkor $\frac{1}{k} N_k(A)$ konvergál $p(A)$-hoz. Az ilyen realizációsorozatokat TORNIER modell-nek nevezi, az összes modellek összességét pedig modellosztálynak. Kétségtelen, hogy egy additiv halmazfüggvénynek ilyen módon, gyakoriságok határértékeként való (utólagos) előállítása bizonyos szempontból érdekes, de itt végeredményben még sincsen másról szó, mint KOLMOGOROFF rendszerének interpretációjáról, speciális feltevések mellett.[40] TORNIER elmélete lényegében azt a felismerést fejezi ki, hogy még ha a szóbanforgó valószínűségeket mint gyakoriságok határértékét értelmezzük is, ezzel még a valószínűségszámítás megalapozását nem adtuk meg, hanem ezek után a gyakoriságokkal való definició fölé még rá kell építenünk KOLMOGOROFF elméletét. Hogy a valószínűségek gyakorisággal való definiciójára miért van szükség, az TORNIER elméletéből sem derül ki, hiszen, amint ezt már MISES elméletével kapcsolatban hangsúlyoztuk, ennek a valószínűségek gyakorlati meghatározásához vajmi kevés köze van, (l. különösen a 31. lábjegyzetben JORDÁN KÁROLY megjegyzését).

[40] Tornier szóbanforgó tétele, amely minden additiv halmazfüggvényhez biztosítja modellek létezését, a szóbanforgó speciális esetre vonatkozólag a következőképpen fogalmazható meg: Legyen adva a $(0,1)$ intervallum Peano—Jordan-értelmében mérhető A halmazain egy $p(A)$ additiv halmazfüggvény, akkor megadható olyan valós $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ számsorozat, hogy ha $N_k(A)$ jelenti az x_k számsorozat első k tagja közül azok számát, amelyek az A halmazhoz tartoznak, akkor $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} N_k(A) = p(A)$. Ezt a tételt Tornier meglehetősen bonyolultan bizonyítja be, a tétel egy egyszerű bizonyítása a következő: Jelölje A_x a $(0,x)$ intervallumot és legyen $F(x) = p(A_x)$. Ha feltesszük, hogy $p(A)$ nemnegativ, ebből következik, hogy az $F(x)$ függvény monoton növekvő lesz. Legyen $F^{-1}(x)$ az $F(x)$ függvény inverz függvénye. Ha már most $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ tetszőleges a $(0,1)$ intervallumban egyenletes eloszlású számsorozat, akkor az $x_n = F^{-1}(t_n)$ számsorozat a kívánt tulajdonsággal fog birni. Ugyanis ha A jelenti az (a, b) intervallumot, akkor tekintve, hogy $a < x_n < b$ feltétel equivalens az $F(a) < t_n < F(b)$ feltétellel, a t_n sorozat egyenletes eloszlásának definiciója értelmében $\frac{1}{k} N_k(A)$ konvergálni fog $F(b) - F(a)$-hoz, ha k végtelenhez tart, amiből az állításunk már könnyen következik. (Megjegyzendő, hogy abban az esetben, ha az $F(x)$ függvénynek ugrásai vannak, vagy bizonyos intervallumokban állandó, az inverz függvény értelmezésénél bizonyos szokásos megállapodások értelmében kell eljárni.)

Amint fentebb már jeleztük, TORNIER elméletének eltérése KOLMOGOROFF valószínűségszámításától csak a szóbanforgó additiv halmazfüggvény értelmezésének kiterjesztése kérdésénél lép fel. TORNIER azt az álláspontot vallja, hogy ha a B halmaz PEANO—JORDAN-értelemben nem mérhető, és ha $\overline{p}(B)$ és $\underline{p}(B)$ jelölik a B halmaz külső és belső mértékét, akkor a szóbanforgó B halmaz valószínűségeként tetszőleges olyan c számot választhatunk, amely $\underline{p}(B)$ és $\overline{p}(B)$ közé esik, és ilyen módon a valószínűségi mezőnek végtelen sok kiterjesztését nyerjük, amelyek TORNIER szerint egyformán tekintetbe jönnek. Ez az eljárás azonban furcsa következményekre vezet. Például ezek szerint létezik olyan TORNIER-féle valószínűségszámítás, amelyben annak a valószínűsége, hogy a fej-vagy-írás játék végtelen megismétlésénél véges számú kivétellel mindig fej jőjjön ki, 1-gyel egyenlő. Ugyanis a (0,1) intervallum azon pontjainak halmaza, amelyek diadikus kifejtésében csak véges sok 1-es szerepel, PEANO—JORDAN értelemben nem mérhető, továbbá külső mértéke 1 és belső mértéke 0. Nehéz elképzelni, hogy egy ilyen elmélet a gyakorlatban alkalmazható legyen. Ha eltekintünk ettől az utóbbi ponttól, — amely egyébként TORNIER elméletének további felépítése szempontjából nélkülözhető, — akkor viszont TORNIER elmélete nem más, mint KOLMOGOROFF elméletének egy speciális esete, amelyben a valószínűségi eloszlás egyben mint gyakoriságok határértéke is értelmezhető. Ebben semmi meglepő nincsen, hiszen, amint mondottuk, minden axiomatikus elméletnek különböző interpretációi lehetségesek. Ettől függetlenül azonban TORNIER elmélete — ellentétben szerzőjének szándékával — nem arról győz meg, hogy KOLMOGOROFF elmélete „élettelen formalizmus", hanem éppen ellenkezőleg arról, hogy még ha a valószínűséget, mint a gyakoriság határértékét értelmezzük is, akkor sem mellőzhetjük KOLMOGOROFF elméletét. A valószínűségnek, a gyakoriság határértékeként való értelmezése nem helyettesítheti KOLMOGOROFF elméletét, hanem legfeljebb, bizonyos esetekben, annak kiegészítését alkothatja, amely kiegészítés szükségessége erősen kérdéses.

Glivenko elmélete.

Amint KOLMOGOROFF axiomatikus rendszerének ismertetésénél láttuk, a H halmaz elemei a valószínűségi mező értelmezésénél semilyen szerepet nem játszanak, hanem kizárólag a H halmaznak a T halmaztesthez tartozó részhalmazainak valószínűségét értelmezzük.[41] Ezért egész természetesen felmerült az a gondolat, hogy a valószínűségszámítást úgy építsük fel, hogy a H halmaz elemeit nem is vezetjük be, hanem rögtön a T halmaztestből indulunk ki. A valószínűségszámítás ilyen megalapozására vonatkozó érdekes rendszert dolgozott ki GLIVENKO szovjet matematikus. Ebből a célból felhasználta az úgynevezett *strukturák* elméletét. A strukturák elmélete a modern algebra egyik érdekes fejezete, amelynek jelentősége egyre növekszik, és amelynek fontos alkalmazásai vannak a halmazelméleten kívül a csoportelméletben, számelméletben, projektiv geometriában, topológiában, a logikában, sőt újabban a quantummechanikában is. Ma már világos, hogy a struktura fogalma a csoport, gyűrű és test fogalmával együtt a matematika legalapvetőbb fogalomalkotásai közé tartozik. A strukturák elméletének terminológiája még nem alakult ki véglegesen. Az elmélet megalapítója DEDEKIND a duálcsoport elnevezést használta,[42] az angol és amerikai irodalomban a „lattice" elnevezést találjuk leggyakrabban.[43] A struktura elnevezést O. ORE vezette be[44] és ugyanezt az elnevezést használja GLIVENKO is.[45] A strukturák elméletére GLIVENKO-nak azért van szüksége, hogy egy T halmaztestet karakterizáljon, a nélkül, hogy a tárgyalásban az alaphalmazt és annak elemeit felhasználná. Elmélete sok szempontból igen érdekes, mert összekapcsolja a valószínűségszámítást a modern algebra fontos fogalomalkotásaival, és bizonyos értelemben igen természetes is, mert úgy építi fel a valószínűségszámítást, hogy nem használ fel semilyen nélkülözhető fogalmat. A valószínűségszámítás GLIVENKO-féle axiomatikus elmélete azonban egyrészt meglehetősen bonyolult, másrészt végül mégis kénytelen bevezetni az alaphalmaz elemeit, amivel visszajut lényegében a KOLMOGOROFF-féle elmélethez. Ilyen módon GLIVENKO érdekes kísérlete végeredményben a KOLMOGOROFF-féle elmélet más úton való bevezetésének tekinthető.

[41] Természetesen a H halmaz elemei szerepelhetnek a részhalmazok között és mint ilyenek lehetnek T-nek is elemei.

[42] R. Dedekind, Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, Math. Annalen, 53, 1900, 371—403.

[43] l. pl. G. Birkhoff, Lattice theory. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. vol. 25, 1940.

[44] Oystein Ore, On the foundations of abstract algebra, Annals of Math. I, 36, 1935, 406—437. o.

[45] V. Glivenko, Théorie Générale des Structures, Actualités Sc. et Ind. 652, Paris, Hermann, 1938.

Hogy az elmondottakat világosabbá tegyük, röviden összefoglaljuk a strukturák elméletének alapfogalmait. Legyen S egy tetszőleges félig rendezett halmaz; ezen azt értjük, hogy S bizonyos a, b elmepárjaira legyen értelmezve egy rendezési reláció; amelyet a következőképpen jelölünk: $a \subset b$, (szavakban: a része b-nek), amelyről feltesszük, hogy a következő tulajdonságokkal rendelkezik: $a \subset a$, továbbá, ha $a \subset b$ és $b \subset a$, akkor $a = b$, végül pedig a reláció tranzitív, azaz, ha $a \subset b$ és $b \subset c$, abból következik, hogy $a \subset c$. Egy félig rendezett halmazt strukturának nevezünk, ha eleget tesz a következő feltételeknek: bármely a és b elemnek létezik a „szorzata", amelyet ab-vel jelölünk, és amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik: $ab \subset a$ és $ab \subset b$, továbbá ha c bármely olyan elem, hogy $c \subset a$ és $c \subset b$, akkor $c \subset ab$. Létezik továbbá bármely a és b elem „összege", amelyet $a+b$-vel jelölünk és amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik: $a \subset a+b$ és $b \subset a+b$, továbbá ha $a \subset c$ és $b \subset c$, akkor $a+b \subset c$. Könnyen belátható, hogy egy halmaz részhalmazainak egy gyűrűje, azaz részhalmazok olyan összessége, hogy bármely két részhalmazzal együtt azok halmazelméleti szorzata és összege is hozzátartozik az összességhez, strukturát alkot, ha szorzás és összeadás alatt halmazelméleti szorzást és összeadást értjük, továbbá ha azon, hogy $a \subset b$ azt értjük, hogy az a halmaz részhalmaza a b halmaznak. Hogy a struktura fogalmát világosabbá tegyük, még három másik példát említünk meg: a pozitív egész számok halmaza strukturát alkot, ha azon, hogy $a \subset b$ azt értjük, hogy az a szám osztója b-nek, továbbá két szám „szorzatán" legnagyobb közös osztójukat, két szám „összegén" legkisebb közös többszörösüket értjük. Vagy tekintsük a sík összes konvex tartományainak halmazát, ezek strukturát alkotnak, ha azon, hogy $a \subset b$ azt értjük, hogy az a konvex tartomány benne fekszik a b konvex tartományban, továbbá két konvex tartomány szorzatának a két tartomány közös részét tekintjük (ami természetesen szintén konvex) és összegükön az őket tartalmazó legkisebb konvex tartományt értjük. Végül a matematikai logika állítás-kalkulusa is példa strukturára, ha azon, hogy $a \subset b$ azt értjük, hogy az a állításból következik a b állítás, két állítás szorzatán azt értjük, hogy a két állítás egyidejűleg fennáll, két állítás összegének azt az állítást nevezzük, hogy a két állítás közül legalább az egyik fennáll. Visszatérve a strukturák absztrakt elméletére, feltesszük, hogy a szóbanforgó strukturában van egy „legkisebb" elem, azaz egy olyan elem, amely a struktura minden elemének része, ezt az elemet 0-val jelöljük. Könnyen belátható, hogy ha a a struktura tetszőleges eleme, akkor $0a = 0$ és $0 + a = a$.

Továbbá feltesszük, hogy strukturánknak van egy „legnagyobb" eleme, azaz egy olyan elem, amelyet a struktura minden eleme megelőz, ezt az elemet 1-gyel jelöljük. Könnyen következik, hogy a struktura bármely a elemére $a1 = a$ és $a + 1 = 1$. A fent említett példák esetében: ha S egy halmaz bizonyos részhalmazainak gyűrűje, akkor 0 alatt az üres halmazt 1 alatt a teljes halmazt értjük. Ha S a pozitív egész számok összessége, akkor 1 lesz a legkisebb elem, legnagyobb elem viszont nincsen. A konvex tartományok példájában az üres tartomány és a teljes sík lesznek a legkisebb és legnagyobb elem, amenynyiben utóbbit is hozzászámítjuk a halmazhoz. A strukturák elméletében bevezetnek további megszorításokat. Például DEDEKIND-féle strukturáknak nevezik azokat a strukturákat, amelyekben abból, hogy $a \subset c$ következik, hogy $a + bc = (a+b)c$. A DEDEKIND-félé strukturákra érdekes kritériumot adott A. KUROS: egy struktura DEDEKIND-féle akkor és csak akkor, ha abból, hogy $a \subset b$, továbbá abból, hogy létezik olyan c elem, hogy $ac = bc$ és $a + c = b + c$ következik, hogy $a = b$. További erősebb megszorítást jelent, ha disztributiv strukturákra szorítkozunk. Disztributivnak nevezünk egy strukturát, ha bármely a, b és c elemekre fennáll az $(a + b)c = ac + bc$ disztributiv szabály. Minden disztributiv struktura nyilvánvalóan egyben DEDEKIND-féle is. A fent említett példák közül a részhalmazgyűrű disztributiv struktura, továbbá disztributiv az egész számok oszthatóság szerint rendezett halmaza, azonban a konvex tartományok összessége nemdisztributiv struktura. A következő lépés, hogy egy strukturában *normát* vezetünk be. A strukturák normálásának elmélete K. MENGER-től származik.[46] Egy S strukturát normáltnak nevezünk, ha S minden a eleméhez hozzá van rendelve egy nemnegatív szám — az a elem normája, — amelyet $|a|$-val jelölünk, és amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik: ha $a \subset b$, de a és b nem azonosak, akkor $|a| < |b|$; továbbá, bármely a és b elemre fennáll az $|a + b| + |ab| = |a| + |b|$ összefüggés. Könnyen belátható, hogy csak a DEDEKIND-féle strukturákban vezethető be norma. Hogy példát adjunk normált strukturákra, vizsgáljuk meg a pozitiv egész számok oszthatóság szerint rendezett halmazát, és egy a szám normájának nevezzük ezen szám logaritmusát. Tekintettel arra, hogy két pozitiv egész szám legkisebb közös többszörösének és legnagyobb közös osztójának szorzata egyenlő a két szám szorzatával, látjuk, hogy a normától megkívánt második tulajdonság

[46] K. Menger, Axiomatik der endlichen Mengen und der elementargeometrischen Verknüpfungsbeziehungen, Jb. Deutschen Math. Ver. 37 (1928) 309—325.

teljesül, az első tulajdonság teljesülése nyilvánvaló. Közelebbről érdekel minket a halmazgyűrűk normálása. Vizsgáljunk egy véges elemből álló halmaz összes részhalmazaiból álló halmaztestet. Ha összeadáson és szorzáson megint a halmazelméleti összeadást és szorzást értjük, akkor ez a halmaztest, mint láttuk, strukturát alkot. Ebben a strukturában egy részhalmaz normájának választhatjuk ezen részhalmaz elemeinek számát. Ez a normálás nyilvánvalóan bír a kívánt tulajdonsággal. Egy véges halmaz részhalmazai által alkotott strukturát ilyen módon normálva, lényegében a klasszikus valószínűségszámítást nyerjük. Ehhez még minden elem normáját be kell szorozni a teljes halmaz elemei számának reciprok értékével, de könnyű belátni, hogy egy tetszőleges normált strukturában értelmezhetünk egy másik normát azáltal, hogy minden elem normáját ugyanazon c számmal beszorozzuk. Éppen ezért előre kiköthetjük, hogy a struktura legnagyobb elemének normája 1 legyen. A normára kikötött feltételekből 0 normájára csak annyi következik, hogy kisebb a struktura bármely más elemének normájánál. A legtöbb esetben olyan normálásokat használunk, amelyeknél 0-nak a normája zérus, (ilyen például az egész számok strukturájának fentemlített normálása), de nem árt hangsúlyozni, hogy ez az axiomákból nem következik, és ismeretesek olyan normált strukturák is, ahol a norma negatív értékeket is felvesz. Nézzük mármost, hogyan lehet normát értelmezni egy halmaztesten. A normára vonatkozó feltevéseink értelmében egy halmaz tetszőleges valódi részhalmazának normája kisebb kell hogy legyen, mint magának a halmaznak a normája. Ez a feltétel teljesül például akkor, ha egy megszámlálható H alaphalmazból indulunk ki, és azon úgy értelmezünk egy additiv halmazfüggvényt, hogy minden elemhez hozzárendelünk egy pozitív számot. Azonban, ha kontinuum számosságú alaphalmazról van szó, akkor ez a feltétel nem teljesíthető mindig. Például, ha a $(0, 1)$ intervallumot választjuk alaphalmaznak és a mérhető halmazok halmaztestén a LEBESGUE-féle mértéket vezetjük be, mint additiv halmazfüggvényt, akkor ez a feltétel nem teljesül, mert ha egy pozitív mértékű halmazból elhagyunk egy zérus mértékű halmazt, attól a mérték nem csökken. Ezen GLIVENKO úgy segít, hogy azonosnak tekinti az összes olyan mérhető halmazokat, amelyek egymástól csak egy 0 mértékű halmazban különböznek. Áttérve a valószínűségszámítás terminológiájára, azonosnak tekint olyan eseményeket, amelyek egymástól csak 0 valószínűséggel különböznek. Másszóval, ha A és B olyan események, hogy annak a valószínűsége, hogy B ne következzék be, feltéve, hogy A bekövetkezett zérussal egyenlő, és megfordítva, akkor A-t és B-t GLIVENKO azonos stochasztikus típushoz tartozóknak nevezi. Könnyű belátni, hogy ha A és A' ugyanazon stochasztikus típushoz tartoznak, továbbá B és B' egy másik stochasztikus típushoz tartoznak, akkor $A+B$ és $A'+B'$ és ugyanúgy ha A részhalmaza B-nek, akkor $B-A$ és $B'-A'$ is, azonos stochasztikus típushoz tartoznak, másszóval a stochasztikus típusok is halmaztestet alkotnak. Az eredeti halmaztesten értelmezett additiv halmazfüggvény a stochasztikus típusok testén már eleget tesz a normától megkívánt tulajdonságoknak. Végül néhány szót a normált strukturák bővítéséről. Egy normált strukturában távolságot vezethetünk be, a következőképpen: az a és b elemek távolságán értjük az $|a+b|-|ab|$ számot, amelyet (a, b)-vel jelölünk. Könnyű belátni, hogy az így definiált távolság eleget tesz a távolságra vonatkozó szokásos feltételeknek, tehát $(a, b)=0$-ból következik, hogy $a=b$ (a norma szigorú monotonitását éppen azért szokás kikötni, hogy ez a feltétel teljesüljön), ha viszont a és b nem azonosak, akkor távolságuk pozitív; továbbá $(a, b)=(b, a)$, végül pedig érvényes az úgynevezett háromszögegyenlőtlenség, azaz $(a, b) \leqq (a, c)+(c, b)$. Utóbbi állítást — disztributiv strukturákban — a következőképpen bizonyíthatjuk be: Az állítás nyilván equivalens a következővel: $|a+b|-|ab| \leqq |a+c|-|ac|+|b+c|-|bc|$. A norma definiciója értelmében $|a+b|+|ab|=|a|+|b|$ és hasonló relációkat írhatunk fel a-ra és c-re, továbbá b-re és c-re is. Így bebizonyítandó állításunk equivalens a következővel: $|ac|+|bc| \leqq |ab|+|c|$. Mivel feltettük, hogy disztributiv strukturáról van szó, $ac+bc=(a+b)c$, de akkor $|ac|+|bc|=|ac+bc|+|ac.bc|=|(a+b)c|+|ac.bc|$. Másrészt könnyű belátni, hogy definicióink értelmében $ac.bc=ab.c$, tehát a bizonyítandó állítás a következő alakra hozható: $|ab.c|+|(a+b)c| \leqq |ab|+|c|$. Ebben az alakban az egyenlőtlenségünk pedig már nyilvánvaló, hiszen a szorzás definiciója értelmében $ab.c \subset ab$, továbbá $(a+b)c \subset c$ tehát a norma tulajdonságai alapján $|ab.c| \leqq |ab|$ és $|(a+b)c| \leqq |c|$. Azt is könnyen beláthatjuk a bizonyításból, hogy egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha $ab \subset c \subset a+b$. Miután távolságot vezettünk be strukturánkban, másszóval metrikus térré tettük, beszélhetünk konvergenciáról is. Az S normált struktura elemeinek egy a_n sorozatát CAUCHY-sorozatnak nevezzük, ha (a_n, a_m) zérushoz tart, ha n és m egyidejűleg végtelenhez tartanak. Egy normált strukturát teljesnek nevezünk, ha minden az elemeiből alkotott a_n CAUCHY-sorozatnak van határértéke, azaz van S-nek olyan a eleme, hogy (a_n, a) zérushoz tart, ha n végtelenhez tart. GLIVENKO bebizonyítja, hogy minden normált struktura kibővíthető teljessé, oly módon, hogy a struktura elemeire értelmezett összeadási és szorzási relációk.

továbbá a struktura elemeinek normái változatlanok maradnak a bővített strukturában is. A normált strukturák kibővítése teljes strukturává szükséges ahhoz, hogy a valószínűségszámítás GLIVENKO-féle rendszerét felépítsük. Amint előrebocsájtottuk, GLIVENKO elmélete sok szempontból érdekes, amennyiben a valószínűségszámítás és a modern algebra között fennálló kapcsolatokat megvilágítja és a probléma mélyebb megértéséhez vezet, azonban a valószínűségszámítás minél egyszerűbb és áttekinthetőbb felépítése szempontjából GLIVENKO elmélete kerülő útat jelent, és feltétlenül KOLMOGOROFF elméletét kell előnyben részesítenünk.

Egyéb elméletek.

Természetesen ismertetésünkben nem térhettünk ki a valószínűségszámítás megalapozására irányuló összes újabb kísérletek részletes tárgyalására, de ez nem is volt feladatunk, tekintve, hogy célkitűzésünk csak az volt, hogy KOLMOGOROFF rendszerét ismertessük, és más elméletekre csak azért tértünk ki, hogy KOLMOGOROFF axiomarendszerével összehasonlítsuk őket. Így például nem tértünk ki COPELAND,[47] REICHENBACH,[48] POPPER[49] és KAMKE[50] vizsgálataira, tekintve, hogy utóbbi szerzők ugyanarra igyekeztek, mint WALD és TORNIER, vagyis MISES elméletének ellentmondásmentessé tételére, és eredményeiket ezen a téren WALD és TORNIER jórészt túlhaladták. Nem tértünk ki J. VILLE[51] kutatásaira sem, aki MISES elméletének érdekes kritikáját adta. Ugyancsak nem foglalkoztunk olyan elméletek ismertetésével, mint például DE FINETTI elmélete,[52]

[47] A. H. Copeland, Point set theory applied to the random selection of the digits of an admissible number, Amer. Journal of Math. 58, 1936.

[48] H. Reichenbach, Mathematische Zeitschrift, Bd. 34.

[49] K. Popper, Logik der Forschung, Wien, 1935.

[50] E. Kamke, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie, Hirzel, Leipzig, 1932.

A valószínűségszámítás modern irányai a magyar matematikai irodalomban eddig kevés visszhangra találtak. Csak Stachó Tibor tankönyvében (Felsőbb mennyiségtan, Budapest, Franklin, 1944. 4-ik kiadás.) találunk egy valósznűségszámítással foglalkozó fejezetet. Stachó Kamke elméletét veszi át. Kamke elmélete, ugyanúgy mint a többi elmélet, amely a valószínűséget mint a gyakoriság határértékét vezeti be, feleslegesen bonyolult és nehézkes és ma már túlhaladott álláspontot képvisel. Ezért semmiképpen sem nevezhető szerencsésnek a valószínűségszámításnak ezen elméleten alapuló bevezetése.

[51] J. Ville, Étude critique de la notion de collectif, Paris, Gauthiers Villars, 1939.

[52] B. de Finetti, Actualités Scientifiques et Industrielles, 766, Paris, Hermann, 1939.

amelyek nem is törekszenek arra, hogy a valóságban lejátszódó statisztikai törvényszerűségeket mutató folyamatok leírására alkalmas exakt matematikai elméletet adjanak, hanem e helyett a valószínűségi ítélet „szubjektív jellegére" vonatkozó filozofálásra szorítkoznak és a valószínűségszámítást „pszichologiailag" igyekeznek megalapozni. Meg kell még jegyeznünk azt is, hogy bármennyire igyekeztünk KOLMOGOROFF elméletét több oldalról is megvilágítani, természetesen az olvasó nem nyerhet teljes képet erről az elméletről a nélkül, hogy alkalmazásait is megismerné. Az elmélet alkalmazásainak ismertetésére alkalmat fog szolgáltatni következő cikkünk, amelyben a szovjet matematikusoknak a valószínűségszámítás különböző kérdéseiben elért jelentős eredményeit fogjuk ismertetni.

Összefoglalás.

„A matematika 30 éve a Szovjetunióban" c. nagy összefoglaló munka „A matematika alapjai és a matematikai logika" c. bevezető tanulmányában JANOVSZKAJA[53] rámutat arra, hogy „a mai reakciós burzsoá filozófusok és tudománytörténészek következetesen arra törekszenek, hogy kisímítsák az éles szögleteket a természettudomány és a matematika történetében és azt mint lapos, evolúciós folyamatot igyekeznek ábrázolni, amelyben az egyik nagy felfedezést vagy elméletet követi a másik". A tudomány történetének ezt az ellaposítását éles bírálat tárgyává tette ZSDÁNOV[54] a Szovjetunióban 1947-ben tartott filozófiai vita során, és rámutatott, hogy ez a tudománytalan felfogás merőben ellentétben áll a dialektikus materializmus álláspontjával és a legkevésbbé sem felel meg a valóságnak. A valószínűségszámítás megalapozásának kérdése körüli viták, amelyeket fentiekben röviden vázolni igyekeztünk, világosan mutatják, hogy amikor a matematika alapjait illető döntő kérdésekre kerül a sor, különböző ellentétes felfogások és irányok harcával találkozunk, amely harc — ugyanúgy mint a filozófiában vagy a természettudományok alapkérdéseiben — lényegében a materialista és idealista felfogás harca. Ennek a kérdésnek kimerítő tárgyalása túlnő jelen ismertetésünk keretein és külön tanulmány tárgyát kell hogy képezze, azonban némely helyen mégis szükségesnek tartottuk, hogy a valószínűségszámítás megalapozására irányuló egyes kísérletek filozófiai gyö-

[53] Matematika v SzSzSzR za tricat let, 1917—1947, Ogiz, Gosztechizdat Moszkva—Leningrád, 1948, 15. old.

[54] Társadalmi Szemle, 1947, 9—10. szám, 634—649.

kereire rámutassunk.[55] Rámutattunk arra is, hogy a szovjet matematikusoknak, a valószínűségszámítás megalapozására vonatkozó sikeres vizsgálataiban, a dialektikus materialista módszer mutatta meg a helyes útat. Bevezetőben utaltunk továbbá arra, hogy a szovjet matematikusok nemcsak a valószínűségszámítás megalapozásának kérdésében, hanem a valószínűségszámítás legkülönbözőbb új ágaiban is vezető szerepet visznek. ALEXITS és FENYŐ könyvükben megmutatják,[56] hogy ez nem véletlen, mert a szovjet valószínűségszámítási iskola nagyarányú fejlődésének társadalmi alapját a szocialista társadalom konkrét szükségletei alkotják.

Ugyanakkor, amikor megállapítjuk, hogy a valószínűségszámítás megalapozására vonatkozó összes eddigi kísérletek közül a KOLMOGOROFF által mutatott út a legalkalmasabb, hozzá kell tennünk, hogy természetesen a valószínűségszámítás alapjainak kérdése még távolról sincsen lezárva, azonban bizonyosra vehető, hogy a további kutatások kiindulópontját KOLMOGOROFF elmélete fogja képezni.

МАТЕМАТИКА В СССР ЗА ТРИДЦАТЬ ЛЕТ
I. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

Математическое общество им. Я. Больаи считает одним из своих наиболее важных задач познакомить венгерскую публику с великими успехами Советской математики. С этой целью служит серия статьей „Математика в СССР за тридцать лет", которая будет опубликована в этом журнале. Настоящая статья, (являющаяся) первой статьей этой серии, посвящена исследованиям Советских математиков об основах теории вероятностей. Следует продолжение этой статьи о результатах Советских исследователей в различных специальных областях теории вероятностей. В начале статьи даётся ремзюе истории вопроса, и изложение классического понятия вероят-

[55] Természetesen nem állítjuk, hogy ezek a filozófiai gyökerek az illető elméletek szerzőinél mindannyiszor tudatosak voltak, bár erre is van példa: de Finetti például határozottan Hume agnoszticizmusának követőjének vallja magát és Hume filozófiájára alapítja a valószínűségszámításra vonatkozó nézeteit, l. Actualités Scient. et Ind. 739, Paris, Hermann, 1938, 6—7 o.

[56] id. mű, 54—55. o.

ностей, далее изложена аксиоматика С. Н. Бернштейна. Следует критическое обсуждение попыток Мисеса и его последователей, которые определили вероятность как преледь частоты, и показано неправиьность этого направления. После этого дается подробное изложение аксиоматической теории А. Н. Колмогорова, и показано, что система Колмогорова является наиболее простым, естественным и подходящим базисом построении теории вероятностей, включая самые новые разделы этой теории. Наконец дается обзор теории вероятностей как теории польных нормированных булевских алгебр, следуя В. И. Гливенко.

30 YEARS OF MATHEMATICS IN THE SOWIET UNION. I. ON THE FOUNDATIONS OF PROBABILITY THEORY.

The J. Bolyai Mathematical Society considers as one of its most important tasks to expose to the Hungarian public the most important results of Sowiet mathematicians. The series of articles, entitled „30 years of mathematics in the Sowiet Union" which will be published in this journal, serves this purpose. The present paper, which is the first in this series, deals with the investigations of Sowiet mathematicians on the foundations of probability theory. It will be followed by an other paper on the results of Sowiet mathematicians in the various fields of research of probability theory. In the present paper a short recapitulation of the history of the question and of the classical concept of probability is given, further the axiomatic theory of S. Bernstein is exposed. It follows a critical survey of the attempts of v. Mises and his followers, who defined probability as the limit of frequency, and the failure of these attempts is shown. After this a detailed study of the axiomatic theory of A. Kolmogoroff is given, and it is shown that this theory serves as the most simple, natural and apted basis on which the theory of probability, together with its most recent chapters can be built. Finally the theory of V. Glivenko is discussed, which builds up the theory of probability as the theory of normed lattices.