ilyen számot találhatunk? A további kérdések már nem ilyen sürgősek, így azok már beleszámítanak a pontversenybe is.

7. Legyen z_1, z_2, z_3 a komplex számsík három pontja. Hol feküsznek azok a z pontok, amelyekre:

$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} : \frac{z-z_1}{z-z_2} \text{ valós szám?}$$

8. Kiszámíthatjuk-e egy tetszőleges komplex szám négyzetgyökét úgy, hogy közben csak valós számokkal végzünk alapműveleteket, vagy gyökvonásokat? Ha igen, hogyan?

Surányi János.

Játék a véletlennel.

A mindennapi életben gyakran használjuk azt a kifejezést, hogy „ez nagyon valószínű", vagy azt, hogy „ez igen valószínűtlen". Beszélünk „ritka véletlenek"-ről, gyakran mondjuk valamire, hogy „ez teljesen a véletlentől függ". Ilyen és hasonló kifejezéseket akkor használunk, ha valamilyen esemény bekövetkezésére nézve nem tudunk bizonyosat állítani, több lehetőséggel állunk szemben és a különböző lehetőségek esélyeit latolgatjuk. Ilyen — a véletlen játékától függő — jelenségekkel találkozunk minden szerencsejátékban (gondoljunk a kártyajátékokra, a kockázásra, a legegyszerűbb játékra: a fej — vagy — írásra, vagy a mostanában divatos totora). Ilyenekkel számolunk a statisztikában és a biztosítótársaságok munkájában (születések, halálozások, házasságok, vagy balesetek számlálásánál), szerepük van a gyáripari tömegtermelésben (pl. futószalagon gyártott tömegcikkek egy kis hányada hibás szokott lenni); de ilyen jelenségekkel találkozunk a modern fizika sok területén is (rádióaktivitás, gázmolekulák mozgása, stb.). Ezeknél a példáknál is tapasztalható, hogy a véletlen játékától függő események, kísérletek is bizonyos egész pontos törvényszerűségeket mutatnak. Ezekkel a törvényszerűségekkel foglalkozik a matematika egy igen érdekes és fontos ága: *a valószínűségszámítás.*

Hogy lehet ezeket az esetleges jelenségeket megfogni? Kezdjük egy egyszerű példával, a társasjátékokban oly sokszor használt dobó kockával: szabályos kis fakocka, amelynek lapjai rendre egy, kettő, három, négy, öt és hat ponttal vannak megjelölve. Valamikor ez igen elterjedt szerencsejáték volt. Erről szól egy régi történet: Egyszer Galiani nápolyi püspöknél megjelent egy bűvész és bemutatta mutatványát: három kockát dobott fel és meglepetve látták a nézők, hogy mind a három kocka a hatos oldalával felfelé esett le. Még jobban csodálkoztak, amikor a bűvész újra, meg újra megismételte a mutatványt. Amikor ötödszörre dobott ismét három hatost, a püspök felkiáltott: „Ördögbe is, ez boszorkányság!" „Én inkább azt hiszem, — szólalt meg egy matematikus barátja — hogy hamisak a kockák". Megvizsgálták és valóban a kockának a hatossal szemben lévő oldala ólmozva volt.

Tényleg, elég hihetetlen, hogy rendes dobókockával ilyen mutatványt lehessen produkálni, mégis, miért lehetett a matematikus olyan biztos a dolgában?

Ha feldobunk egy kockát, semmilyen szabállyal nem számíthatjuk ki előre, melyik lapja fog felfelé mutatni. Ha azonban nagyon sokszor dobjuk fel, mondjuk pl. 600-szor (próbáljuk ki), akkor egyik szám sem fog sokkal kevesebbszer, vagy többször látszani a többinél, mindegyik közel 100-szor fog előfordulni. Ha meg 6000 kísérletet végzünk, akkor minden szám körülbelül 1000-szer kerül a kocka felső oldalára. Ha a kocka teljesen szabályos, akkor nem is lehet másképp, hisz az egyes lapok közt semmi különbség sincs, a számokat akár össze is cserélhetnénk az egyes oldalakon, észre sem lehetne venni, hogy valami változás történt. Ha tehát nagyon sok kísérletet végezve feltűnő az eltérés valamelyik szám előfordulásánál, akkor csak nézzük meg jól a kockát, mert valami egyenetlenség lesz benne és nem az ördög játszik velünk. Szabályos kocka esetén egyik oldalnak sem lehet semmi oka, hogy gyakrabban forduljon elő a többinél. Elég nagyszámú dobásnál tehát egy oldal, pl. az 1-essel jelölt, — az eseteknek mindig kb. $^1/_6$-részében mutatkozik. Ezt a számot az 1-es előfordulása *gyakoriság*ának nevezzük. Általában egy esemény gyakoriságát úgy számítjuk ki, hogy az összes végzett kísérletek számával elosztjuk azoknak a számát, amelyekben a kérdéses esemény bekövetkezett.

A fenti 1/6 értékhez azonban nem is kísérletek útján jutottunk el, hanem beláttuk, hogy a hat lehetséges esemény (t. i. hogy a kocka 1-et, 2-őt, 3-at, 4-et, 5-öt, vagy 6-ot mutat) egyformán lehetséges, egyik sincs kitűntetve a másikkal szemben. Az ilyen eseményeket *egyformán valószínű*nek fogjuk nevezni. Az 1/6 elméletileg számított érték tehát pontosabban szólva, a várható gyakoriság.

Bűvészünk három kockával dobott. Itt már sok lényegesen különböző lehetőséggel kell számolnunk, mint például, ha az egyik kocka 3-at, a másik 4-et, a harmadik 6-ot mutat, vagy ha a mutatott számok 1, 1 és 6, stb. Nem nehéz összeszámolni, hogy a lehetőségségek száma 56. Ezek közül azonban a különböző ehetőségek várható gyakorisága nem egyforma. Látni fogjuk, hogy a három hatos dobásának várható gyakorisága csak 1/216, vagyis kevesebb, mint egy fél százalék. Az, hogy egy esemény, amely általában 216 eset közül egyszer fordul csak elő, 5 esetben egymásután bekövetkezzék, valóban rendkívül valószínűtlen, már szinte lehetetlen. Minden bizonnyal valami csalafintaság kellett, hogy legyen a kocka elkészítésénél, vagy a különböző lapok nem voltak egyformán valószínűek, pl. nem egynemű a kocka anyaga (mint az említett történetben), vagy arra az egyszerűbb — bár könnyen leleplezhető — csalásra is gondolhatnánk, hogy az egyes kockákon nem egy, hanem több hatos jelzésű lap van. Tegyük fel például, hogy egy egyébként szabályos kocka 4 lapja van hatossal jelezve, a fennmaradó 2 lap pl. 1-essel és 2-essel. Ebben az esetben a hatos dobás várható gyakorisága nyilván 4/6=2/3, mivel feltettük, hogy a kocka más szempontból szabályos s így az egyes lapok várható gyakorisága egyenlő, a hat egyformán lehetséges esetből pedig négy esetben kapunk 6-ost.

Ha egy esemény várható gyakorisága nagy, közel van 1-hez, akkor könnyebben elképzelhető, hogy az esemény mindjárt első kísérletre, vagy esetleg többször egymásután is, bekövetkezzék. A várható gyakoriság tehát alkalmas mértéke annak, hogy egy esemény mennyire valószínű. Ezért *egy esemény valószínűségén annak várható gyakoriságát értjük*, tehát a gyakoriságnak ezt az elméletileg számított értékét. Ezt a kis megkülönböztetést azért tesszük, mert a gyakorlatban apróbb egyenetlenségek találhatók például a leggondosabban készített dobókockán is, de ha elég kicsinyek ezek a szabálytalanságok, akkor nem befolyásolják lényegesen a gyakoriságot. A legegyszerűbb esetekben, amilyen a dobó kockáé is, ha a kísérlet különböző lehetséges eredményei egyenlően valószínűek, csak azt kell megvizsgálni, hogy a különböző lehetséges és egyenlően valószínű esetek közül a várt esemény hány esetben valósul meg és ezt a számot el kell osztani az összes lehetséges esetek számával, így kapjuk a valószínűséget. Abban a speciális esetben tehát, ha a kísérlet kimenetele egyformán valószínű eshetőségekre bomlik, a valószínűséget ezen a közismert módon számíthatjuk: a kedvező esetek számát elosztjuk az összes lehetséges (egyformán valószínű) esetek számával. Hogy miért hangsúlyozzuk ennyire, hogy ez csak egyformán valószínű esetekre érvényes, azt előbbi hamis kockánkon azonnal láthatjuk. Ott különböző lehetőség csak 3 van: hogy a kocka 1-est, 2-est, vagy 6-ost mutasson. Annak, hogy 6-ost dobjunk, mégsem az így hibásan számítható 1/3, hanem a duplája a valószínűsége, mert egyformán valószínű lehetőség 6 van és ezek közül 4 a kedvezőek száma.

A három kockánál úgy látszik, a számbavett 56 eset szintén nem egyformán valószínű. Miért? Vizsgáljuk előbb azt az esetet, mikor két kockával dobunk. A lehetséges különböző esetek a következők:

1, 1	2, 2	3, 3	4, 4	5, 5	6, 6
1, 2	2, 3	3, 4	4, 5	5, 6	
1, 3	2, 4	3, 5	4, 6		
1, 4	2, 5	3, 6			
1, 5	2, 6				
1, 6,					

tehát összesen 21 eset van. Mégis például két 6-os, vagy 1-es és 2-es dobásának valószínűsége nem 1/21, mert igaz, hogy a kockák egyformán feketék szoktak lenni, fehér pontokkal s ilyenkor nem is tudjuk feldobás után, melyik kocka volt az „egyik", melyik a „másik", a kísérlet esélyein azonban nyilván nem változtat semmit, ha az egyik kockát piros színnel átfestjük. De akkor a két kocka már megkülönböztethető és így világos, hogy két különböző egyformán valószínű eset az, amikor a fekete kocka 1-est, a piros 2-est mutat, vagy amikor a fekete mutat 2-est és a piros kocka 1-est. Mivel a fekete kocka 6 különböző számot mutathat és akármit is mutat, attól függetlenül a piros kocka 6 különböző oldala nézhet felfelé, így az egyformán valószínű esetek száma összesen $6.6=36$. Ahhoz, hogy két 6-ost dobjunk; ezek közül csak egy eset kedvező; tehát 1/36 ennek a valószínűsége. Arra viszont, hogy 1-est és 2-est dobjunk, 2 eset kedvező, tehát ennek a valószínűsége: $2/36=1/18$. Ha végül három kockával dobunk, a lehetséges és egyformán valószínű esetek száma megint meghatszorozódik, hiszen az első két kocka akármit is mutat, a harmadik kockán ettől függetlenül a hat szám bármelyike mutatkozhat. Három kockával tehát a lehetséges és egyformán valószínű dobások száma $6.36=216$ és három hatos dobásának valószínűsége 1/216.

A kedvező és a lehetséges esetek összeszámlálásánál sok tévedés lehetséges. Még egy példát mutatunk. Mi annak a valószínűsége, hogy két kockával dobva, legalább egy 1-est dobunk? A lehetséges esetek száma 36. Kedvező esetek, ha a fekete kockán 1-es áll, a piros ekkor a 6 szám bármelyikét mutathatja. Ugyanígy bármit mutathat a fekete kocka, ha a piroson áll 1-es. Ez 6—6 kedvező eset, mégis hibás volna összesen 12-nek számolni. Csak 11 kedvező eset van, mert kétszer számoltuk azt a lehetőséget, hogy ha mindkét kocka 1-est mutat, ez pedig csak egy eshetőség. Így a kérdezett valószínűség 11/36 ($< 12/36=1/3$). — A hiba onnan eredt, hogy a kedvező eseteket két részben számoltuk össze, a kétféle lehetőségek azonban nem zárták ki egymást. Erre a hibalehetőségre is vigyázva, azt mondhatjuk:

— *Ha egy kísérletnek N különböző kimenetele lehet, ezek páronként kizárják egymást és egyenlően valószínűek és valamely esemény bekövetkezésére az említett N eset közül K számú kedvező, akkor az esemény valószínűsége* $v = K/N$. Az így számított valószínűség mindig 0 és 1 közé eső szám.[1])

Ezt a szabályt használtuk eddigi példáinkban, de ehhez nem kellett mást tudnunk, minthogy a dobókocka minden oldalának a valószínűsége egyformán 1/6. Hogy következtettünk ezekből az összetettebb esetekre? Könnyű látni, ha kicsit változtatunk meggondolásunkon: Mi a valószínősége, hogy két 6-ost dobunk? A fekete kockának 6-ost kell mutatnia. Ez a 36 lehetőség 1/6-ában, 6-ban teljesül. Ezek között is csak azok kedvezőek, amelyeknél a piros kockán is 6-os látszik. Mivel a fekete kocka állásától független, hogy a piros mit mutat, két 6-os ezen eseteknek is csak 1/6-ában (1 esetben) várható. Így a két 6-os dobás várható gyakorisága, vagyis valószínűsége $1/6 . 1/6 = 1/36$. Tehát összeszoroztuk annak a valószínűségét, hogy a fekete, meg azét, hogy a piros kocka 6-ost mutasson.

Nézzük meg annak a valószínűségét is újra, hogy egy 1-est és egy 2-est dobunk. Annak, hogy két kockával dobva egy 1-es látsszék, 11/36 a valószínűsége, mint láttuk. Ugyanennyi kell legyen a 2-es előfordulásának valószínűsége is. Az 1-es és 2-es együttes előfordulásának valószínűségéül mégis 1/18-at találtunk és nem $11/36 . 11/36 = 121/1296$-ot. Nem is várható, hogy az utóbbi eredmény helyes legyen, hisz csak meggondolás nélkül próbáltuk ráhúzni a problémát az előző feladat kaptafájára. Az előző meggondolásnak azonban lényeges pontja volt, hogy ha az első kockán már tudjuk, hogy 6-os látszik, a másodikon továbbra is egyformán lehet bármelyik szám 1-től 6-ig. Itt azonban lényegesen változtat a helyzeten, ha tudjuk, hogy valamelyik kocka 1-est mutat. Ekkor már csak a következő esetek lehetségesek: mindkét kockán 1-es van, a feketén 1-es, a piroson 2, 3, 4, 5, vagy 6-os, vagy a piroson 1-es és a feketén 2, 3, 4, 5, vagy 6-os. Ez összesen 11 eset és ezek közül kettőben látszik egy 2-es is. Ha tehát tudjuk már, hogy az egyik kockán 1-es áll, akkor annak a valószínűsége, hogy a másikon viszont 2-es álljon, 2/11 lesz. Így az, hogy 1-est

[1]) 0 azt jelenti, hogy az esemény lehetetlen, 1 azt, hogy bizonyosan, minden esetben be fog következni. Szokták %-ban is kifejezni a valószínűséget, az nyilván a fenti valószínűség 100-szorosa. A lehetetlenséget akkor is 0 jelzi, a bizonyosság meg a „100%-os valószínűség."

és 2-est dobunk, a kísérletek $11/36 . 2/11 = 1/18$-részében várható, amint ezt már más úton is beláttuk.

Itt tehát egy új lehetőség merült fel: ha két eseményt figyelünk meg egyidejűleg és tudjuk, hogy az egyik bekövetkezett már, akkor lehet, hogy más a valószínűsége a második bekövetkezésének, mint amilyen valószínűséggel várhatjuk a második esemény bekövetkezését, míg az első eseményről nem tudunk semmit. Annak a valószínűségét, hogy egy B esemény bekövetkezzék (utolsó példánkban, hogy valamelyik kocka 2-est mutasson), ha már tudjuk, hogy egy A esemény bekövetkezett (esetünkben valamelyik kocka 1-est mutatott), a B esemény *feltételes valószínűségének* nevezzük azzal a feltétellel, hogy A már bekövetkezett, vagy rövidebben B-nek A-ra vonatkoztatott feltételes valószínűségének. Jelölni így fogjuk $v_A(B)$, míg az egyszerű valószínűséget $v(B)$-vel.[2])

Ha két kockával dobtunk és azt néztük, mi a valószínűsége, hogy a piros kockán 6-os legyen, 1/6 volt mindenképpen, függetlenül attól, hogy tudtuk-e, vagy sem, hogy a fekete kocka mit mutat. Ellenben, ha tudtuk, hogy az egyik dobott szám 1-es, ettől már igenis függött, hogy mi annak a valószínűsége, hogy a másik szám 2-es legyen.

Első esetben, ha egy B esemény valószínűsége egyenlő az A-ra vonatkoztatott feltételes valószínűségével, azt mondjuk, hogy a B esemény *független* az A eseménytől.

Ismét nézzük meg, hogy számíthatjuk ki a feltételes valószínűséget. Az egyszerű valószínűségnél az összes lehetséges esetek közül kellett kikeresni azokat, amikben B bekövetkezik (azt a 6 esetet, amiben a piros kocka 6-ost mutat, illetve azt a 11-et, amelyikben valamelyik kockán a 2-es látszik). A feltételes valószínűségnél viszont az összes esetek közül először is ki kell keresnünk azokat, amikben A bekövetkezik, csak ezek a lehetséges esetek (példáinkban az a 6 eset, amikor a fekete kocka 6-ost mutat, illetőleg az a 11 eset, amelyikben 1-es látható). Ezek közül meg kell számlálni, hogy melyekben következik be B is (egyben mutat a piros kocka is 6-ost, illetve két esetben 2-es a másik kockán látszó szám). Ez a kedvező esetek száma, ezt kell osztani az előbbi számmal, mint lehetséges esetekével.

Ha így kiválogatunk egy részcsoportot a lehetséges esetek közül, akkor persze csak ritka véletlen, ha ezek közt is ugyanolyan

[2]) Szokás néha az utóbbit: a „priori" valószínűségnek, a feltételes valószínűséget pedig „a posteriori-nak" nevezni.

arányban következik be B, mint az összes lehetőségek közt. Ez jelenti a független eseményeket. Könnyű azonban látni, hogy két, A és B esemény egyidejű bekövetkezésének valószínűségét kiszámíthatjuk úgy, hogy az A esemény bekövetkezésének valószínűségét megszorozzuk a B eseménynek A-ra vonatkoztatott feltételes valószínűségével. Az együttes valószínűséget $v(A \& B)$-vel jelölve:

$$v(A \& B) = v(A) \, . \, v_A(B). \qquad (1)$$

Legyen a kísérletek lehetséges kimeneteleinek száma N, ahol ezek az esetek egyformán valószínűek és kizárják egymást. Ezek közül K számúban következzék be az A esemény és a K eset közül k számúban a B is. Ekkor nyilván $v(A \& B) = k/N$, $v(A) = K/N$ és $v_A(B) = k/K$. Így a $v(A)$. $v_A(B)$ szorzatban K-val egyszerűsítve, valóban megkapjuk $v(A \& B)$-t.

Feltéve, hogy A valószínűsége nem 0, másszóval A nem lehetetlen,[3]) (1)-et a következő alakban is felírhatjuk:

$$v_A(B) = \frac{v(A \& B)}{v(A)} \qquad (2),$$

vagyis ha ismerjük az $A \& B$, meg az A esemény valószínűségét, abból kiszámíthatjuk B-nek A-ra vonatkoztatott feltételes valószínűségét úgy, hogy $A \& B$ együttes teljesülésének valószínűségét elosztjuk A valószínűségével. Az általános esetben, amikor nem lehet olyan könnyen összeszámolni a lehetséges és kedvező eseteket, a (2) képlet szolgál a feltételes valószínűség meghatározásául, akkor persze a szorzás tétel, vagyis (1) $v(A)$-val való beszorzással következik. Függetlennek akkor neveztük a B eseményt az A-tól, ha $v_A(B) = v(B)$. Ebben az esetben

$$v(A \& B) = v(A) \, . \, v(B). \qquad (1')$$

Ebből könnyen következik, hogy ha B független A-tól, akkor megfordítva A is független B-től. Tegyük fel ugyanis, hogy B független A-tól és számítsuk ki A-nak B-re vonatkoztatott feltételes valószínűségét. A (2) képletben A és B szerepét felcserélve (1′) alapján azt kapjuk, hogy

$$v_B(A) = \frac{v(A \& B)}{v(B)} = \frac{v(A) \, . \, v(B)}{v(B)} = v(A) \qquad (3),$$

tehát A is független B-től.

---

[3]) Amely esetben természetesen az is lehetetlen, hogy A és B együtt bekövetkezzék, hogy egy tréfás hasonlatot mondjak: ha lehetetlen, hogy egy kutya emberi nyelven beszéljen, akkor az is lehetetlen, hogy egy kutya spanyolul beszéljen.

Hogy alakulnak az eredményeink, ha nem két, hanem több esemény egyidejű bekövetkezését vizsgáljuk? Induljunk ki ismét egy példából. Egy urnában 20 egyforma golyó van, ezek közül 12 piros és 8 kék. Háromszor egymásután húzunk egy-egy golyót, mi annak a valószínűsége, hogy mind a háromszor piros golyót húztunk? Kétféleképpen végezhetjük a kísérleteket. Vagy minden húzás után visszadobjuk a kihúzott golyót — és az urnát jól megrázzuk, hogy a golyók elkeverődjenek, — vagy nem tesszük vissza a golyókat. Ez persze lényeges különbséget jelent. Ha a kihúzott golyót visszadobjuk, akkor az egyes húzások egymástól függetlenek, második és harmadik alkalommal ugyanaz a valószínűsége annak, hogy piros golyót húzzunk, mint első alkalommal, mégpedig a kedvező esetek száma, osztva a lehetséges esetek számával, tehát $12/20 = 3/5$. Annak a valószínűsége tehát, hogy először is, másodszor is piros golyót húzzunk, $3/5 . 3/5 = 9/25$; annak a valószínűségét pedig, hogy harmadszorra is piros golyót húzzunk, úgy kapjuk meg, hogy még egyszer megszorozzuk az eredményt 3/5-del, tehát a keresett valószínűség $27/125$, valamivel több, mint $1/5$. Ha viszont a kihúzott golyót nem dobjuk vissza és először piros golyót húztunk, akkor az urnában csak 11 piros és 8 kék golyó maradt, összesen 19; tehát annak a valószínűsége, hogy másodszorra piros golyót húzunk, $11/19$, a két húzás eredménye nem független. Annak a valószínűsége, hogy az első húzásra is, a másodikra is piros golyót húzzunk, (1) szerint $3/5 . 11/19 = 33/95$. Ha az első két húzásnál piros golyót húztunk, akkor most már csak 18 golyó maradt az urnában. Ezek közül csak 10 piros van, tehát annak a valószínűsége, hogy harmadszorra piros golyót húzzunk, ez esetben csak $10/18 = 5/9$ lesz s így megint alkalmazva két esemény együttes bekövetkezésére vonatkozó képletünket, annak a valószínűsége, hogy első kétszer is, harmadszor is piros golyót húzzunk: $33/95 . 5/9 = 11/57$, tehát kevesebb, mint $1/5$. Természetes is, hogy utóbbi esetben kisebb annak a valószínűsége, hogy háromszor egymásután piros golyót húzzunk, hiszen, ha a kihúzott golyót nem tesszük vissza, minden piros golyó kihúzásával *csökken* az urnában a piros golyók számának aránya a kék golyókéhoz. Ha viszont előszörre kék golyót húzunk és nem dobjuk vissza, ez a második húzásnál *javítja* a piros golyó húzásának esélyeit. A második feladatban három esemény együttes teljesülésének valószínűségét úgy számítottuk ki, hogy az első esemény valószínűségét megszoroztuk a második esemény elsőre vonatkozó relatív valószínűségével és ezt a harmadik esemény feltételes valószínűségével azon feltétel mellett, hogy az első is, meg a második is már bekövetkezett. Ezt tettük az első feladatnál is, csak ott ez a három valószínűség megegyezett. Jelöljük A, B, C-vel a három eseményt, $v(A \& B \& C)$-vel együttes bekövetkezésük valószínűségét és $v_{AB}(C)$-vel C feltételes valószínűségét, feltéve, hogy már tudjuk, hogy A és B is bekövetkezett. Akkor így számoltunk:

$$v(A \& B \& C) = v(A) \, . \, v_A(B) \, . \, v_{AB}(C). \tag{4}$$

És valóban $v(A \& B \& C)$ jelentése alapján, ha (1)-et felhasználjuk, azt nyerjük, hogy:

$$v(A \& B \& C) = v[(A \& B) \& C] =$$
$$= v(A \& B) \, . \, v_{AB}(C) = v(A) \, . \, v_A(B) \, . \, v_{AB}(C).$$

Ezek után már könnyű felírni és bebizonyítani a megfelelő szabályt, négy, öt, vagy több esemény együttes teljesülésének valószínűségére.

Három esemény közt már nagyon változatos függetlenségi kapcsolatok lehetségesek: bármely kettő független lehet egymástól és bármelyik független lehet a másik kettőtől. Csak akkor mondjuk, hogy a három esemény egymástól független, ha ez mind egyidejűleg teljesül vagyis fennáll a következő kilenc összefüggés:

$v_A(B) = v(B)$	$v_B(A) = v(A)$	$v_{AB}(C) = v(C)$
(B független A-tól)	(A független B-től)	(C független A és B-től)
$v_A(C) = v(C)$	$v_C(A) = v(A)$	$v_{AC}(B) = v(B)$
(C független A-tól)	(A független C-től)	(B független A és C-től)
$v_B(C) = v(C)$	$v_C(B) = v(B)$	$v_{BC}(A) = v(A)$
(C független B-től)	(B független C-től)	(A független B és C-től).

Már láttuk az előbb, hogy ha A független B-től, akkor B is A-tól, tehát az első két oszlopban egymás mellé írt összefüggések közül, ha az egyik teljesül, akkor a másik is teljesül. Könnyű belátni, hogy ha az első két oszlopban írt összefüggések fennállnak, akkor elég az utolsóban álló három összefüggés közül egyről tudni, hogy teljesül, abból a másik kettő már következik. Tegyük fel például, hogy $v_{BC}(A) = v(A)$, (2)-t alkalmazva a $B \& C$ és A eseményekre:

$$v_{BC}(A) = \frac{v(A \& B \& C)}{v(B \& C)}.$$

Mivel feltettük, hogy B és C függetlenek egymástól, (1) szerint:

$$v(B \& C) = v(B) \, . \, v(C), \text{ tehát } v_{BC}(A) = \frac{v(A \& B \& C)}{v(B) \, . \, v(C)}$$

Feltettük továbbá, hogy A független B és C-től, vagyis, hogy $v_{BC}(A) = v(A)$, így az előbbi képletből következik, hogy

$$v(A \& B \& C) = v(A) \, . \, v(B) \, . \, v(C) \tag{5}$$

Tehát ha három esemény független, akkor a három esemény együttes teljesülésének valószínűsége egyenlő a három valószínűség szorzatával. Ehhez nem is használtuk fel az összes összefüggéseket, mindössze annyit, hogy közülük kettő (B és C) független, a harmadik pedig (A) független ezek együttes bekövetkezésétől. Viszont a most kapott képletből következik már, hogy B is független $A \& C$-től, ha A és C független. Ugyanis ez esetben

$$v_{AC}(B) = \frac{v(A \& B \& C)}{v(A \& C)} = \frac{v(A \& B \& C)}{v(A) \cdot v(C)} =$$
$$= \frac{v(A) \cdot v(B) \cdot v(C)}{v(A) \cdot v(C)} = v(B).$$

Ugyanígy láthatjuk be, hogy C is független $A \& B$-től, ha még A és B is független. Ezzel szemben, ha csak azt tudjuk, hogy három esemény páronkint független, abból még nem következik, hogy bármelyik is független volna a másik kettőtől. (Miért? Ennek a kérdésnek a megoldását, mint feladatot, tűzzük ki.)

Még csak az elején vagyunk a valószínűségszámításnak, de már ezzel a tudással is sok feladatot meg lehet oldani; alább néhány ilyen feladatot közlünk. Legközelebbi számunkban folytatjuk, addig is ajánljuk az olvasóknak, hogy a feladatokon gyakorolják és igyekezzenek megszokni az új fogalmakat.

Feladatok: 1. Mi a valószínűsége, hogy ha két kockával dobunk, a kockákon látható két szám összege 10 legyen?

2. Ha az urnában 8 piros és 6 kék golyó, egy másik urnában pedig 15 piros és 10 kék golyó van és mind a két urnából húzunk egy-egy golyót, mi a valószinűsége, hogy a két golyó megegyező színű lesz?

3. Ha egy 52 lapos kártyacsomagba 2 jokert (egy tréfás figurát mutató kártyalap, amely a játékban minden lapot helyettesíthet) keverünk, az első játékosnak kiosztunk 5 lapot és tudjuk, hogy az 5 lap közül az egyik joker, mi a valószínűsége, hogy a második játékos, akinek szintén 5 lapot osztunk ki, megkapja a másik jokert?

4. Ha egy urnában 15 fehér és 8 piros golyó van, háromszor egymásután húzunk egy golyót és a kihúzott golyót minden alkalommal visszadobjuk, mi a valószínűsége, hogy a három kihúzott golyó közül legfeljebb két golyó legyen fehér?

5. Mutassuk meg, hogy megadható három olyan esemény, amelyek páronkint függetlenek egymástól (A független B-től, A független C-től, B független C-től), de egyik sem független a másik kettőtől.

6. Egy urnában 5 piros és 3 fehér golyó van. A golyókat egymásután kihúzzuk az urnából: mi a valószínűsége annak, hogy a húzások közül legalább az egyik után a kihúzott golyók között ugyanannyi lesz a piros golyók száma, mint a fehéreké?

Rényi Alfréd.

Megoldások.
Beszámoló a Bolyai János tanulóversenyről.

Hírt adtunk Bolyai János matematikai tanulóverseny lefolyásáról és nyerteseiről. Az alábbiakban ismertetjük a versenyre beérkezett dolgozatokat és olvasóink megoldásait.

A nyertes dolgozatokból átvett megoldásokat szószerint közöljük, a szerkesztő szövegkiegészítéseit [ ]-zárójelbe tesszük.

I. Mutassuk meg, hogy ha n páratlan szám, akkor

$$46^n + 296 \,.\, 13^n$$

osztható 1947-tel!

I. Megoldás: [$n = 2k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) alakban írható, mivel páratlan szám.]

$$46^{2k+1} + 296 \,.\, 13^{2k+1} = 46 \,.\, 46^{2k} + 3848 \,.\, 13^{2k} =$$
$$= 2(23 \,.\, 2116^k + 1924 \,.\, 169^k) = 2\{23 \,.\, 2116^k + (1947 - 23) \,.\, 169^k\} =$$
$$= 2\{1947 \,.\, 169^k + 23(2116^k - 169^k)\}.$$

$2116 - 169 = 1947$, tehát $2116^k - 169^k =$
$$[(2116 - 169)(2116^{k-1} + 2116^{k-2} \,.\, 169 + \ldots + 2116 \,.\, 169^{k-2} + 169^{k-1})] =$$
$$= 1947 q$$

és $$1947 \,.\, 169^k + 23(2116^k - 169^k) = 1947 Q,$$

ahol q és Q egész szám. (3 pont.)

Pollák György versenynyertes dolgozatából.

Megoldotta: Fülöp M., Tóth T. *versenydolgozata, továbbá* Kocsis K., Párkány M., Tamás H.

Megjegyzés: A megoldás lényegében a $46^{2k+1} + 296 \,.\, 13^{2k+1} = 46 \,.\, 46^{2k} + 296 \,.\, 13 \,.\, 13^{2k} = 46(46^{2k} - 13^{2k}) + (46 + 296 \,.\, 13) \,.\, 13^{2k}$ átalakítást használja.

II. Megoldás: $46^{2k+1} + 296 \,.\, 13^{2k+1} = \{46^{2k+1} + (296 \,.\, 13)^{2k+1}\} - 13^{2k+1}(296^{2k} - 1)$.

Az első tag osztható $46 + 296 \,.\, 13 = 2 \,.\, 1947$-tel, $296^{2k} - 1$ pedig $(296 + 1)(296 - 1) = 9 \,.\, 33 \,.\, 59 \,.\, 5 = 1947 \,.\, 45$-tel, tehát az egész kifejezés osztható 1947-tel.

Kis hibával megoldotta Kántor K., Gaál E. *versenydolgozata.*