13. Jelöljük az 1-től különböző n-edik egységgyököket $\varepsilon_n^{(1)}, \varepsilon_n^{(2)}, \ldots, \varepsilon_n^{(n-1)}$-gyel. Számítsuk ki az

$$(\varepsilon_n^{(1)}-1)(\varepsilon_n^{(2)}-1)\ldots(\varepsilon_n^{(n-1)}-1)$$

szorzata értékét (a $+1$ csúcsból húzható átlók és oldalak szorzatát).

Fenyő

14. Hány 24-edik primitív egységgyök van? Jellemezzük geometriailag a 24-edik egységgyökök ábrázolásakor keletkező szabályos 24-szög azon csúcsait, melyek primitív egységgyököt ábrázolnak.

15. Legyen n adott egész szám és legyen ε egy primitív n-edik egységgyök, (tehát melynek n-edik hatványa 1 és melynek hatványai közt az összes n-edik egységgyök előfordul). Jellemezzük azokat a k hatványkitevőket, amik mellett ε^k szintén primitív n-edik egységgyök.

Vizsgáljuk meg a $w = i\dfrac{z-i}{z+i}$ leképezést a következő szempontokból:

16. Mi lesz ebben a leképezésben a valós tengely képe?

Van-e valami egyszerű kapcsolat két olyan pont képe közt, melyek az egységkörre vonatkozó inverziónál egymásba mennek át?

17. Mi lesz az egységkör képe, mi a vele koncentrikus köröké?

Hol feküsznek azon pontok képei, melyek a valós tengely fölötti félsíkban vannak. (Melyekre $\mathfrak{J}(z) > 0$)?

Játék a véletlennel II.

A nagy számok törvénye.

Az első részben már megismerkedtünk a valószínűségszámítás néhány alapfogalmával, közben egy sereg példát vizsgáltunk meg, a különböző fogalmakat más-más példákon mutattuk be. A továbbiakban vizsgálataink körét leszűkítjük, és szinte kizárólag csak a legegyszerűbb példával, a fej-vagy-írás játékkal fogunk foglalkozni, azért, hogy ezen az egyszerű példán elmélyíthessük ismereteinket és megismerkedhessünk a valószínűségszámítás egyik legfontosabb tételével, amely a *nagy számok törvénye* néven ismeretes. Ez a tétel a valószínűségszámítás egy fontos fogalmával, a „valószínű érték“ fogalmával függ össze.

Induljunk ki egy egyszerű példából. Egy időben divatos volt az „itt a piros, hol a piros“ játék, amelynek segítségével ügyes csirkefogók sok együgyű embert fosztottak ki. A játék a következőképpen folyt: a „bankár“ felütötte sátorfáját valamely sétatéren, három teljesen egyforma tenyérnagyságú köralakú lemezt vett elő, amelyeknek egyik oldala egyforma volt, míg a három közül az egyiknek a hátoldala pirosra volt festve. Aki részt akart venni a játékban (nevezzük „az áldozat"-nak), előre lefizetett 2 pengőt. A bankár egyenkint megmutatta neki a három körlemezt, majd nagy kézügyességgel, „itt a piros, hol a piros" kiáltások közben, szédítő gyorsasággal kevergette, rakosgatta a három lapot (persze, az egyforma oldalukkal felfelé). Végül, körülbelül félpercnyi rakosgatás után, az áldozatnak ki kellett találni, hogy a három lemez közül melyiknek a hátoldala piros. Ha kitalálta, 5 pengőt kapott, míg ha nem, elvesztette a befizetett 2 pengőjét. A bankár ezen a játékon (ha közben a rendőrség le nem fülelte), néhány óra alatt többszáz pengőt is keresett. Vizsgáljuk meg, mi ennek az oka? Ha a bankár ügyesen dolgozik, nem lehet szemmel követni, hogy hová kerül a piros hátoldalú lemez és így az áldozat találgatása teljesen a véletlenre van utalva. Így tehát 1/3-nak vehetjük annak a valószínűségét, hogy a három lemez közül eltalálja a pirost. Vagyis 1/3 a valószínűsége, hogy nyer, amely esetben 5 pengőt kap vissza, tehát 3 pengőt nyer tisztán. Ha tehát harmincszor játszik valaki, az eseteknek körülbelül az egyharmadában, tehát körülbelül tízszer fogja a pirost eltalálni. Tegyük fel, hogy a harminc közül pontosan tízszer találja el a pirost, akkor 30 pengőt nyer ezen a tíz játszmán, de a másik húszon 40 pengőt veszít, tehát összesen 10 pengőt, vagyis játszmánként 1/3 pengőt veszít. Mondhatjuk tehát, hogy várható vesztesége játszmánként 1/3 pengő. amit úgy fejezhetünk ki, hogy várható „nyeresége" —1/3 pengő, Részletesen kiírva számításunkat, a várható átlagos „nyereség":

$$\frac{10.3-20.2}{30}=\frac{1}{3}.3-\frac{2}{3}.2=-1/3.$$

(Hozzá kell még tennünk, hogy az „itt a piros, hol a piros" játék „szakértői" bizonyos pszichologiai trükkökkel is dolgoztak, a néző figyelmét ügyes fogásokkal helytelen irányba terelték és ezzel nyerési esélyét még csökkentették, persze ez már egyénileg változó tényező, amit számszerűen nehéz figyelembe venni.)

Általában is hasonlóan számíthatjuk ki egy nyeremény „várható értékét": ha egy játék lehetséges kimenetelei rendre $A, B, C\ldots$, ezek valószínűségei $p, q, r\ldots$ és az ezekhez fűződő „nyeremények" értéke $a, b, c,\ldots$ (ahol a negatív nyeremény veszteséget jelent), akkor a nyeremény várható értéke:

$$m=pa+qb+rc+\ldots. \tag{1}$$

A „várható érték“ fogalmát nemcsak szerencsejátékoknál alkalmazhatjuk, hanem minden olyan jelenségnél, ahol valamely mennyiség értékének ingadozása a véletlen játékától függ, vagy a matematika nyelvére fordítva, ha valamely a véletlen játékától függő esemény minden lehetséges kimeneteléhez egy szám van rendelve. A következőkben egy olyan változó mennyiséget, amelynek értéke a véletlen játékától függ, röviden *valószínűségi változó*nak fogunk nevezni. Ha azt mondjuk, hogy x valószínűségi változó, ez tehát azt jelenti, hogy x felveheti az értékeknek egy bizonyos sorozatát és csak annyit tudunk, hogy melyik értéket milyen valószínűséggel veszi fel. Hogy egy példát mondjunk, ha két kockával dobunk és x jelenti a két kockán mutatkozó számok összegét, akkor x valószínűségi változó, amely felveheti a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 értékeket, rendre 1/36, 2/36, 3/36, 4/36, 5/36, 6/36, 5/36, 4/36, 3/36, 2/36 és 1/36 valószínűséggel. Egy x valószínűségi változó várható értékét a rövidség kedvéért $m(x)$-szel fogjuk jelölni. Például a fenti esetben

$$m(x)=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{4}{36}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{6}{36}+8\cdot\frac{5}{36}+$$
$$+9\cdot\frac{4}{36}+10\cdot\frac{3}{36}+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36}=7. \qquad (2)$$

Bizonyos esetekben olyan valószínűségi változókat is tekintetbe kell venni, amelyek végtelen sok értéket vesznek fel, de a következőkben mi csak olyan valószínűségi változókkal fogunk foglalkozni, amelyek lehetséges értékeinek száma véges.

Hogy a várható érték jelentését jobban megértsük, vizsgáljuk meg a következő példát:

Különböző fajsúlyú fémek összeolvasztásával készítünk egy ötvözetet, a felhasznált fémeknek ismerjük külön-külön a fajsúlyát és tudjuk, hogy melyik fémből milyen mennyiséget használtunk fel. Ha az ötvözetet kis darabokra törjük, beszélhetünk egy darab várható fajsúlyáról. Ha az olvasztásnál a különböző fémek nem keveredtek össze tökéletesen, akkor itt valóban a „véletlen játékától“ függ egy kis darab fajsúlya, hiszen lehetséges, hogy a kiválasztott darab az egyik fémből viszonylag nagyobb mennyiséget tartalmaz, mint az egész ötvözet. De még ebben az esetben is a fajsúly „várható értékének“ pontos fizikai értelme van, hiszen megadja az egész ötvözet pontos fajsúlyát. Persze, minél tökéletesebben keveredtek össze a különböző fémek az összeolvasztásnál, annál közelebb lesz egy tetszőlegesen kiválasztott és lemért darab fajsúlya a „várható fajsúly“-hoz. Azt is beláthatjuk ezen a példán, hogy a „várható érték" a lehetséges eseteknek középértéke abban az értelemben, hogy ha előfordul olyan darab, amelynek fajsúlya a várható értéknél nagyobb, akkor kell olyan darabnak is lennie, amelynek a fajsúlya a várható értéknél kisebb, hiszen ha minden darab fajsúlya nagyobb volna a fajsúly várható értékénél, akkor az egész ötvözet fajsúlya is nagyobb volna, ami ellentmondás, mert amint mondottuk, az egész ötvözet fajsúlya pontosan megegyezik a fajsúly várható értékével. Valóban, a meghatározásból is belátható, hogy a „várható érték" nem más, mint egy középérték, ahol a lehetséges értékeket bekövetkezésük valószínűségének megfelelő „súlyokkal" vettük tekintetbe, vagyis a várható érték tulajdonképpen „súlyozott középérték"[1]). Ezt könnyen megérthetjük, ha egy számszerű példát vizsgálunk meg. Ha például 1 kg 8·9 fajsúlyú vörösrezet, 1/2 kg 7·3 fajsúlyú ónt és 1/2 kg 6·9. fajsúlyú cinket olvasztunk össze, tehát az ötvözet réz, ón és cink-tartalma rendre 50%, 25% és 25%, akkor az ötvözet fajsúlya

$$f = 0{\cdot}5 \,.\, 8{\cdot}9 + 0{\cdot}25 \,.\, 7{\cdot}3 + 0{\cdot}25 \,.\, 6{\cdot}9 = 8{\cdot}0$$

lesz és ugyanez a szám adja meg az ötvözet egy kis darabjának várható fajsúlyát is, hiszen az egyes fémek százalékaránya megadja egyben előfordulásuk valószínűségét az ötvözetben. Természetesen az $f=8$ „átlagos" vagy „várható" fajsúlytól egy kiválasztott rész fajsúlya még eltérhet valamivel. Ha sok részre törjük a fémet és a részek fajsúlyát egyenként lemérjük, a nyert számok annál kevesebbel fognak ingadozni az $f=8$ középérték körül, minél alaposabban keveredtek össze a különböző fémek az olvasztásnál.

Ebből a példából azt is megtanulhatjuk, hogy a „várható érték" ismerete önmagában csak azt mondja meg, hogy milyen középérték körül ingadoznak az egyes mérések vagy megfigyelések eredményei, de az ingadozás mértékének meghatározása ettől különálló feladat. Erre a célra szolgál a „szórás" fogalma, ezzel majd később fogunk foglalkozni.

Megjegyezzük, hogy a „valószínű érték", „várható érték" és „középérték" kifejezéseken kívül szokták a kissé nevetségesen

---

[1]) Általában, ha egy mennyiség nem egyformán tevődik össze az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokból, hanem azok rendre $p_1, p_2, \ldots, p_n$ súllyal vesznek benne részt, akkor ezen számok *súlyozott középértékén* a $\dfrac{p_1a_1+p_2a_2+\ldots+p_na_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}$ értéket értjük. Ez $p_1=p_2=\ldots=p_n=1$ esetben a számtani közepet adja. Ha a p_i-k 1-től különböző, de egész számok, akkor is középértéket jelent, azokét a számokét, melyek közül p_i számúnak az értéke a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. Esetünkben $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$, mint az összes lehetséges esetek együttes valószínűsége, így a nevező elmaradt.

hangzó „matematikai reménység" kifejezést is használni. Ennek a kifejezésnek a keletkezését megmagyarázza az a tény, hogy a valószínűségszámítás a XVII. században két forrásból keletkezett, egyrészt a szerencsejátékok elterjedése következtében — főként Franciaországban és Spanyolországban — a játékok esélyeinek vizsgálatából, másrészt az akkoriban Angliában és a Németalföldön divatos (sőt Angliában ma is divatos) fogadásokból kifejlődő biztosító-társaságok azon törekvéséből, hogy a biztosításért kért összeget ne csak találomra, hanem az esélyek pontos felmérése alapján állapítsák meg. A „matematikai remény" kifejezéssel azt akarták hangsúlyozni, hogy a nyereményre való reménység precíz számszerű alapját a valószínű érték kiszámítása adja meg. Azonban a valószínűségszámítás mai fejlettségi fokán, amikor a fizikai alkalmazások léptek az előtérbe, ez a kifejezés félrevezető volna és ezért a következőkben mindig *valószínű érték*ről vagy *várható érték*ről fogunk beszélni (a kettő tehát ugyanazt jelenti).

Nézzük meg még egy példán, hogy bizonyos esetekben hogyan lehet a várható értéket igen egyszerűen kiszámítani. Tegyük fel, hogy egy sorsjátéknál eladásra kerül 200.000 sorsjegy, egyenként 10 forintos árban, a kiosztásra kerülő nyereményeket pedig a következő táblázat adja meg:

1	főnyeremény	200.000	Ft	1 . 200.000 = 200.000
2	nyeremény egyenkint	100.000	„	2 . 100.000 = 200.000
5	„ „	40.000	„	5 . 40.000 = 200.000
100	„ „	1.000	„	100 . 1.000 = 100.000
1.000	„ „	100	„	1.000 . 100 = 100.000
10.000	„ „	20	„	10.000 . 20 = 200.000
		Összesen kiosztásra kerül:		1,000.000 Ft.

Kérdés, mennyi egy sorsjegy „várható értéke"? Mivel minden sorsjegy egyformán esélyes, ezt legegyszerűbben úgy számíthatjuk ki, hogy az összes nyeremények összegét elosztjuk a sorsjegyek számával, vagyis az egy sorsjegyre eső nyeremény átlagértéke adja a sorsjegy várható értékét, ami a fenti példában tehát 1,000.000/200.000, vagyis pontosan 5 forint. Ez azt jelenti, hogy annak ellenére, hogy óriási nyeremények vannak és azonkívül a közepes nyeremények száma is igen nagy, mindenki, aki egy sorsjegyet vásárol tulajdonképpen 5 forintot kidob az ablakon. Persze, távol áll tőlem, hogy olvasóimat ezzel a sorsjátékokról lebeszéljem, hiszen a legtöbb sorsjáték, így elsősorban az állami sorsjátékok, jótékony vagy közérdekű célt szolgálnak és résztvevőiket „jótett helyébe jót várj" felszólítással toborozzák. Az ilyen sorsjátékban való részvétel a közös célra való adakozás egy formája, amely egyúttal a résztvevők egy részének komoly nyereséget is hoz. De ettől függetlenül megállapíthatjuk, hogy a múltban a sorsjátékok az uralkodó osztályok politikájában ugyanazt a szerepet játszották, mint azok a filmek, amelyekben a gépíró kisasszonyt feleségül veszi a milliomos, tehát a tömegek elégedetlenségének levezetésére szolgáltak, amellett, hogy a bankoknak igen jó üzletet jelentettek.

Térjünk át most a fej-vagy-írás játékra. Tudjuk, hogy ha a pénz, amivel játszunk, nem hamis, fej és írás dobásának valószínűsége egyformán 1/2. Ez annyit jelent, hogy ha elég sokszor dobunk, a dobásoknak körülbelül a felében fej, felében írás lesz az eredmény. Mit jelent itt az a szó, hogy „körülbelül"? Erre azt válaszolhatná valaki, hogy bár elképzelhető, hogy tízszer egymásután, sőt még az is, hogy százszor egymásután fejet dobunk, de ez rendkívül valószínűtlen, ezzel szemben mégis, ha nagyon sok dobást végzünk, igen valószínű az, hogy a dobások közül azok száma, amelyekben fej az eredmény, elosztva az összes dobások számával (vagyis a fej dobásának gyakorisága) kevéssel fog eltérni 1/2-től. Ha közelebbről megnézzük, ez az állítás sem precízebb az elsőnél, amíg meg nem mondjuk, hogy mennyi az a „nagyon sok", mit jelent az, hogy „igen valószínű" és mit értünk azalatt, hogy „kevéssel fog eltérni". Próbáljuk meg ezt pontosabban megfogalmazni. El akarunk érni egy tetszőlegesen előírt kis eltérést, — jelöljük ε-nal — a várható értéktől (1/2-től). Ezt egész biztosra sohsem várhatjuk, de várhatjuk 1-hez bármilyen közeli valószínűséggel, csak elég sok kísérletet kell végezni; pontosabban, ha megadunk tetszőlegesen egy (1-nél kisebb pozitív) δ számot, akkor mindig megadható egy olyan N szám, hogy ha legalább N kísértetet végzünk, akkor legalább $1-\delta$ lesz annak a valószínűsége, hogy a fej dobásának a gyakorisága legfeljebb ε-nal térjen el 1/2-től. Ezt a tételt először Bernouilli Jakab bizonyította be 1713-ban, ma ezt a tételt a nagy számok törvénye egy speciális esetének tekintik. Nézzük ezt mármost, hogyan tudjuk ezt a tételt bebizonyítani.

Először vizsgáljuk meg azt, mekkora lehet annak a valószínűsége, hogy nagy legyen az eltérés a várható értéktől. Erre vonatkozik Csebysev lemmája. Tegyük fel, hogy valamely x valószínűségi változó lehetséges értékei $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ezek valószínűsége rendre $p_1, p_2, \ldots p_n$ (tehát p_1 a valószínűsége annak, hogy az x mennyiség értéke éppen A_1 lesz, p_2 azé, hogy x értéke A_2 stb.). Jelöljük x középértékét A-val, tehát (1) szerint

$$A = m(x) = A_1 p_1 + A_2 p_2 + \ldots + A_n p_n$$

és szorítkozzunk arra az esetre, ha egy A_i sem negatív és A nem 0. Kérdezzük meg, ez esetben mekkora annak a valószínűsége, hogy x értéke átlagértékének, A-nak valamely többszörösénél, mondjuk t-szeresénél nagyobb legyen (ahol t valamilyen pozitív szám). Nyilvánvaló, hogy minél nagyobb a t szám, annál kisebb lesz ez a valószínűség, amelyet $V(x > tA)$-val jelölünk. Az, hogy x nagyobb legyen tA-nál, csak akkor lehetséges, ha van az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ számok között olyan, amely tA-nál nagyobb, míg ha t-t olyan nagynak választjuk, hogy tA nagyobb, mint x lehetséges értékei (tehát az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ számok közül a legnagyobbnál is), akkor a keresett valószínűség 0 lesz. Így tehát feltehetjük, hogy t-t úgy választottuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ számok közül legyen olyan, amely tA-nál nagyobb. Azt is feltehetjük, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ számok nagyság szerint, csökkenő sorrendben vannak elrendezve, tehát x lehetséges értékei közül A_1 a legnagyobb, A_2 a következő, stb., végül A_n a legkisebb. Akkor nyilván az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ számsorozat két részre bontható úgy, hogy $A_1, A_2, \ldots, A_r$ nagyobb tA-nál, míg a többi: $A_{r+1}, A_{r+2}, \ldots, A_n$ kisebb tA-nál, vagy egyenlő vele. Ebben az esetben a keresett valószínűségre azt kapjuk, hogy

$$V(x > tA) = p_1 + p_2 + \ldots + p_r.$$

Ezt szeretnénk A-val kapcsolatba hozni. Szorozzuk meg mindkét oldalt tA-val, azt kapjuk, hogy

$$tA \,.\, V(x > tA) = tA \,.\, p_1 + tA \,.\, p_2 + \ldots + tA \,.\, p_r.$$

Mivel feltevésünk szerint $A_1, A_2, \ldots, A_r$ nagyobbak tA-nál, a jobboldalt növeljük, ha tA helyett az első tagban A_1-et, a másodikban A_2-t, az utolsóban A_r-et írunk, tehát

$$tA \,.\, V(x > tA) < A_1 p_1 + A_2 p_2 + \ldots + A_r p_r.$$

Még jobban növeljük a jobboldalt, ha még kiegészítjük az $A_{r+1} p_{r+1}, \ldots, A_n p_n$ tagokkal (amelyekről tudjuk, hogy nem negatívok), vagyis

$$tA \,.\, V(x > tA) < A_1 p_1 + A_2 p_2 + \ldots + A_n p_n.$$

De a jobboldalon álló kifejezés nem más, mint x valószínű értéke, ezt jelöltük A-val, tehát azt kaptuk, hogy

$$tA \,.\, V(x > tA) < A.$$

Elosztva mindkét oldalt tA-val (amelyről tudjuk, hogy nem zérus), azt kapjuk, hogy

$$V(x > tA) < 1/t. \tag{3}$$

Ez Csebysev lemmája, amelyet szavakban a következőképpen fogalmazhatunk meg: *Ha az x valószínűségi változó, kizárólag nem negatív értékeket vehet fel, továbbá, ha A jelenti x várható értékét és A nem zérus, végül t tetszőleges pozitív szám, akkor annak a valószínűsége, hogy x értéke tA-nál nagyobb legyen, kisebb $1/t$-nél.* (Az állítás nyilván csak akkor mond valamit, ha $t > 1$.) Ebből következik, hogy annak a valószínűsége, hogy x értéke legfeljebb tA legyen, nagyobb, mint $1—1/t$, hiszen az, hogy egy esemény vagy bekövetkezik, vagy nem, az bizonyos, tehát valószínűsége 1. Igy, ha egy esemény valószínűségét ismerjük, annak valószínűségét, hogy az esemény *ne* következzék be, úgy kapjuk, hogy az esemény valószínűségét 1-ből kivonjuk. Ha tehát annak valószínűsége, hogy x nagyobb legyen tA-nál, legfeljebb $1/t$, akkor annak valószínűségét, hogy x ne legyen nagyobb tA-nál, úgy kapjuk, hogy 1-ből kivonunk egy $1/t$-nél kisebb számot, amikor is $1—1/t$-nél nagyobb számot kapunk.

Ez a látszólag rendkívül egyszerű segédtétel, Csebysev lemmája, módot fog adni, hogy a nagy számok törvényét minden nehézség nélkül bebizonyítsuk, úgy hogy joggal mondhatjuk, hogy a nagy számok törvénye csírájában benne van Csebysev lemmájában. Meg kell említeni ezzel kapcsolatban, hogy a nagy számok törvényét már régebben is ismerték, de a legegyszerűbb esetekben is csak igen sok és fáradságos számítással tudták bebizonyítani, Csebysev lemmája azonban megkímél minket a fárasztó számolástól és azt teljesen pótolja.

A fej-vagy-írás játékot most úgy fogjuk vizsgálni, hogy minden kísérlethez külön képezünk egy-egy valószínűségi változót, amelynek értéke 1, ha abban a dobásban fejet mutat a pénzdarab, és 0 ha írást. Mivel az összes „fej" dobások számát ezen változók összege adja, meg kell még vizsgálnunk, hogy képezzük valószínűségi változók összegének a középértékét. Szorítkozzunk két változó esetére. Az általános eset nyilván lépésenkint visszavezethető erre.

Ha x és y két valószínűségi változó, amelyeknek várható értékeit $m(x)$-et és $m(y)$-t ismerjük, akkor az $x+y$ összeg várható értékét úgy kapjuk meg, hogy x és y várható értékeit összeadjuk:

$$m(x+y) = m(x) + m(y). \tag{4}$$

A bizonyítást egy speciális esetben végezzük el, általában is szószerint így végezhető a számítás. Tegyük fel például, hogy x lehetséges értékei x_1 és x_2, ezek valószínűségei p_1 és p_2. Akkor természetesen

$$P_1x_1 + p_2x_2 = m(x) \tag{5}$$

y lehetséges értékei legyenek y_1, y_2 és y_3 és ezek valószínűségei q_1, q_2 és q_3. Akkor persze

$$q_1 y_1 + q_2 y_2 + q_3 y_3 = m(y). \tag{6}$$

Ahhoz, hogy kiszámítsuk $x+y$ várható értékét, ismernünk kell $x+y$ lehetséges összes értékeit és azok valószínűségeit. $x+y$ lehetséges értékei

$$x_1+y_1,\ x_1+y_2,\ x_1+y_3,\ x_2+y_1,\ x_2+y_2 \text{ és } x_2+y_3,$$

ezek valószínűségeit jelöljük rendre

$$r_{11} \quad r_{12} \quad r_{13} \quad r_{21} \quad r_{22} \text{ és } r_{23}$$

számokkal. Így tehát például r_{23} annak a valószínűségét jelenti, hogy az x változó az x_2 értéket és ugyanakkor az y változó az y_3 értéket veszi fel. Mármost, ha x az x_1 értéket veszi fel, ugyanakkor y felveszi az y_1, y_2, y_3 értékek valamelyikét, a három eset valószínűségeinek összege meg kell, hogy adja annak a valószínűségét, hogy x az x_1 értéket veszi fel. Másszóval fenn kell állnia a következő összefüggésnek:

$$r_{11} + r_{12} + r_{13} = p_1. \tag{7}$$

Hasonlóképpen fennállanak a következő összefüggések:

$$r_{21} + r_{22} + r_{23} = p_2, \tag{8}$$

$$r_{11} + r_{21} = q_1, \tag{9}$$

$$r_{12} + r_{22} = q_2, \tag{10}$$

$$r_{13} + r_{23} = q_3. \tag{11}$$

Például az utolsó azt jelenti, hogy az, hogy y az y_3 értéket veszi fel, az két módon valósulhat meg: úgy, hogy közben x az x_1 értéket, de úgyis, hogy közben x az x_2 értéket veszi fel. Mármost számítsuk ki, hogy mi $x+y$ várható értéke. Nyilvánvaló, hogy a fenti jelölések mellett

$$\begin{aligned} m(x+y) = {} & r_{11}(x_1+y_1) + r_{12}(x_1+y_2) + r_{13}(x_1+y_3) + \\ & + r_{21}(x_2+y_1) + r_{22}(x_2+y_2) + r_{23}(x_2+y_3). \end{aligned} \tag{12}$$

Rendezzünk az x-ek és y-ok szerint:

$$\begin{aligned} m(x+y) = {} & x_1(r_{11}+r_{12}+r_{13}) + x_2(r_{21}+r_{22}+r_{23}) + \\ & + y_1(r_{11}+r_{21}) + y_2(r_{12}+r_{22}) + y_3(r_{13}+r_{23}). \end{aligned} \tag{13}$$

Felhasználva a (7), (8), (9), (10) és (11) összefüggéseket, ebből következik, hogy

$$m(x+y)=(p_1x_1+p_2x_2)+(q_1y_1+q_2y_2+q_3y_3)=m(x)+m(y), \quad (14)$$

amivel állításunk be van bizonyítva.

Szemléltessük még, mielőtt tovább mennénk, egy egyszerű példán a most bebizonyított tételt. Vizsgáljuk megint azt a példát, hogy két kockával dobunk. Jelentse x az első kockán és y a második kockán mutatkozó számot. Nyilván x is, y is az 1, 2, 3, 4, 5, 6 értékeket vehetik fel, mindegyiket 1/6-1/6 valószínűséggel. Így tehát

$$m(x)=m(y)=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3{\cdot}5.$$

Ebből következik a fentiek alapján, hogy $x+y$ várható értéke, vagyis a két kockán látható számok összegének várható értéke $3{\cdot}5+3{\cdot}5=7$, amint ezt fentebb a lehetőségek részletes számbavételével már ki is számítottuk (lásd (2)). Hasonlóképpen következik, hogy ha három kockával dobunk, a három kockán mutatkozó számok összegének várható értéke 11·5 lesz, 4 kockánál 14, ötnél 17·5 stb. Ezeket az eredményeket szintén ellenőrizhetjük részletes számolás útján, bár természetesen a részletes kiszámítás annál hosszadalmasabb lesz, minél több kockáról van szó. Elrettentő például ideírjuk 3 kocka esetében a részletes számítást: a számjegyek összegének lehetséges értékei

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,

a megfelelő valószínűségek:

$$\frac{1}{216}, \frac{3}{216}, \frac{6}{216}, \frac{10}{216}, \frac{15}{216}, \frac{21}{216}, \frac{25}{216}, \frac{27}{216}, \frac{27}{216}, \frac{25}{216}, \frac{21}{216},$$
$$\frac{15}{216}, \frac{10}{216}, \frac{6}{216}, \frac{3}{216}, \frac{1}{216}.$$

A lehetséges értékeket a megfelelő valószínűségekkel összeszorozva és ezen szorzatokat összeadva, valóban kijön, hogy a várható érték 11·5. Ezt a hosszadalmas számítást takarítja meg számunkra a fent bebizonyított általános tétel.

A fej-vagy-írás játékot vizsgálva, tegyük fel most már, hogy N-szer dobunk. Az x_1 valószínűségi változó értéke legyen 1, ha az első dobásnál fejet és 0, ha írást dobtunk. Így tehát x_1 a 0 és 1 értékeket veszi fel $1/2-1/2$ valószínűséggel. Hasonlóképpen az x_2 valószínűségi változó legyen 1 ha a második dobásnál fej jön ki és 0 ha nem, $x_3, x_4, \dots x_N$ hasonlóképpen legyenek értelmezve. Jelentse a K valószínűségi változó az N dobás közül azoknak a számát, amelyekben fejet dobtunk, akkor nyilván

$$K=x_1+x_2+\dots+x_N. \quad (15)$$

Könnyű belátni, hogy az $x_1, x_2, \ldots x_N$ változók mindegyikének várható értéke 1/2 és ezért (tekintettel arra, hogy bebizonyítottuk, hogy az összeg várható értéke egyenlő a tagok várható értékeinek öszegével) K várható értéke $N/2$. Az x valószínűségi változó jelentse K-nak $N/2$-től való eltérése négyzetét:

$$x = (K - N/2)^2.$$

Számítsuk ki x várható értékét, (15) szerint.

$$\begin{aligned} x &= (x_1 + x_2 + \ldots + x_N - N/2)^2 = \\ &= [(x_1 - 1/2) + (x_2 - 1/2) + \quad + \ldots + (x_N - 1/2)]^2 = \\ &= (x_1 - 1/2)^2 + (x_2 - 1/2)^2 + \ldots + (x_N - 1/2)^2 + \\ &+ 2(x_1 - 1/2)(x_2 - 1/2) + 2(x_1 - 1/2)(x_3 - 1/2) + \ldots + \\ &+ 2(x_{N-1} - 1/2)(x_N - 1/2) \end{aligned}$$

és alkalmazva megint azt a tételt, hogy összeg várható értéke egyenlő a tagok várható értékeinek összegével, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} m(x) &= m[(x_1 - 1/2)^2] + m[(x_2 - 1/2)^2] + \ldots + m[(x_N - 1/2)^2] + \\ &+ 2m[(x_1 - 1/2)(x_2 - 1/2)] + 2m[(x_1 - 1/2)(x_3 - 1/2)] + \\ &+ \ldots + 2m[(x_{N-1} - 1/2)(x_N - 1/2)]. \end{aligned}$$

Számítsuk ki külön-külön az itt szereplő kétféle tag értékét. Nézzük először meg, mennyi $(x_1 - 1/2)^2$ várható értéke? Mivel x_1 csak a 0 és 1 értékeket veheti fel és mindkét esetben $(x_1 - 1/2)^2 = 1/4$, tehát $m[(x_1 - 1/2)^2] = 1/4$.

Ugyanez áll persze az $m[(x_2 - 1/2)^2], \ldots, m[(x_N - 1/2)^2]$ tagokra. Nézzük most $(x_1 - 1/2)(x_2 - 1/2)$ várható értékét. Mivel a második dobás eredménye független az első dobás eredményétől, könnyű belátni, hogy a következő 4 eset egyformán valószínű és mindegyiknek a valószínűsége 1/4: *a)* $x_1 = 1$, $x_2 = 1$; *b)* $x_1 = 1$, $x_2 = 0$; *c)* $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ és végül *d)* $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Az *a)* és *d)* esetekben $(x_1 - 1/2)(x_2 - 1/2)$ értéke 1/4, a *b)* és *c)* esetben $-1/4$. Ennek alapján következik, hogy

$$m[(x_1 - 1/2)(x_2 - 1/2)] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 0.$$

Tekintetbe véve, hogy ugyanez áll a többi hasonló tagra is, így azt kapjuk, hogy

$$m(x) = N/4.$$

Azt kaptuk tehát, hogy ha K jelenti N dobás közül azok számát, amelyeknél fej jött ki és $x = (K - N/2)^2$, akkor az x valószínűségi változó várható értéke $N/4$. Mivel x nem lehet negatív, alkalmazhatjuk Csebysev lemmáját, amely szerint annak a valószínűsége, hogy $x \leq t \,.\, N/4$ legyen, nagyobb, mint $1 - 1/t$. Mi a fej dobásának gyakoriságára vagyunk kíváncsiak. Ez nyilván K/N, jelöljük röviden f-fel. Akkor a $(K-N/2)^2 \leqq t.N/4$ egyenlőtlenség mindkét oldalát N^2-tel osztva, eredményünk úgy fogalmazható, hogy annak a valószínűsége, hogy $(f-1/2)^2 \leqq Nt/4$ legyen, nagyobb lesz, mint $1-1/t$. Mind-két oldalon négyzetgyököt vonva, azt kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy

$$|f-1/2| \leqq \sqrt{Nt}/2$$

nagyobb, mint $1-1/t$. Állításunkhoz csak azt kell belátni, hogy alkalmas t mellett választható N úgy, hogy egyszerre $\sqrt{Nt}/2$ is, meg $1/t$ is tetszőlegesen kicsi legyen. A Csebysev-féle egyenlőtlenségben a t számot tetszőlegesen választhattuk. Próbáljuk meg most úgy választani, hogy $\sqrt{Nt}/2 = 1/t$ legyen, ekkor $\sqrt{Nt}/2 = 1/t = 1/\sqrt[3]{4N}$, vagyis legyen most $t = \sqrt[3]{4N}$.

Tehát $|f-1/2| \leqq 1/\sqrt[3]{4N}$, valószínűsége nagyobb, mint $1-1/\sqrt[3]{4N}$. Ebből már nyilvánvaló, hogy ha N-et elég nagyra választjuk úgy, hogy $1/\sqrt[3]{4N}$ olyan kicsiny legyen, amilyent csak akarunk, például kisebb legyen, mint egy megadott kis pozitív ε szám, akkor annak a valószínűsége, hogy N dobás közül a fej gyakorisága 1/2-től ε-nál kevesebbel térjen el, nagyobb lesz, mint $1-\varepsilon$. Például, ha azt akarjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a fej dobásának gyakorisága 1/2-től legfeljebb egy milliomoddal tér el nagyobb legyen 0·999999-nál, akkor ezt biztosan elérhetjük azáltal, hogy legalább $N = 250.000,000.000,000.000$ (kétszázötvenezerbillió) dobást végzünk, mivel ekkor $\sqrt[3]{4N}$ éppen egymillió és így $1/\sqrt[3]{4N}$ egymilliomoddal egyenlő. Persze, ha nem kívánjuk, hogy a gyakoriság ennyire közel legyen 1/2-hez, akkor sokkal kevesebb számú dobás is elegendő. Például, ha azt kívánjuk, hogy legalább 99% legyen a valószínűsége annak, hogy a fej dobásának gyakorisága legfeljebb 1/100-dal térjen el 1/2-től, akkor biztos elegendő 250.000 dobást végezni, mert akkor lesz $\sqrt[3]{4N} = 100$ és így $1-1/\sqrt[3]{4N} = 99/100$. Hozzá kell ehhez tennünk, hogy a Csebysev-féle egyenlőtlenség nem pontos, úgy, hogy valójában még ennél sokkal kevesebb dobás is elegendő, de pontosabb eredmény bebizonyítása már sokkal nehezebb és mélyebb meggondolásokat kívánna, úgy, hogy erre most nem térünk ki.

A nagy számok törvénye nem csak a fej- vagy írás egyszerű példájára érvényes, hanem sokkal általánosabb jelenségekre is. Azok közül a matematikusok közül, akik ezen a téren nagy eredményeket értek el, említsük meg a következőket: Moivre, Poisson, Laplace, Gauss, Csebysev, Ljapunov, Borel, Cantelli, Kolmogorov. Végezetül még fogalmazzuk meg a nagy számok törvényét valamivel általánosabb alakban, mint ahogy fentebb bizonyítottuk, de amely alakjában lényegében ugyanúgy bizonyítható be: *Ha valamely kísérlet sikerének valószínűsége p és sokszor ismételjük meg a kísérletet, akkor annak valószínűsége, hogy a kísérlet sikerének gyakorisága p-től legfeljebb egy tetszőleges megadott kis számmal térjen el, tetszőlegesen közel lesz 1-hez, hacsak elég sok kísérletet végzünk.*

Legközelebbi számunkban a valószínűségi változó várható eloszlásával és ezzel kapcsolatban a Gauss-féle eloszlási törvénnyel fogunk foglalkozni. Addig is szolgáljon gyakorlásul az itt következő néhány feladat:

1. Ha az x valószínűségi változó egy kocka dobásánál elért dobás négyzetét jelenti (tehát ha 1-et dobunk, akkor $x=1$, ha 2-őt dobunk $x=4$, ha hármat, $x=9$ stb.) mennyi x várható értéke?

2. Két urnánk van. Az elsőben 30 fehér és 10 fekete golyó, a másodikban 10 fehér és 30 fekete golyó. Az első urnából találomra kiemelünk 20 golyót, és áttesszük őket a másik urnába. Ezek után a második urnából egy golyót húzunk ki. Kérdés, mi a valószínűsége, hogy a kihúzott golyó fehér legyen?

3. Péter és Pál a következő játékot játsszák: Egy 32 lapos kártyát összekevernek, Péter előre fizet Pálnak 10 fillért, utána elkezdi egymásután felütni a lapokat. Addig folytatja ezt, amíg egy királyt nem húz. Pál ekkor annyi fillért kell hogy fizessen Péternek, ahány lapot Péter kihúzott, mielőtt egy királyt húzott volna. Kérdés, Péter vagy Pál részére előnyösek-e a játékfeltételek. Mi a helyzet, ha 52 lapos kártyával játszanak?

4. Ha Péter és Pál az előző játékot azzal a módosítással játsszák, hogy nem sorjában üti fel Péter a kártyákat, hanem találomra húz és a kihúzott lapot visszateszi, összekeveri, majd húz stb. addig, amíg egy királyt nem húzott, akkor melyikükre nézve lesz előnyös a játék 32 lapos kártya használatánál?

5. János és József a következő játékot játsszák: két kockával dobnak, ha a két kockán különböző számok állanak, akkor János annyi fillért fizet Józsefnek, amennyi a különbség a két szám között, míg ha a két kocka ugyanazt a számot mutatja, akkor József fizet Jánosnak annyi fillért, amennyi a két kockán álló szám. Melyikükre előnyös a játék? Hányszor kell dobniuk, hogy annak a valószínűsége, hogy József 5 forintot nyerjen, legalább 90% legyen?

6. Mi a valószínősége, hogy a fej vagy írás játéknál 40 dobás közül 25-ször dobjunk fejet?

7. A fej-vagy-írás játéknál, ha 21-szer dobunk, hány fej dobásának a valószínűsége a legnagyobb?

8. Mi a valószínűsége, hogy ha 16-szor dobunk, ebből legalább ötször, de legfeljebb 11-szer dobjunk írást? Hasonlítsuk össze az eredményt azzal a becsléssel, amit erre vonatkozólag a Csebysev-féle egyenlőtlenség ad!

Megoldások.

Feladatok.

138. *Bizonyítsuk be, hogy:*

$$1 \,.\, (a-1)+2 \,.\, (a-2)+3 \,.\, (a-3)+\ldots n \,.\, (a-n)= \\ =\frac{n(n+1)(3a-2n-1)}{6}.$$

Speciálisan: $a=n+1$,

$$1 \,.\, n+2 \,.\, (n-1)+3 \,.\, (n-2)+\ldots+n \,.\, 1=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Gál

I. megoldás: Egy egész számokra vonatkozó azonosság bizonyítására mindég kézenfekvő a teljes indukció: $n=1$-re az állítás: $1 \,.\, (a-1)=1 \,.\, 2 \,.\, (3a-2-1)/6$, ami igaz. Tegyük fel, hogy valamely n értékre már tudjuk az azonosság helyességét, megmutatjuk, hogy ebből következik az azonosság helyessége a következő egész számra, $n+1$-re is. Feltétel szerint

$$\{1 \,.\, (a-1)+2 \,.\, (a-2)+\ldots+n(a-n)\}+(n+1)(a-n-1)= \\ =\frac{n(n+1)(3a-2n-1)}{6}+(n+1)(a-n-1)=\{(n+1)/6\}[3an-2n^2- \\ -n+6a-6n-6]=\{(n+1)/6\} \,.\, [3an+6a-2n^2-7n-6]= \\ =\{(n+1)/6\}[3a(n+2)-(n+2)(2n+3)]= \\ =\frac{(n+1)(n+2)(3a-2n-3)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(3a-2(n+1)-1)}{6},$$

tehát valóban visszanyertük a bizonyítandó formulát, csak n helyébe $n+1$-et írva.

a helyébe $n+1$-et írva, nyerjük a második azonosságot.

$a=1$-et írva és (-1)-gyel szorozva viszont az ugyancsak érdekes $1 \,.\, 2+2 \,.\, 3+3 \,.\, 4+\ldots+(n-1)n=(n-1)n(n+1)/3$ összefüggést kapjuk, amihez $1+2+3+4+\ldots+n=(n+1)$ 2-t adva, nyerjük a számok négyzetösszegére már ismert kifejezést. (Természetesen legkönnyebb lett volna azt is teljes indukcióval bizonyítani, ha már ismerjük a végeredményt. De valakinek arra is rá kellett jönnie, hogy mi ez a végeredmény.) (2 pont.)