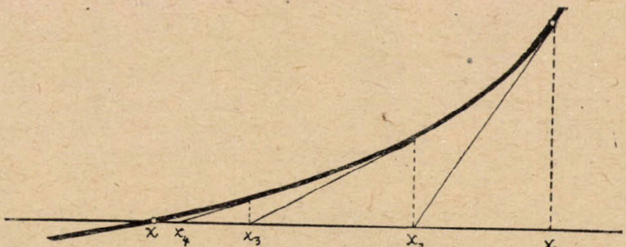
A Newton-féle gyökközelítő eljárásról

Írta: RÉNYI ALFRÉD

Bevezetés, történeti áttekintés. Ismeretes, hogy az egyenletek közelítő megoldására szolgáló módszerek közül a gyakorlatban leghasználatosabbak közé tartozik a NEWTON-féle gyökközelítő eljárás. Ezen eljárás abban áll, hogy ha az $f(x) = 0$ egyenlet egy gyökét keressük és adva van az x_1 közelítő érték, tehát tudjuk, hogy az egyenletnek egy x_0 gyöke első közelítésben x_1-nek vehető, akkor képezzük az

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

számsorozatot, amely — bizonyos elég általános feltételek mellett, amelyeket alább részletesen vizsgálni fogunk — konvergál az $f(x)=0$



1. ábra.

egyenlet x_0 gyökéhez. Az eljárás geometriailag igen szemléletesen értelmezhető: Rajzoljuk meg az $y = f(x)$ függvényt ábrázoló görbét, a görbének az $x = x_1$ abszcisszához tartozó pontjában húzzuk meg a görbe érintőjét, annak a pontnak az abszcisszáját, ahol ez az érintő az x tengelyt metszi, nevezzük x_2-nek, a görbe x_2-höz tartozó pontjában újból meghúzzuk az érintőt, ennek az x-tengellyel való metszéspontjának abszcisszája lesz x_3, s. í. t. (l. 1. ábra). Ezt az eljárást szokták NEWTON—RAPHSON-módszernek is nevezni, mert bár NEWTON volt az első, aki ezt a módszert ismertette 1685-ben, de az (1) képlet először RAPHSONnál szerepel 1690-ben. Az eljárás konvergenciájának pontos feltételeit FOURIER és CAUCHY vizsgálták elsőknek. FOURIER híres munkájában (Analyse des équations détérminées, Paris 1831) igen részletesen foglalkozik azzal a kérdéssel, hogyan kell az x_1 közelítő értéket választani, hogy az

(1) által definiált x_n számsorozat valóban konvergáljon az $f(x) = 0$ egyenlet egy gyökéhez. CAUCHY feltételei, amelyeket a Leçons sur le calcul différentiel c. munkájának egyik függelékében adott meg 1829-ben (l. Oeuvres Complètes II. T. 4. 573—609. o.), kevésbbé váltak ismeretessé. Annak ellenére, hogy az elmúlt 100 évben írt, szinte minden nagyobb algebrai tankönyv foglalkozik NEWTON módszerével, lényegesebb előrehaladás a módszer vizsgálatában csak a legutóbbi időkben történt, a legtöbb könyv lényegében FOURIER meggondolásait ismétli meg a DARBOUX által megadott precízebb alakban (l. G. DARBOUX, Sur la méthode d'approximation de Newton, Nouv. Annales de math. 1869). A CAUCHY-féle feltételekhez közelálló feltételeket adott meg 1929-ben P. ROMANOWSKY (Zeitschrift f. angew. Math. u. Mech. 9, 420—421. o.), majd A. OSTROWSKI foglalkozott több dolgozatban részletesen a NEWTON-féle eljárással (l. pl. Über die Konvergenz und die Abrundungsfestigkeit des Newtonschen Verfahrens, Matematicseszki Szbornyik, 2(44), 6, 1937, 1073—1094. o.). Mindezek a vizsgálatok arra szorítkoznak, hogy az egyenlet egy gyökének megállapítsák azon kis környezetét, amelyből választott kezdőérték mellett az eljárás a szóbanforgó gyökhöz konvergál, és nem terjednek ki annak vizsgálatára, hogy mi történik, ha találomra választunk egy kezdőértéket. A következőkben először rövid áttekintést adunk a NEWTON-féle eljárás elméletéről, felhasználva a NEWTON-féle eljárás egy integrál-előállítását, ami a tárgyalást jelentősen egyszerűbbé teszi,[1] majd egy speciális esetben megvizsgáljuk a tetszőleges kezdőérték problémáját is.

Konvergencia-kritériumok. A következőkben az egyszerűség kedvéért mindig feltesszük, hogy a vizsgált $y = f(x)$ függvény akárhányszor differenciálható. Általában erre nincsen szükség, hanem csak arra, hogy kétszer vagy háromszor folytonosan differenciálható, az eziránt érdeklődő olvasó a bizonyításokból mindig megállapíthatja, hogy mennyit kell feltennünk. A gyakorlatban legfontosabb esetekben úgyis polinomok vagy transzcendens egész függvények gyökereiről van szó, amikor is a differenciálhányadosok létezése magától következik. Legyen x egy tetszőleges kezdő-érték, a NEWTON-féle eljárás egy lépését alkalmazva nyert második közelítő értéket $N(x)$-szel fogjuk jelölni, tehát:

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{2}$$

[1] Ezt az integrál-előállítást, bármilyen egyszerű is, tudomásunk szerint eddig nem alkalmazták a NEWTON-féle eljárás vizsgálatánál.

$N(x)$-et mint x függvényét fogjuk vizsgálni a következőkben. Először is tekintsük $N(x)$ differenciálhányadosát x szerint:

$$\frac{dN(x)}{dx} = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}. \tag{3}$$

Rövidség kedvéért a (3) jobboldalán álló függvényt $H(x)$-szel fogjuk jelölni. Tekintettel arra, hogy ha ξ az $f(x) = 0$ egyenlet egy gyöke, $N(\xi) = \xi$ (ugyanis ha ξ egyszerű gyök, ez világos (2)-ből, mert $f'(\xi) \neq 0$, míg ha ξ többszörös gyök, akkor a ξ helyen $f(x)$ eggyel magasabb rendben tűnik el, mint $f'(x)$, tehát $\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$ ebben az esetben is 0). (3)-ból könnyen következik, hogy ha $f(\xi) = 0$, akkor

$$N(x) - \xi = \int_{\xi}^{x} H(t)\,dt. \tag{4}$$

(4)-ből könnyen belátható, hogy ha a ξ gyök és az x_1 kezdőérték között fekvő minden t értékre $|H(t)| \leq q$, ahol $0 < q < 1$, akkor $x_2 = N(x_1)$ közelebb fekszik a ξ gyökhöz, mint x_1, pontosabban x_2-nek a ξ gyöktől való távolsága x_1-nek ugyanezen gyöktől való távolságának legfeljebb q-szorosa. Másrészt könnyen belátható, hogy ha ξ az $f(x) = 0$ egyenlet k-szoros gyöke, akkor $H(\xi) = 1 - \frac{1}{k}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$), ugyanis akkor $f(x)$ írható $f(x) = (x - \xi)^k g(x)$ alakban, ahol $g(\xi) \neq 0$ és így

$$H(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{(x-\xi)^k g(x)\,(k(k-1)(x-\xi)^{k-2} g(x) + \ldots)}{(k(x-\xi)^{k-1} g(x) + \ldots)^2} \tag{5}$$

(ahol a kipontozott tagok $(x - \xi)$-ben magasabb fokúak, mint a kiírt első tag). (5)-ből leolvasható, hogy

$$H(\xi) = 1 - \frac{1}{k}, \tag{6}$$

azaz ha ξ egyszerű gyök, $H(\xi) = 0$, de egyébként is minden esetben $0 \leq H(\xi) < 1$. Mivel $H(t)$ folytonos függvény, tehát megadható mindig olyan q szám $(0 < q < 1)$ és olyan $(\xi - h, \xi + h)$ intervallum, amelynek minden pontjában $|H(t)| \leq q$. Fenti megjegyzésünk értelmében tehát ha az x_1 kezdőértéket az említett $(\xi - h, \xi + h)$ intervallumban választjuk, akkor $x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$

mind ugyanebben az intervallumban fognak feküdni és fenn fog állani, hogy

$$(7) \qquad | x_{n+1} - \xi | < q^n | x_1 - \xi | ,$$

vagyis x_{n+1} konvergálni fog — mégpedig gyorsan — a ξ gyökhöz. Ezzel bebizonyítottuk, hogy *az $f(x) = 0$ egyenlet minden ξ gyöke körül megadható olyan kis intervallum, amelyben tetszőlegesen választva az x_1 kezdőértéket az x_n közelítőértékek sorozata konvergálni fog a ξ gyökhöz.* Nézzük most meg, hogy a fenti gondolatmenet hogyan építhető ki gyakorlatilag is használható konvergencia-kritériummá. Tegyük fel, hogy $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$, ahol $a < b$, akkor az (a, b) intervallumban $f(x)$-nek van egy vagy több gyöke. Legyen $c = \frac{a+b}{2}$ és $d = \frac{b-a}{2}$, azaz $a = c - d$ és $b = c + d$. Nyilvánvaló, hogy nem elegendő feltenni, hogy a $(c - d, c + d)$ intervallumban $| H(t) | \leq q < 1$, ugyanis ha x_1-et ebből az intervallumból választjuk, akkor ugyan x_2 közelebb fog feküdni a gyökhöz, de semmi sem biztosítja azt, hogy x_2 szintén a $(c - d, c + d)$ intervallumba esik, (ez csak abban a speciális esetben vehető bizonyosnak, ha a gyök éppen c, azaz az a, b intervallum középpontja). Azonban ha feltesszük, hogy $| H(t) | \leq q < 1$ fennáll a $(c - (2q + 1) d, c + (2q + 1) d)$ intervallumban is (azaz azon intervallumban, amelynek középpontja egybeesik az eredeti intervallum középpontjával és $(2q + 1)$-szer olyan hosszú), akkor, mivel tudjuk, hogy az egyenletnek van egy ξ gyöke $c - d$ és $c + d$ között, ha x_1 $c - d$ és $c + d$ között fekszik, akkor $|x_1 - \xi| < 2d$, tehát $|x_2 - \xi| < < 2dq$ és mivel $|\xi - c| < d$, tehát $|x_2 - c| < (2q + 1) d$, vagyis x_2 a $(c - (2q + 1) d, c + (2q + 1) d)$ intervallumban van, továbbá

$$|x_3 - c| < |x_3 - \xi| + |\xi - c| < q\,|x_2 - \xi| + |\xi - c| <$$
$$< d\,(2q^2 + 1) < d\,(2q + 1), \text{ s. í. t.},$$

belátható, hogy az x_n sorozat minden tagja a $(c - (2q + 1) d, c + + (2q + 1) d)$ intervallumban fekszik. Akkor viszont, mivel feltettük, hogy ezen intervallumban $|H(t)| \leq q < 1$, tehát a fentiek szerint $|x_{n+1} - \xi| < q^n |x_1 - \xi|$, vagyis x_{n+1} konvergál ξ-hez. Ebből az is következik, hogy a $(c - d, c + d)$ intervallumban $f(x)$-nek csak egy gyöke fekhet, hiszen ha ott két gyök volna, akkor az x_n sorozatnak mindkettőhöz kellene egyszerre konvergálni, ami lehetetlen. Ennél még több is igaz: $f(x)$-nek a $(c-(2q+ +1)d,\ c+(2q+1)d)$ intervallumban is csak egyetlen gyöke van. Ugyanis ha ξ és η $f(x)$ két különböző gyöke volna ebben az intervallumban, akkor mivel $N(\xi)=\xi$ és $N(\eta)=\eta$,

$$(8)\ |\eta-\xi|=|N(\eta)-N(\xi)|=\left|\int_{\xi}^{\eta} H(t)\,dt\right| \leq q\,|\eta-\xi| \quad \text{volna.}$$

Ha mármost $\eta \neq \xi$, akkor (8) mindkét oldalát $|\eta-\xi|$-vel osztva azt kapjuk, hogy $1 \leq q$, ami ellentmondás, hiszen feltettük, hogy $q<1$. Ilyenmódon tehát bebizonyítottuk a következő tételt:

Ha $f(a)<0$ és $f(b)>0$ $(a<b)$, továbbá bevezetve a $c=\dfrac{a+b}{2}$ és $d=\dfrac{b-a}{2}$ jelöléseket, található olyan q szám $(0<q<1)$, hogy a $(c-(2q+1)d,\ c+(2q+1)d)$ intervallumban $|H(t)| \leq q$, akkor az $f(x)=0$ egyenletnek a $(c-(2q+1)d,\ c+(2q+1)d)$ intervallumban pontosan egy gyöke van — jelöljük ezt a gyököt ξ-vel — és ha az x_1 kezdőértéket az (a,b) intervallumban tetszőlegesen választjuk, a NEWTON*-féle gyökközelítő eljárással kapott x_n közelítő értékek sorozata konvergál ξ-hez.*

A most bebizonyított konvergencia-feltétel igen közel áll ahhoz, amelyet CAUCHY adott meg.

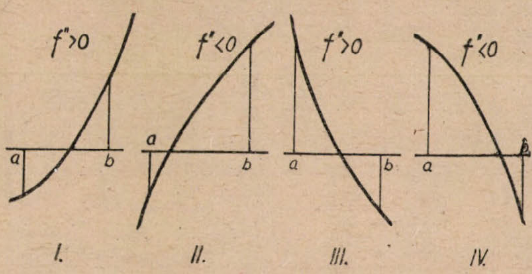
Ezek után térjünk át a FOURIER-féle feltétel ismertetésére. Fennáll a következő tétel: *Ha $f(a)<0$ és $f(b)>0$, továbbá az (a,b) intervallumban $f''(x)$ nem-negatív, akkor a és b között az $f(x)=0$ egyenletnek pontosan egy ξ gyöke van és ha kezdőértéknek $x_1=b$-t választunk, x_n konvergál ξ-hez.* Ez a tétel szemléletileg is könnyen belátható, szabatos bizonyítása a következő: Először bebizonyítjuk, hogy $f(x)=0$-nak csak egy gyöke lehet (a,b)-ben. Ugyanis ha több gyök volna, legyen ξ az a-hoz legközelebb fekvő gyök. Az (a,ξ) intervallumban van olyan c pont, ahol az érintő párhuzamos az $(a,f(a))$ és $(\xi,0)$ pontokat összekötő húrral, tehát ahol $f'(c)>0$. De akkor a (c,b) intervallum bármely x pontjában is $f'(x)>0$, ugyanis

$$(9)\qquad f'(x)=f'(c)+\int_{c}^{x} f''(t)\,dt \geq f'(c)>0,$$

de akkor a (ξ,b) intervallumban $f(x)=\int_{\xi}^{x} f'(t)\,dt>0$, vagyis valóban $f(x)=0$-nak csak egy gyöke van az (a,b) intervallumban.

Másrészt bebizonyítjuk, hogy ha $\xi < x \leq b$, akkor $\xi < N(x) < x$. Ugyanis $N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} < x$, mivel (ξ, b)-ben, mint láttuk, úgy $f(x)$, mint $f'(x)$ pozitívak, másrészt $N(x) - \xi = \int\limits_{\xi}^{x} H(t)\,dt$ és mivel a fentiek alapján $H(t)$ pozitív a (ξ, b) intervallumban, tehát $N(x) > \xi$. Ebből következik, hogy ha $x_1 = b$, az x_n sorozat monoton csökken és alulról korlátos, tehát van határértéke — legyen az η. De akkor (1)-ből $\eta = \eta - \frac{f(\eta)}{f'(\eta)}$, tehát $f(\eta) = 0$, vagyis $\eta = \xi$, amivel állításunkat be is bizonyítottuk.

Megjegyzendő, hogy a tétel igaz abban az esetben is, ha azt tesszük fel, hogy $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelűek és $f''(x)$ állandó előjelű (a, b)-ben, az összes lehetséges esetek a tárgyalt esetre vissza-



2. *ábra.*

vezethetők úgy, hogy a fent bebizonyított tételt $f(-x)$-re, $-f(x)$-re, illetőleg $-f(-x)$-re alkalmazzuk. Mind a négy esetet a 2. ábra szemlélteti.

Általános megjegyzések az iterációról: A NEWTON-féle gyökközelítő eljárás speciális esete az úgynevezett iterációs módszereknek. Legyen adva az $x = g(x)$ egyenlet és induljunk ki egy x_1 közelítő értékből. Képezzük az $x_2, x_3, \ldots$ sorozatot a következőképpen:

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{10}$$

Kérdés, milyen x_1 kezdőérték mellett fog x_n konvergálni az $x = g(x)$ egyenlet egy gyökéhez? Először vizsgáljuk meg azt, hogy átvihető-e az általános esetre az a tétel, amelyet a NEWTON-módszer esetében bebizonyítottunk, hogy minden gyök körül van egy „konvergencia-intervallum", azaz olyan intervallum, amelynek bármely pontjából elindulva az iteráció konvergál a gyökhöz? Könnyű belátni, hogy ez attól függ, hogy $|g'(\xi)| < 1$, vagy $|g'(\xi)| > 1$, ahol ξ az $x = g(x)$ egyenlet szóbanforgó gyökét jelenti. Tegyük fel először, hogy $|g'(\xi)| < 1$, be fogjuk bizonyítani, hogy ekkor van konvergencia-intervallum ξ körül. Ebben az esetben a ξ gyököt *attraktív* (vonzó) *gyök*nek — vagy *attraktív fixpont*nak — nevezik. (Azért beszélhetünk itt fixpontról, mert ha $\xi = g(\xi)$, ez úgy is felfogható, hogy a számegyenesnek $x' = g(x)$ önmagára való leképezésénél a ξ pont önmagába megy át.) A bizonyítás rendkívül egyszerű: mivel feltettük, hogy $|g'(\xi)| < 1$, megadhatók olyan $h > 0$ és $0 < q < 1$ számok, hogy a $(\xi - h, \xi + h)$ intervallumban $|g'(x)| \leq q$. De akkor, ha x_1 a $(\xi - h, \xi + h)$ intervallumban fekszik $x_2 - \xi = g(x_1) - g(\xi) = g(\xi + \vartheta(x_1 - \xi))(x_1 - \xi)$, ahol $0 < \vartheta < 1$, tehát feltevéseink értelmében $|x_2 - \xi| < q\,|x_1 - \xi|$. Hasonlóképpen belátható, hogy $|x_{n+1} - \xi| < q^n\,|x_1 - \xi|$, vagyis x_{n+1} valóban konvergál ξ-hez. A most bevezetett terminológiával mondhatjuk, hogy a NEWTON-féle gyökközelítésnél, amikor a $g(x)$ függvény $x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$-szel egyenlő, $f(x)$ minden gyöke attraktív gyök, vagy más szóval az $x' = N(x)$ leképezés minden fixpontja attraktív. Nézzük most azt az esetet, amikor $|g(\xi)| > 1$. Ebben az esetben ξ-t *repulzív* (taszító) *gyök*nek, vagy *repulzív fixpont*nak nevezzük, és ki fogjuk mutatni, hogy ebben az esetben semilyen kezdőérték mellett nem konvergál az x_n sorozat ξ-hez (kivéve azt a triviális esetet, hogy egy bizonyos n-től kezdve $x_n = \xi$.) Ugyanis ha x_n konvergál ξ-hez és $x_n \neq \xi$ semilyen n-re, akkor minden $h > 0$-hoz megadható olyan n, hogy $|x_n - \xi| < h$ és ugyanakkor $|x_{n+1} - \xi| < |x_n - \xi|$. Ez belátható például úgy, hogy ebben az esetben $u_n = \operatorname{Max}_{k \geq n} |x_k - \xi|$ is 0-hoz tart, de viszont $u_n \geq u_{n+1}$, tehát ha $u_n \neq 0$ semilyen n-re, akkor végtelen sokszor $u_n > u_{n+1}$, amiből már az állítás következik, mert ha $u_n > u_{n+1}$, akkor szükségképpen $|x_n - \xi| > |x_{n+1} - \xi|$. Másrészt viszont

$$(11)\qquad x_{n+1} - \xi = g(x_n) - g(\xi) = g'[\xi + \vartheta(x_n - \xi)]\,(x_n - \xi),$$

ahol $0 < \vartheta < 1$, tehát mivel feltettük, hogy $|g'(\xi)| > 1$, található olyan kis $h > 0$, hogy ha $|x - \xi| < h$, akkor $|g'(x)| > 1$, vagyis (11)-ből $|x_{n+1} - \xi| > |x_n - \xi|$, ha $|x_n - \xi| < h$, ami ellentmond annak, hogy x_n konvergál ξ-hez.

Ha az x_1 kezdőértékből kiindulva képezzük az $x_{n+1} = g(x_n)$ sorozatot, elképzelhető, hogy bizonyos számú lépés után visszajutunk az x_1 kezdőértékhez, azaz $x_{k+1} = x_1$. Ebben az esetben az is igaz, hogy az $x_2, x_3, \ldots, x_k$ számok bármelyikét választva kezdőértéknek, k lépés után megint visszajutunk a kiindulási értékhez. Az ilyen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ pontcsoportot *k-adrendű ciklus*nak nevezzük az $x = g(x)$ egyenletre nézve. Ha bevezetjük a $g_2(x) = g(g(x))$, $\ldots, g_{n+1}(x) = g(g_n(x))$ jelöléseket, akkor látjuk, hogy az $x' = g_k(x)$ leképzés minden fixpontja egy k-adrendű ciklus egy eleme és megfordítva egy k-adrendű ciklus minden eleme fixpontja az $x' = g_k(x)$ leképezésnek. Tegyük fel, hogy $x_1, x_2, \ldots, x_k$ egy k-adrendű ciklus az $x = g(x)$ egyenletre nézve. Ebben az esetben $g_k(x)$ deriváltjának értéke az $x_1, x_2, \ldots, x_k$ helyeken egyenlő, mégpedig:

$$(12) \qquad g_k'(x_i) = g'(x_1)\, g'(x_2) \ldots g'(x_k) \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

amint ez a függvény függvényének differenciálási szabályával belátható. Ezekre az iterációkra vonatkozó egyszerű megjegyzésekre lesz szükségünk a továbbiakban. Olyan fixpontokkal, ahol $g'(\xi) = 1$, nem foglalkozunk, mert erre nem lesz szükségünk, csak megjegyezzük, hogy ezeket *határozatlan* fixpontoknak nevezik.

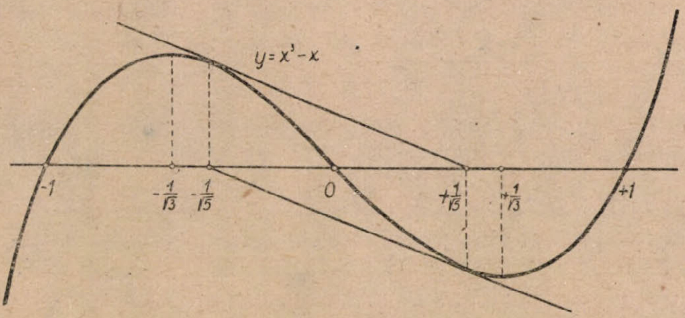
A NEWTON-*féle eljárás szinguláris pontjai.* Legyen adva egy $f(x) = 0$ egyenlet. Szinguláris pontnak fogunk nevezni minden olyan x_1 pontot, amelyből elindulva a NEWTON-féle eljárás nem konvergál az egyenlet valamelyik gyökéhez. Legyen η az $f'(x) = 0$ egyenlet egy gyöke, amely nem gyöke egyben $f(x) = 0$-nak is. Akkor — amint ez szemléletesen is evidens (ugyanis az érintő párhuzamos lesz az x tengellyel és így azt nem fogja metszeni) $N(\eta)$ nem értelmezhető és így az eljárás már az első lépésnél elakad. Hasonlóképpen szinguláris pont minden olyan pont, amelyből, mint kezdőértékből elindulva a NEWTON-féle közelítés iterált alkalmazásával véges lépés után $f'(x)$ egy olyan gyökéhez jutunk, amely $f(x)$-nek nem gyöke. Mindezeket a pontokat *elsőfajú szinguláris pontok*nak nevezzük. Jelöljük $y = N(x)$ inverz függvényét $x = N_{-1}(y)$-nal, megjegyezve, hogy nem mindig található olyan x érték adott y-hoz, amelyre $y = N(x)$ és ha található, akkor általában több ilyen pont is van, azaz $N_{-1}(y)$ általában többértékű függvény, amely nincs az egész számegyenesen értelmezve. Értelmezzük tovább az $N_{-k}(y)$ függvényeket a következő rekurzív módon:

$$(13) \qquad N_{-k}(y) = N_{-1}\,(N_{-(k-1)}(y)) \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

akkor mondhatjuk, hogy az összes elsőfajú szinguláris pontok előállíthatók $N_{-k}(\eta)$ alakban, ahol $f'(\eta) = 0$ és $f(\eta) \neq 0$. Ilyenmódon legfeljebb megszámlálható sok elsőfajú szinguláris pont van. Geometriailag az elsőfajú szinguláris pontokat a következőképpen találhatjuk meg: vesszük a görbe összes szélsőértékhelyeit, továbbá a görbe azon pontjainak talppontját, amely pontokban húzott érintő valamely szélsőértékhely talppontjában metszi az x tengelyt, továbbá a görbe azon pontjait, amelyekben húzott érintő az előbb említett pontok talppontjaiban metszi az x tengelyt, s. í. t.

Az elsőfajú szinguláris pontokkal még nem merítettük ki az összes szinguláris pontok halmazát. Legyen $c_1, c_2, \ldots, c_k$ k-adrendű ciklus az $x = N(x)$ egyenletre nézve, akkor a c_1 pontot választva x_1 kezdőértéknek, $x_n = c_j$, ahol $n \equiv j \bmod k$, tehát x_n nem konvergál sehova. Ugyanez a helyzet, ha a ciklus bármely elemét választjuk kezdőértéknek, vagyis az $x = N(x)$ egyenlet minden k-adredű ciklusának minden eleme is szinguláris, ezeket nevezzük *másodfajú szinguláris pontoknak*. Mivel ezek létezése nem olyan nyilvánvaló, mint az elsőfajú szinguláris pontoké, bemutatunk egy példát: Legyen $f(x) = x^3 - x$, ebben az esetben $N(x) = \dfrac{2\,x^3}{3\,x^2 - 1}$. Keressük meg a másodrendű ciklusokat, azaz az $N\,(N(x)) = x$ egyenlet gyökeit. Ez az egyenlet átalakítás után $x.\,(20\,x^8 - 39\,x^6 + 27\,x^4 - 9\,x^2 + 1) = 0$ alakra hozható. Mivel az $f(x) = 0$ egyenlet minden gyöke egyben gyöke $N\,(N(x)) = x$-nek is, az előbb kapott egyenlet osztható kell, hogy legyen $(x^3 - x)$-szel. Az osztás elvégzése után a $20\,x^6 - 19\,x^4 + 8\,x^2 - 1 = 0$ egyenletet nyerjük, vagyis $x^2 = z$-re a $20\,z^3 - 19\,z^2 + 8\,z - 1 = 0$ egyenletet. Ennek az egyenletnek egyetlen valós gyöke $z = \dfrac{1}{5}$, komplex gyökei $\dfrac{3 \pm i\sqrt{7}}{8}$, azaz $x = N\,(N(x))$ valós gyökei $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, tehát az $x^3 - x = 0$ egyenlet egyetlen másodrendű ciklusa a $+\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \; -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ pontpár. Ha tudtuk volna előre, hogy csak egy valós másodrendű ciklus van, azt egyszerűbben is meghatározhattuk volna, ugyanis ha ez a pontpár (u, v), akkor szükségképpen $u = -v$, hiszen máskép — mivel az $f(x)$ függvény páratlan — $(-u, -v)$ is másodrendű ciklus volna. Vagyis akkor egyszerűen kiindulhatunk az $x = -N(x)$ egyenletből, ami átalakítva $x\,.\,(5\,x^2 - 1)$ alakra hozható, és így rögtön megkapjuk a $\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ pontpárt. (l. 3. ábra)

A NEWTON-*féle módszer vizsgálata tetszőleges kezdőérték mellett.* A következőkben csak olyan függvények vizsgálatára szorítkozunk, amelyek a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban kétszer folytonosan differenciálhatók és amelyek második deriváltja monoton növekvő minden valós x-re. Ha $f(x)$ ilyen függvény, az $f(x) = 0$ egyenletnek legfeljebb három gyöke lehet, hiszen ha négy gyöke volna, akkor $f'(x)$-nek legalább három gyöke és $f''(x)$-nek legalább két gyöke volna, ami ellentmond $f''(x)$ monotonitásának. A következőkben még azt is feltesszük, hogy $f(x)$-nek pontosan három különböző



3. ábra.

egyszerű gyöke van, legyenek ezek $A < B < C$. Az említett függvényosztály tartalmazza például az

$$f(x) = x^{2n+1} - p\,x + q \tag{14}$$

függvényeket ($n = 1, 2, \ldots$), ahol p pozitív és

$$|\,q\,| < 2\,n\left(\frac{p}{2\,n+1}\right)^{1+\frac{1}{2n}} \tag{15}$$

(így például az ú. n. kamatláb-probléma esetében ilyen függvény gyökét kell meghatároznunk). Ugyanis a (14) által definiált függvény esetében $f''(x) = (2\,n + 1)\,2\,n\,.\,x^{2n-1}$ monoton növekvő és így $f(x) = 0$-nak legfeljebb három gyöke lehet; azt pedig, hogy három különböző gyöke van, úgy láthatjuk be, hogy az $y = x^{2n+1} -$ $- p\,x$ függvény a szélsőértékhelyein felvett értékek, azaz

$$-2\,n\left(\frac{p}{2\,n+1}\right)^{1+\frac{1}{2n}} \quad \text{és} \quad +2\,n\left(\frac{p}{2\,n+1}\right)^{1+\frac{1}{2n}}$$

értékek közé eső minden értéket pontosan háromszor vesz fel (l. 3. ábra). A vizsgált függvények esetében be fogjuk bizonyítani a következő állításokat:

a) Az $f(x) = 0$ egyenletre vonatkozólag szinguláris pontok halmaza megszámlálható, mégpedig az elsőfajú szinguláris pontok végtelen sorozatán kívül csak két másodfajú szinguláris pont van, amelyek másodrendű ciklust alkotnak.

b) Tetszőleges kis pozitív ε-hoz megadható olyan ε hosszúságú intervallum és abban olyan a, b, c pontok, hogy ha a-t, b-t, illetőleg c-t választjuk kezdőértéknek, a NEWTON-féle módsze rel kapott közelítőértékek sorozata rendre az A, B, illetőleg C gyökhöz konvergál. Más szóval előfordulhat, hogy az x_1 kezdőérték tetszőleges kis megváltozása folytán az x_n sorozat határértéke ugrásszerűen változik.

Ezenkívül *minden* x_1 kezdőértékről el fogjuk tudni dönteni, hogy onnan kiindulva konvergál-e a NEWTON-féle eljárás és ha igen, melyik gyökhöz.

Nézzük ezen állítások bizonyítását. Először is jelöljük a függvény (egyetlen) maximumhelyét α-val és (egyetlen) minimumhelyét β-val; nyilván fennáll (ha — mint előbb — A, B és C jelölik $f(x)$ gyökeit)

$$A < \alpha < B < \beta < C. \tag{16}$$

Az $x = \varrho$ hely legyen az $y = f(x)$ függvényt ábrázoló görbének (egyetlen) inflexióspontja; nyilván $\alpha < \varrho < \beta$. Az, hogy $\varrho < B$, vagy $\varrho \geq B$, a tárgyalás szempontjából nem jelent különbséget, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\varrho < B$. Az inflexióspontban húzott érintő ϱ és B között metszi az x-tengelyt, ezt a helyet nevezzük σ-nak. Geometriai meggondolásokkal könnyen belátható, hogy az $y = N(x)$ egyenletnek adott y mellett három megoldása van, ha y a $(-\infty, A)$, (σ, B), vagy $(C, +\infty)$ intervallumok valamelyikének belsejében fekszik, egy megoldása, ha y az (A, σ) vagy (B, C) intervallumok egyikének belsejében fekszik, továbbá ha $y = A$, $y = \sigma$, vagy $y = C$ és két megoldása, ha $y = B$. Ilyen módon $N_{-k}(\alpha)$ és $N_{-k}(\beta)$ egyértelműen értelmezhetők minden k-ra; a rövidség kedvéért legyen $\alpha_0 = \alpha$, $\beta_0 = \beta$ és

$$\alpha_k = N_{-k}(\alpha), \quad \beta_k = N_{-k}(\beta) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{17}$$

Könnyen belátható, hogy ezen pontok elrendezése a következő:

$$\alpha < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_3 < \alpha_4 < \ldots < \alpha_{2k} < \beta_{2k+1} < \alpha_{2k+2} < \ldots < \varrho$$

(18) és

$$\beta > \alpha_1 > \beta_2 > \alpha_3 > \beta_4 > \ldots > \beta_{2k} > \alpha_{2k+1} > \beta_{2k+2} > \ldots > B.$$

Ezen α_k és β_k pontok szinguláris, mégpedig elsőfajú szinguláris pontok. (18)-ból látható, hogy $\lim\limits_{k \to \infty} \alpha_{2k} = \lambda$ és $\lim\limits_{k \to \infty} \alpha_{2k+1} = \mu$

határértékek léteznek, továbbá, hogy $\lim_{k\to\infty} \beta_{2k+1} = \lambda$ és $\lim_{k\to\infty} \beta_{2k} = \mu$, ahol $\lambda < \varrho < B < \mu$. Ebből azonban az is belátható, hogy a λ és μ pontok másodrendű ciklust alkotnak, ugyanis

$$N(\lambda) = \lim_{k\to\infty} N(\alpha_{2k}) = \lim_{k\to\infty} \alpha_{2k-1} = \mu \tag{19}$$

és

$$N(\mu) = \lim_{k\to\infty} N(\alpha_{2k+1}) = \lim_{k\to\infty} \alpha_{2k} = \lambda. \tag{20}$$

Ármost nézzük meg, hogy tetszőlegesen választott kezdőérték mellett mikor és melyik gyökhöz konvergál a NEWTON-féle eljárás. A (λ, μ) intervallum kivételével ezt igen egyszerűen eldönthetjük. A FOURIER-féle kritérium értelmében, ha x_1 a $(-\infty, A)$ intervallumban fekszik, $x_n \to A$, továbbá, ha x_1 a $(C, +\infty)$ intervallumban van, akkor $x_n \to C$. Ha x_1 az (A, α) intervallumban van, akkor $x_2 < A$, tehát ebben az esetben is $x_n \to A$; ugyanígy ha x_1 a (β, C) intervallumban van, $x_2 > C$ és így $x_n \to C$. Rövidség kedvéért olyan intervallumot, amelyből tetszőlegesen választva az x_1 kezdőértéket x_n az A (ill. B, ill. C) gyökhöz konvergál, A-intervallumnak (ill. B-, ill. C-intervallumnak) nevezzük. Az előző meggondolást folytatva könnyű belátni, hogy $(\beta_{2k+1}, \alpha_{2k+2})$ és $(\alpha_{2k+1}, \beta_{2k})$ A-intervallumok, továbbá, hogy $(\alpha_{2k}, \beta_{2k+1})$ és $(\beta_{2k+2}, \alpha_{2k+1})$ C-intervallumok $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Ilyen módon, ha A-tól λ-ig haladunk, váltakozva A és C-intervallumokba jutunk, amely intervallumok hossza 0-hoz tart, hasonlóképpen C-től visszafelé μ-ig haladva C- és A-intervallumok váltakoznak egymással. Azt is könnyen beláthatjuk, hogy A-tól λ felé haladva úgy az A-intervallumok, mint a C-intervallumok hossza monoton csökken és ugyanez a helyzet, ha visszafelé C-től μ felé haladunk. Más szóval bebizonyítjuk, hogy

$$\alpha_{2k+2} - \beta_{2k+1} < \alpha_{2k} - \beta_{2k-1} \quad \text{és} \quad \beta_{2k} - \alpha_{2k+1} < \beta_{2k-2} - \alpha_{2k-1} \tag{21}$$

és ugyanígy

$$\beta_{2k+1} - \alpha_{2k} < \beta_{2k-1} - \alpha_{2k-2} \quad \text{és} \quad \alpha_{2k+1} - \beta_{2k+2} < \alpha_{2k-1} - \beta_{2k}$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{22}$$

Elegendő a (21)-ben szereplő első egyenlőtlenséget bebizonyítani, a másik három egyenlőtlenség bebizonyítása ugyanúgy megy. Tekintve, hogy $\beta_{2k-1} = N[N(\beta_{2k+1})]$ és $\alpha_{2k} = N[N(\alpha_{2k+2})]$, továbbá felhasználva, hogy

$$(23)\qquad \frac{d}{dt} N\left(N(t)\right) = H(t)\,.\,H\left(N(t)\right)$$

kapjuk, hogy

$$(24)\qquad \alpha_{2k} - \beta_{2k-1} = \int\limits_{\beta_{2k+1}}^{\alpha_{2k+2}} H(t)\, H\left(N(t)\right) dt\,.$$

Állításunk be lesz bizonyítva, ha kimutatjuk, hogy a szóbanforgó összes intervallumokban, tehát α és λ között fekvő minden t-re, $H(t)\, H\left(N(t)\right) > 1$. Tekintetbe véve $f(x)$, $f'(x)$ és $f''(x)$ előjelét, növekedését, ill. csökkenését, látjuk, hogy $H(t)$ az (α, λ) intervallumban negatív, $|\,H(t)\,|$ ugyanitt monoton csökken, a (μ, β) intervallumban $H(t)$ ugyancsak negatív, de $|\,H(t)\,|$ monoton növekszik. Mivel nyilvánvalóan $H(\alpha) = H(\beta) = -\infty$, továbbá ha t az (α, λ) intervallumban fekszik, akkor $N(t)$ a (μ, β) intervallumban van, végül pedig tekintetbe véve azt, hogy $N(\lambda) = \mu$, belátjuk, hogy állításunk bizonyításához elegendő kimutatni, hogy $H(\lambda)\, H(\mu) > 1$. Ezt a következő meggondolással láthatjuk be: $H(t)$ a (λ, ϱ) intervallumban negatív, abszolút értéke csökken, (ϱ, B) intervallumban pozitív, (B, μ)-ben újból negatív és abszolút értékben növekszik, így tehát

$$\mu - B = N(\lambda) - B = \int\limits_{\lambda}^{B} (-H(t))\, dt \leqq \int\limits_{\lambda}^{\varrho} (-H(t))\, dt < (B-\lambda)\,(-H(\lambda)).\qquad (25)$$

Másrészt

$$(26)\qquad B - \lambda = B - N(\mu) = \int\limits_{B}^{\mu} (-H(t))\, dt \leqq (\mu - B)\,(-H(\mu)).$$

Összeszorozva (25) és (26) bal- és jobboldalait és az így kapott egyenlőtlenséget $(B - \lambda)\,(\mu - B)$-vel elosztva nyerjük, hogy $1 < H(\lambda)\, H(\mu)$. Ilyen módon még többet is bizonyítottunk be, mint amennyit (21) első egyenlőtlensége kíván, ugyanis azt, hogy

$$(27)\qquad \alpha_{2k} - \beta_{2k-1} > H(\lambda)\, H(\mu)\, (\beta_{2k-1} - \alpha_{2k}).$$

Vizsgáljuk meg ezekután az eddig kihagyott (λ, μ) intervallumot. Megint csak Fourier kritériumát használva kapjuk, hogy (ϱ, B) B-intervallum. Mivel az inflexióspontban húzott érintő σ-ban, tehát a (ϱ, B) intervallum belsejében metszi az x tengelyt, még ϱ-tól balra egy darabig meghosszabbíthatjuk ezt a B-intervallumot pontosan addig a pontig, amely abszcisszához tartozó görbe-pontból húzott érintő éppen B-ben metszi az x tengelyt. Ezt a pontot B_1-nek nevezzük, továbbá az $N_{-k+1}(B_1) = N_{-k}(B)$ pontot B_k-val jelöljük. Hasonló meggondolással, mint az előbb, belátható, hogy a B gyököt körülvevő B-intervallum fokozatosan kibővíthető, mégpedig mivel

$$\lambda < \ldots < B_{2k+1} < B_{2k-1} < \ldots < B_3 < B_1 < \varrho < B_2 <$$
$$(28) \qquad < B_4 < \ldots < B_{2k} < \ldots < \mu ,$$

ha bevezetjük a $\lim\limits_{k\to\infty} B_{2k-1} = \lambda'$ és $\lim\limits_{k\to\infty} B_{2k} = \mu'$ jelöléseket, azt kapjuk, hogy a (λ', μ') intervallum B-intervallum. Ki fogjuk mutatni, hogy $\lambda' = \lambda$ és $\mu' = \mu$. Annyi nyilvánvaló, hogy $\lambda \leq \lambda'$ és $\mu' \leq \mu$, továbbá azt is könnyű belátni, hogy (λ', μ') is másodrendű ciklus, ugyanis

$$N(\lambda') = \lim_{k\to\infty} N(B_{2k-1}) = \lim_{k\to\infty} B_{2k-2} = \mu'$$
$$(29) \text{ és}$$
$$N(\mu') = \lim_{k\to\infty} N(B_{2k}) = \lim_{k\to\infty} B_{2k-1} = \lambda'.$$

Ugyanazzal a meggondolással, mint az előbb, kimutathatjuk azt is, hogy

$$(30) \qquad H(\lambda')\,H(\mu') > 1.$$

Mivel $|H(t)|$ a (λ, λ') intervallumban monoton csökken és a (μ', μ) intervallumban monoton nő, továbbá ha t végigfut λ-tól λ'-ig, akkor $N(t)$ végigfut visszafelé μ-től μ'-ig, tehát $H(t)\,H\,(N(t))$ monoton csökkenő a (λ, λ') intervallumban. Tekintetbevéve (30)-at, azt kapjuk, hogy

$$(31) \qquad H(t)\,H\,(N(t)) > 1$$

az egész (λ, λ') intervallumban. Legyen most t_1 a (λ, λ') intervallum egy tetszőleges belső pontja, legyen $t_2 = N\,(N(t_1)), \ldots, t_k = N\,(N(t_{k-1})), \ldots$, akkor, mivel

$$(32) \qquad \lambda' - t_k = N\,(N(\lambda')) - N\,(N(t_{k-1})) =$$
$$= \int_{t_{k-1}}^{\lambda'} H(t)\,H\,(N(t))\,dt > \lambda' - t_{k-1},$$

a t_k sorozat monoton csökken. Tekintve, hogy $t_k > \lambda$, a t_k sorozat konvergál egy λ'' határétékhez ($\lambda \leq \lambda'' < \lambda'$). De akkor szükségképpen λ'' a $t' = N\,(N(t))$ leképezés fixpontja. Azonban (31)-re való tekintettel repulzív fixpont, márpedig az iterációra vonatkozó általános megjegyzések során láttuk, hogy repulzív fixpontot nem lehet iterációval megközelíteni, vagyis ellentmondásra jutottunk azzal a feltevéssel, hogy $\lambda \neq \lambda'$, más szóval bebizonyítottuk, hogy $\lambda = \lambda'$ és így azt is, hogy $\mu = \mu'$. Ilyen módon a tárgyalt függvényosztály esetében teljes áttekintésünk van arra vonatkozólag, hogy bármilyen valós x_1 kezdőértékből kiindulva a NEWTON-féle eljárás konvergál-e valamelyik gyökhöz, vagy nem. Láttuk, hogy az eljárás mindig konvergál az A, B, C gyökök valamelyikéhez, kivéve, ha x_1 az α_k és β_k elsőfajú szinguláris pontok ($k = 0, 1, 2, \ldots$) valamelyikével, vagy a (λ, μ) másodfajú szinguláris pontpár valamelyikével egyenlő. Ezzel az *a)* alatti állításunkat bebizonyítottuk. A *b)* állítás bizonyítása is már elvégezhető: Tekintettel arra, hogy a λ és μ pontok egyrészt a B-intervallum végpontjai, másrészt a második oldalról A- és C-intervallumok sűrűsödési helyei, minden a λ és μ pontokat körülvevő $\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}, \lambda + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, illetve $\left(\mu - \frac{\varepsilon}{2}, \mu + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ intervallum bír a kívánt tulajdonságokkal.

Ezen dolgozattal az volt a célunk többek között, hogy rámutassunk, mennyire bonyolulttá válik a NEWTON-féle eljárás konvergencia-problémája, ha nem szorítkozunk az egyes gyököket körülvevő kicsiny intervallumokra, hanem a kezdőértékeket tetszőlegesen választjuk, és felhívjuk a figyelmet arra, hogy milyen meglepő tényekkel és érdekes problémákkal találkozunk ezen a téren. Befejezésül néhány érdekes problémát említünk meg:

1. Igaz-e, hogy ha $f(x)$ csupa valós gyökkel bíró polinom, akkor a szinguláris pontok halmaza megszámlálható?

2. Megadható-e olyan $f(x)$ polinom, amelynek van valós gyöke, de a szinguláris pontjainak halmaza tartalmaz egy intervallumot?

О МЕТОДЕ НЬЮТОНА

Общеизвестный метод Ньютона для приближения корней уравнения $f(x) = 0$ состоит в том, что исходя из некоторого первого приближения x_1, построим последовательность $x_{n+1} = N(x_n)$, где $N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

В статье изложены простые доказательства классических результатов о методе Ньютона, далее доказана следующая теорема:

пусть $f''(x)$ монотонно возрастающая функция, и предположим что уравнение $f(x)=0$ имеет трёх корней: A_1, A_2, A_3. Последовательность x_n сходится к одному из корней A_i $(i=1,2,3)$ для всякого значения x_1, кроме для элементов некоторого счётного множества E сингулярных точек. Для всякого $\varepsilon>0$ существует интервал $(t, t+\varepsilon)$ и в нём три точки a_i так что для $x_1=a_i$ x_n сходится к A_i $(i=1,2,3)$. Высказаны также некоторые гипотезы в том же направлении.

ON NEWTON'S METHOD OF APPROXIMATION

The classical method of approximating the roots of an equation $f(x)=0$ consists in that, starting from an arbitrary first approximation x_1, we form the sequence $x_{n+1} = N(x_n)$ where $N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. After discussing classical results concerning Newton's method in a simplified manner by using the integral formula (4) for $N(x)$, the following theorem is proved: Let us suppose that $f''(x)$ is monotone increasing for all x and that $f(x)=0$ has exactly three real roots A_i $(i=1,2,3)$. The sequence x_n converges to one of the roots for every choice of x_1 except for x_1 belonging to an *enumerable* set E of singular points, which can be explicitly given. For any $\varepsilon > 0$ there exists an interval $(t, t+\varepsilon)$ and in this interval three points a_i, $(t < a_i < t+\varepsilon,\ i=1,2,3)$ having the property that if $x_1 = a_i$, x_n converges to A_i $(i=1,2,3)$. Some conjectures in the same direction are stated.