A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS KÖZPONTI HATÁRÉRTÉKTÉTELÉNEK EGY ÚJ ÁLTALÁNOSÍTÁSÁRÓL

RÉNYI ALFRÉD lev. tag

Előadta az 1950 június 2-án tartott osztályülésen
(Székfoglaló előadás.)

Előadásomban egy újabb eredményemről fogok beszámolni a valószínűségszámítás köréből. A valószínűségszámítás iránti érdeklődésemet a Szovjetunióban végzett tanulmányaim során *A. N. Kolmogorov* és *Sz. N. Bernstein*, a valószínűségszámítás nagy mesterei keltették fel; a valószínűségszámítás terén az ő tanítványuk vagyok és nagy hálával tartozom nekik. Azok a vizsgálatok, amelyekről itt beszámolok, a valószínűségszámítás *Kolmogorov* által adott elméletéhez[1] kapcsolódnak, maga a kérdés feltevése is csak ennek az elméletnek a keretében lehetséges.

Ismeretes, hogy *Kolmogorov* a valószínűségszámításnak a mértékelméleten alapuló, axiomatikus felépítésével a valószínűségszámítást exakt matematikai elméletté tette és ugyanakkor alkalmazásainak körét is jelentősen kiszélesítette. *Kolmogorov* axiomatikus rendszere egy H alaphalmaz részhalmazainak T halmaztestén értelmezett $\mu(A)$ $(A \in T)$ abszolut additiv, nemnegatív és a $\mu(H)=1$ feltételnek eleget tevő halmazfüggvényből indul ki, a T halmaztest elemeit eseményeknek, a $\mu(A)$ számot az A esemény valószínűségének nevezi. A valószínűségszámítás tárgyát olyan változó mennyiségek vizsgálata alkotja, amelyek valamely tömegjelenség jellemző adatait képezik, értékük esetről esetre változik, azonban értékkészletük eloszlása ismeretes — az ilyen mennyiségeket valószínűségi változóknak nevezik. *Kolmogorov* elméletében a valószínűségi változó matematikai fogalma igen egyszerűen értelmezhető: valószínűségi változón olyan, a H halmazon értelmezett $\xi=\xi(a)$ $(a \in H)$ függvényt értünk, amely μ-re vonatkozólag mérhető. Ugyancsak igen egyszerűen értelmezhető egy ξ valószínűségi változó várható értéke, $M(\xi)$, mint a ξ függvény μ szerinti integrálja:

$$M(\xi)=\int_H \xi \, d\mu. \tag{1}$$

A következőkben fel fogjuk tenni, hogy μ Lebesgue-mérték, azaz szeparábilis és teljes, továbbá, hogy μ folytonos mérték. Az absztrakt Lebesgue-mérték elméletére itt nem térhetünk ki, csak megemlítjük, hogy a bizonyítás során felhasználjuk *V. A. Rohlin* ezirányú újabb eredményeit[2].

Emlékezetbe idézzük a valószínűségi változók függetlenségének definícióját: jelentse $A(x)$ a $\xi<x$ eseményt és $B(y)$ az $\eta<y$ eseményt, ahol x és y valós számok; a ξ és η valószínűségi változókat akkor nevezzük függetleneknek,

ha x és y minden értéke mellett fennáll a

$$\mu(A(x)B(y))=\mu(A(x))\mu(B(y)) \tag{2}$$

egyenlőség. Az $F(x)=\mu(A(x))$ függvényt a ξ változó eloszlásfüggvényének nevezzük; ezek szerint a ξ és η valószínűségi változókat akkor nevezzük függetleneknek, ha együttes eloszlásfüggvényük a két változó eloszlásfüggvényének szorzatával egyenlő.

A valószínűségszámításnak a gyakorlati alkalmazások szempontjából rendkívül fontos eredményei egy csoportját a valószínűségszámítás centrális határértéktétele néven szokták összefoglalni. A centrális határértéktétel, amelynek legegyszerűbb eseteit *Moivre* (1730) és *Laplace* (1812) bizonyították be, azután *Csebisev* (1887), *Markov* (1898) és *Ljapunov* (1900) általánosították, az utolsó ötven év folyamán állandóan az érdeklődés középpontjában volt; a centrális határértéktétel különböző irányokba való kiterjesztése és élesítése terén meg kell említenünk *Lindeberg, Bernstein, Kolmogorov, Cramér, Doob, Feller, Hincsin, Gnyegyenko, Petrovszkij, Esseen,* és *Linnik* neveit a kérdés rendkívül gazdag irodalmából. A centrális határértéktétel következő fogalmazásából indulunk ki: ha a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ valószínűségi változók függetlenek, mindegyik középértéke $M(\xi_n)=0$ $(n=1,2,\ldots)$ és

$$\zeta_n=\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{B_n}, \tag{3}$$

ahol

$$B_n^2=\sum_{k=1}^{n} M(\xi_k^2)=M\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)^2\right) \tag{4}$$

akkor igen általános feltételek mellett (amelyek részletezésére itt nem térhetünk ki, de nem is lesz rá szükségünk) a ζ_n valószínűségi változó eloszlásfüggvénye konvergál a normális (vagy Gauss-féle) eloszláshoz, másszóval, ha $A_n(x)$ jelenti a $\zeta_n<x$ eseményt,

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n(x))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x). \tag{5}$$

Ezek előrebocsátása után rátérek a vizsgálataim tárgyát képező kérdésekre: Ha a H alaphalmazon értelmezett μ mértéket egy másik μ' mértékkel cseréljük fel, hogyan módosul a ζ_n változók határeloszlása, másszóval, ha az $A_n(x)$ halmazok mértékét egy másik μ' mértékkel mérjük, fog-e létezni

$$\lim_{n\to\infty}\mu'(A_n(x)) \tag{6}$$

és mi lesz az értéke, amennyiben létezik? Annak ellenére, hogy a kérdés igen kézenfekvő, tudomásom szerint eddig nem vizsgálták.

Ami a kérdés vizsgálatánál először szembetűnik, az, hogy a μ' mértékre vonatkozólag a ξ_n változók általában nem lesznek többé függetlenek, meg-változik $M(\xi_n)$ értéke és $M(\xi_n^2)$ értéke is; ezek alapján azt várhatnánk, hogy a (6) határérték létezéséről általában nem lehet beszélni, és azt hihetné valaki, hogy a határeloszlás, még ha létezik is, lényegesen eltérhet a normális eloszlástól. Sikerült azonban kimutatnom, hogy a várakozással ellentétben, igen általános feltételek mellett* *a (6) határérték a μ' mérték választásától függetlenül a $\Phi(x)$ normális eloszlásfüggvénnyel egyenlő.* Ez a tétel tehát nem-független valószínűségi változók összegeire általánosítja a valószínűségszámítás centrális határértéktételét; a nem-független valószínűségi változók bizonyos osztályára a centrális határértéktételeket elsőnek *Bernstein* terjesztette ki.[3]

Tételünk és *Bernstein* eredményei kapcsolatának megvizsgálására más alkalommal térünk ki. Hogy a fentemlített tételt pontosan megfogalmazhassuk, egy új fogalmat kell bevezetnünk, a maximális sorozatok fogalmát. Tegyük fel, hogy a ξ_n változók mindegyike csak véges sok különböző értéket vesz fel, mégpedig legyen $\xi_n = \xi_n(a) = x_{nk}$ ha $a \in A_{nk}$ $(k = 1, 2, \ldots h_n)$. A valószínűségi változók $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots$ sorozatát maximálisnak nevezzük, ha az $\{A_{nk}\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots; k = 1, 2, \ldots h_n)$ halmazrendszer a μ mértékre vonatkozólag bázist alkot a H alaphalmazon; ezzel teljesen ekvivalens a következő definició: a $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots$ valószínűségi változók sorozatát akkor nevezzük maximálisnak, ha abból, hogy $\xi_n(a) = \xi_n(b)$ n minden pozitiv egész értékére, $a = b$ következik. Ha például a H alaphalmaz az $a = (a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots)$ valós számsorozatok összesége, és a ξ_n valószínűségi változót úgy definiáljuk, hogy $\xi_n(a) = a_n$ (1. pl. *Kolmogorov* idézett munkáját 25. o.), akkor ez a $\{\xi_n\}$ sorozat maximális.

Ezek után megfogalmazhatjuk eredményünket:

Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots$ valószínűségi változók függetlenek, tegyük fel, hogy minden ξ_n csak véges sok különböző értéket vesz fel, továbbá, hogy $\{\xi_n\}$ maximális sorozat. Legyen $M(\xi_n) = 0$ és $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} M(\xi_k^2)$, továbbá

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{B_n};$$

tegyük fel, hogy $B_n \to \infty$, és hogy ha $A_n(x)$ jelenti a $\zeta_n < x$ eseményt, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n(x)) = \Phi(x). \tag{7}$$

Ha a μ' mérték a μ mértékre nézve abszolút folytonos, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mu'(A_n(x) = \Phi(x) \tag{8a}$$

is fennáll.

A fenti tétel bizonyítására nem térek ki részletesen, csak annyit említek meg, hogy a következő segédtételen alapszik: Ha A tetszőleges esemény és

* Időközben A. N. *Kolmogorov* az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadásában eredményeimet messzemenően általánosította (Megjegyzés a korrekturánál).

(7) érvényes, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A\cdot A_n(x))=\mu(A)\cdot\Phi(x) \tag{8b}$$

(feltehetjük, hogy $\mu(A)>0$ hiszen ha $\mu(A)=0$, az állítás triviális).

Az ergodikus elméletben az olyan T transzformációt, amelyre fennáll, hogy tetszőleges A és B mérhető halmazokra

$$\lim_{n\to\infty}[\mu(T^n A\cdot B)-\mu(A)\mu(B)]=0 \tag{9}$$

erősen keverőnek nevezik. Ezen elnevezés mintájára nevezzük a mérhető halmazok egy A_n sorozatát általában erősen keverőnek, ha $\mu(A_n)>\alpha>0$ és minden B mérhető halmazra

$$\lim_{n\to\infty}[\mu(A_n B)-\mu(A_n)\mu(B)]=0 \tag{10}$$

fennáll; ezen definició alapján az említett segédtételt úgy is fogalmazhatjuk, hogy az $A_n(x)$ halmazok sorozata x minden értékére erősen keverő. Ennek a segédtételnek egy másik, talán még meglepőbb fogalmazása a következő: a ζ_n változók sorozata határértékben tetszőleges η valószínűségi változótól független; ezt úgy láthatjuk be, hogy (8)-ban A helyébe helyettesítjük az $\eta<y$ eseményt.

Hogy egy konkrét példát említsünk, legyen H a (0, 1) intervallum, μ a közönséges Lebesgue-mérték és $\xi_n(t)=\operatorname{sg}\sin 2^n\pi t$ az n-ik *Rademacher* függvény. Ebben az esetben $B_n=\sqrt{n}$, és a tétel összes feltételei teljesülnek, mert hiszen ismeretes, hogy

$$t=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n(t)}{2^{n+1}}, \tag{11}$$

és így ha $\xi_n(t_1)=\xi_n(t_2)$ $(n=1,2,\ldots)$, akkor $t_1=t_2$. Ebben az esetben tehát tételünk azt mondja ki, hogy ha $A_n(x)$ a (0, 1) intervallum azon t pontjainak halmazát jelenti, amelyekre

$$\frac{\xi_1(t)+\xi_2(t)+\cdots+\xi_n(t)}{\sqrt{n}}<x, \tag{12}$$

(másszóval azon t valós számok összesége, amelyek diadikus kifejtésében az első n jegy között a nullák és egyesek számának különbsége kisebb, mint $x\sqrt{n}$), akkor ha $\mu(A)$ tetszőleges abszolút folytonos mérték, azaz

$$\mu(A)=\int_A\lambda(t)\,dt \tag{13}$$

ahol a $\lambda(t)$ nemnegativ függvény *Lebesgue* szerint mérhető és

$$\int_0^1\lambda(t)\,dt=1, \tag{14}$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n(x)) = \Phi(x). \tag{15}$$

Hogy még jobban konkretizáljuk tételünk állítását, legyen (13)-ban $\lambda(t) = \frac{1}{r} t^{\frac{1}{r}-1}$ ahol $r > 0$, akkor *azon t valós számok halmazának mértéke, amelyek r-ik hatványát a diadikus számrendszerbe kifejtve az első n jegy között a nullák és egyesek számának különbsége* $< x\sqrt{n}$, *konvergál* $\Phi(x)$*-hez, ha* $n\to\infty$.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] *A. N. Kolmogoroff:* Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin, 1933

[2] В. А. Рохлин: Об основных понятиях теории меры. Математический Сборник *25* (67): 1 (1949), стр 107—150.

[3] *S. Bernstein,* Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes des quantités dependantes, Math. Ann. *97* (1928) 1—59.