ÚJ EREDMÉNYEK A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS TERÉN

RÉNYI ALFRÉD lev. tag

Előadta a Matematikai Állandó Bizottság 1951 december 14-én tartott ülésén

A valószínűségszámítás a felszabadulás előtt hazánkban meglehetősen elhanyagolt ága volt a matematikának. *Jordán Károly* értékes és jelentős munkásságot végzett e téren, amelyről e héten a Bolyai János Matematikai Társulat *Jordán Károly* 80. születésnapja alkalmával tartott ünnepi ülésén volt alkalmam beszámolni.[1] Azonban a magyar matematikusok többsége nem igen érdeklődött a valószínűségszámítás iránt. Ennek főbb okai a következők voltak: a valószínűségszámítás terén élenjáró szovjet tudomány eredményei nem voltak kellőképpen ismeretesek hazánkban; hiányzott a matematika gyakorlati alkalmazásai iránti mélyebb érdeklődés, ami a valószínűségszámitási kutatás egyik legfontosabb éltető eleme; végül pedig a magyar matematikusok nem ismerték a dialektikus materializmust, ami a valószínűségszámítás elvi kérdéseiben való helyes tájékozódás előfeltétele. Ez utóbbi hiány különösen azért éreztette hatását, mert éppen erre az időre — a felszabadulás előtti évtizedekre — esik a valószínűségszámítás megalapozása körüli kérdések tisztázása és az egymással ellentétes és egymással éles harcban álló felfogások helyes értékelése csak a dialektikus materializmus alapján lehetséges. A valószínűségszámítás alapjai körüli viták ismertetésére itt nem térhetek ki[2], csak megemlítem, hogy a valószínűségszámítás szabatos matematikai elméletének megalkotása és a valószínűségszámítással kapcsolatos alapvető ismeretelméleti kérdések tisztázása szovjet matematikusok és elsősorban *A. N. Kolmogorov* érdeme.

A felszabadulás után rövidesen elhárultak a fentemlített akadályok a valószínűségszámítás fejlődése elől hazánkban és megnyílt a fejlődés lehetősége ezen a vonalon is. Ugyanakkor egyre nagyobb mértékben nyilvánult meg a szükséglet a természettudományok, különösen a fizika és technika számos ága részéről a valószínűségszámítás fejlesztése iránt. Ma már elmondhatjuk, hogy a szovjet matematikusok munkásságára támaszkodva és az ő személyes segítségükkel lényegében behoztuk lemaradásunkat ezen a vonalon és a valószínűségszámítás terén hazánkban a tudományos kutatás egyre intenzívebb és már számos eredményt tud felmutatni. Az elméleti kutatásokkal párhuzamosan és azok eredményeire támaszkodva a valószínűségszámítás módszerei egyre szélesebb területen kerülnek gyakorlati alkalmazásra. A valószínűségszámítási kutatások további fejlődése szempontjából nagy jelentősége van, hogy ma már a valószínűségszámítás az egyetemi matematika-oktatás szerves részévé vált. A magyar matematikusok felismerték, hogy a valószínűségszámítás elemeinek az ismerete a matematikai műveltség fontos alkotóeleme. Különösen ki kell emelni azt az egyre fokozódó érdeklődést, amely a fiatal matematikus generációnál a valószínűségszámítás iránt tapasztalható és ami a további fejlődés biztosítéka. A valószínűségszámítás további fejlődése szempontjából már igen érezhető egy magyar nyelvű korszerű tankönyv hiánya. Ezt a hiányt igyekszik előadó most készülő tankönyvével pótolni.

A valószínűségszámítás terén az elmult évben elért eredményeket három csoportra oszthatjuk, a következőképpen: *A)* elméleti eredmények, *B)* a matematikai statisztika körébe vágó eredmények, *C)* a valószínűségszámítás egyéb természettudományi és technikai alkalmazásaira vonatkozó eredmények.

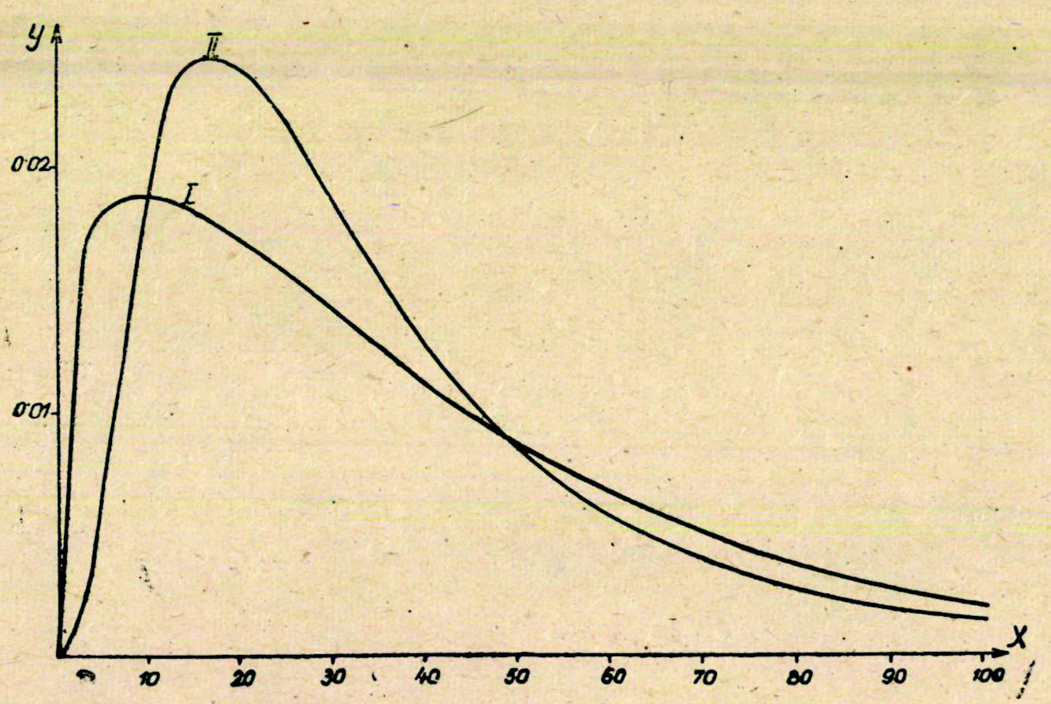
Az első csoportba tartozó eredmények egy nagy része a III. Osztály Osztályközleményeinek sajtó alatt lévő számában fog magyar nyelven megjelenni, ezért ezen eredmények részletes ismertetésére nem térek ki, inkább csak az eredmények felsorolására szorítkozom. A valószínűségszámítás terén ma világszerte az alapok tisztázása után a sztochasztikus folyamatok elméletének fejlesztése áll az érdeklődés előterében. Egy összefüggő és viszonylag teljes elmélet kialakítása a soronkövetkező feladat. Ez irányban előrehaladást jelentett a diszkrét és additiv Markov-féle folyamatok elméletének kidolgozása, amelyet az összetett Poisson-féle eloszlások fogalmának bevezetésével és tulajdonságainak tisztázásával *Jánossy Lajos, Aczél János* és az előadó egy közös dolgozatukban[3] kezdtek meg és amelyet előadó három másik dolgozatban[4, 5, 6] folytatott. Az összetett Poisson eloszlások elméletének kiépítésénél említett szerzők felhasználták *A. N. Kolmogorovnak* egy értékes útmutatását. Az elmélet felépítése lényegében befejezettnek tekinthető és már eddig is igen sokirányú gyakorlati alkalmazás lehetősége merült fel (rádióaktív bomlás, telefonhálózatok terhelési problémái, ötvözetek fajsúlyának lokális ingadozásai, elektronemisszió, stb.), azonban a gyakorlati alkalmazások köre távolról sincsen kimerítve. A Markov-láncok elméletére vonatkozik *Jánossy Lajos* egy új gondolatokat felvető munkája[7], amelyben a Laplace-féle transzformáció helyett más, általánosabb transzformáltakat vizsgál, amelyek az illető Markov-lánc sajátságaihoz vannak szabva. *Takács Lajos* dolgozata[8] bekövetkezési és koincidencia-jelenségek elméletét tárgyalja, általános feltevések mellett és eredményeit több konkrét esetre alkalmazza, *Gyires Béla* egy dolgozata[9] egész értékű valószínűségi változók esetében a centrális határértéktételt a részletösszegek mod n eloszlására terjeszti ki: eredményei kapcsolatban állnak a Poincarétől származó „méthode des fonctions arbitraires" néven ismeretes módszerrel. Végül megemlítem előadónak a független függvényekre vonatkozó vizsgálatait, amelyeket akadémiai székfoglaló előadásával indított meg[10], melyben bebizonyította, hogy a valószínűségszámítás centrális határértéktétele az alapul vett valószínűségi mérték abszolút folytonos transzformációjánál érvényben marad, amely eredményét *A. N. Kolmogorov* az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadásában messzemenően általánosította és továbbfejlesztette; előadó ezen vizsgálatainak folytatását képezi az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadása [11], amelyben *H. Steinhaus* egy független függvényekre vonatkozó sejtését bizonyította be bizonyos kiegészítő feltevések mellett. Egy újabb dolgozatában [12] előadó kimutatta, hogy *Steinhaus* sejtése általánosságban nem érvényes, ugyanakkor a [10, 11]-ben szereplő feltételeknél lényegesen kevesebbet kívánó mellékfeltételek mellett mutatta ki a sejtés érvényességét. Ezeknek a vizsgálatoknak a folytatását képezi előadó és *Pukánszky Lajos* közös dolgozata [13], amely tárgyát illetőleg már a valós függvénytan területére tartozik és amelyről *Szőkefalvi Nagy Béla* tett említést beszámolójában. Ezt az eredményt itt csak azért említem, mert újabb példája annak, hogy a a valószínűségszámítási kutatások ösztönzést adhatnak a matematika más ágainak is. A [10] dolgozattal megindított új kutatási irányba vágó további eredményekről remélem a közeljövőben alkalmam lesz beszámolni. Most csak azt említem meg, hogy ezen az úton lehetségesnek látszik a valószínűségszámítás független valószínűségi változókra vonatkozó alapvető tételeinek gyengén függő változók esetére való kiterjesztése, aminek úgy elméletileg, mint pedig a gyakorlati alkalmazások szempontjából nagy jelentősége van.

Áttérek most a matematikai statisztika körébe vágó eredmények ismertetésére. A matematikai statisztika ma fejlődésének olyan stádiumába került, amikor az eddig alkalmazott módszerek fokozottabb kritikai felülvizsgálata, ugyanakkor pedig teljesen új alapokon nyugvó módszerek kidolgozása van napirenden. Az angol-amerikai matematikai statisztikai iskola, amelynek alapítója és vezetője *R. A. Fischer*, válságba jutott. Ez az iskola a *Bayes*-féle módszer kritikájának jelszavával indult, azonban ezt a módszert nem sikerült jobb és megbízhatóbb módszerrel helyettesíteni, amint ezt *Sz. N. Bernstein* már 1936-ban kimutatta és amire nemrégiben *H. Oderfeld* és *H. Steinhaus* is világosan rámutattak egy konkrét minőségellenőrzési problémával kapcsolatban. A „fiducial probability" (valószerűség) homályos fogalma, amit *Fischer* a Bayes-módszer helyettesítésére javasol, csak arra jó, hogy elleplezze, hogy *Fischer* és tanítványai nem voltak képesek a Bayes-módszert semmi mással pótolni. Ugyanakkor rá kell mutatni, hogy a nyugati statisztikában az úgynevezett „paraméteres" irányzat uralkodik, amely a gyakorlatban igen durva hibák forrásává válhat, ha azt kritikátlanul és alkalmazhatóságának előzetes gondos vizsgálata nélkül használják fel. Ennek az előzetes vizsgálatnak a szükségességére azonban a nyugati statisztikai irodalom egyáltalán nem fordít gondot, sőt, éppen azzal jellemezhető, hogy ezeket a kérdéseket szinte teljesen elhanyagolja. Ennek nyilvánvalóan társadalmi és ideológiai okai vannak. Az alkalmazhatóság kérdésének alapos tisztázása ugyanis lehetetlenné tenné a matematikai statisztika módszereivel való visszaéléseket, amelyek a burzsoá közgazdaságtanban és biológiában burjánoznak.

Az angol-amerikai statisztikai iskola irodalmát tehát fenntartással kell olvasnunk és alapos kritikával és óvatossággal kell kihámoznunk belőle azt, ami valóban értékes. Ugyanakkor a matematikai statisztika terén az elmult évtizedben a Szovjetunióban egy új iskola alakult ki, amely a matematikai statisztika további egészséges fejlődésére nézve irányt mutat. A szovjetunióbeli matematikai statisztikai kutatásokat a következő alapvető vonások jellemzik, amelyek egyben szembeállítják az angol-amerikai iskolával: 1. az elmélet alkalmazhatósági határainak lelkiismeretes és alapos vizsgálata a dialektikus materializmus alapján, 2. a matematikai szabatosság követelményének állandó szem előtt tartása (ezzel szemben áll a nyugati irodalom szembetűnő „közömbössége" a matematikai precizitással szemben), 3. a „nem-paraméteres" problémák és módszerek előnyben részesítése abból a célból, hogy az elmélet gyakorlati alkalmazásait függetlenítse ellenőrizhetetlen és gyakran egyenesen téves hipotézisektől.

A hazai matematikai statisztikai kutatások teljes mértékben a szovjet matematikai statisztikai iskolához csatlakoznak, beleértve a nyugati irányzatok fokozottabb kritikájára való törekvést is. Ez megnyilvánul az Alkalmazott Matematikai Intézet valószínűségszámítási és matematikai statisztikai osztályának mindennapi munkájában, melynek során a konkrét gyakorlati problémák megoldásánál igen jó eredménnyel alkalmaztuk állandóan a szovjet iskola eredményeit, így például a *Kolmogorov—Szmirnov*-féle próbát. Hasonlóképpen szovjet kutatásokhoz csatlakozik előadónak a kőtörmelék szemmegoszlására vonatkozó dolgozata [14], amelyben *Kolmogorov* hasonló tárgyú munkájához csatlakozva kimutatja a logaritmikus normális eloszlás érvényességét. Ennek a problémának a kőbányaiparban van gyakorlati jelentősége, így például lehetővé teszi a különböző előírt finomságra való aprításhoz szükséges energia kiszámítását. A kapott elméleti eredményeket az Alkalmazott Matematikai Intézet összehasonlította a megfigyelésekkel és igen jó egyezést kapott. Ugyanakkor meg kell állapítani, hogy *Beke Béla* megállapításai [15], aki azt állítja, hogy a logaritmikus normális eloszlás és a gyakorlatban eddig alkalmazott, minden elméleti alapot nélkülöző empirikus *Rosin—Rammler*-féle eloszlás között az eltérés gyakorlatilag lényegtelen, minden alapot nélkülöznek. Egy konkrét esetben a két eloszlás sűrűségfüggvényeinek eltérését az 1. ábra mutatja. A matematikai statisztika módszereinek alkalmazásánál szükséges körültekintésre mutatott rá előadó egy, az Orvosi Hetilapban megjelent [16], két kutató csoport között hőmunkának a munkás szervezetére gyakorolt hatására vonatkozó megfigyelések kiértékelésével kapcsolatban kialakult vitájához való hozzászólásában, az úgynevezett „szignifikáns differencia" módszerének alkalmazhatóságát illetően.

A matematikai statisztikával kapcsolatban a nyugati irodalomban el van terjedve az a nézet, hogy a matematikai statisztika a valószínűségszámítás ismerete nélkül is elsajátítható és eredményesen alkalmazható. Ez a nézet alapjában helytelen és rendkívül veszélyes. Arról van szó, hogy a valószínűségszámítás ismerete nélkül a matematikai statisztika módszerei receptekké válnak és semmi biztosítéka nincs annak, hogy ezeket a recepteket helyesen és a megfelelő helyen használják-e fel. A matematikai statisztika módszereinek alkalmazhatósági határait csak az ismerheti fel helyesen, aki tisztában van ezeknek a módszereknek az elméleti alapjával, tehát a valószínűségszámítással. A helyzetet a következő hasonlat világítja meg: a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika viszonya hasonlít az orvostudomány és a gyógyszertan viszonyára és a matematikai statisztika módszereinek a valószínűségszámítás ismerete nélküli alkalmazása ahhoz hasonlítható, mint ha valaki egy ismeretlen betegség esetén közvetlenül gyógyszerészhez fordul, ahelyett, hogy először egy orvossal megvizsgáltatná magát. A hasonlat még abban a vonatkozásban is megállja a helyét, hogy ugyanúgy, amint a legjobb gyógyszer is súlyos kárt okozhat a szervezetben, ha nem az orvosi előírásoknak megfelelő mennyiségben és módon alkalmazzák, hasonlóképpen a legmegbízhatóbb matematikai módszernek is megvannak az alkalmazhatósági határai és a helytelen alkalmazás súlyos hibák forrása lehet.



1. ábra

Mielőtt az eredmények harmadik csoportjára rátérnénk, egy konkrét kérdésről szeretnék részletesebben beszélni, amely elvi szempontból is igen érdekes és példa arra, hogy egy statisztikai módszernél milyen körültekintően kell megvizsgálni az alkalmazhatóság feltételeit. *Bodó Zalán* egy nemrég megjelent dolgozatában[17] egy új módszert közöl, fluoreszcens porok szemcsemegoszlásának kísérleti meghatározására. Ez a módszer abban áll, hogy a mikroszkóp különböző beállításai mellett különböző látómezőkben megvizsgálja a megadott nagyság-csoportokba tartozó szemcsék *számarányát* és ebből határozza meg a teljes eloszlást. A módszer igen érdekes, mert sok munka megtakarítását teszi lehetővé, de természetesen a pontosság terén tett bizonyos engedmények árán; éppen ezért érdemes a módszer alkalmazhatósági határainak kérdését alaposabban megvizsgálni. Nem fogom itt részletesen ismertetni *Bodó Zalán* módszerét, hanem azt rögtön egy urna-modellre vonatkozó átfogalmazásban mutatom be, ami a kérdés matematikai lényegét tartalmazza.

Matematikailag *Bodó Zalán* módszere a következő eljárással jellemezhető: egy urnában N golyó van, ezek közül Np piros, Nq fehér és Nr kék golyó $(p+q+r=1)$; visszatevéssel egy n elemű mintát veszünk; jelentsék x, y és z a mintában lévő piros, fehér és kék golyók számát $(x+y+z=n)$. *Bodó* módszere azzal jellemezhető, hogy a $\frac{p}{q}$ hányadost az $\frac{x}{y}$ tapasztalati értékkel becsüli meg, feltéve, hogy olyan mintáról van szó, amelyben $y>0$, azaz amely tartalmaz legalább egy fehér golyót; amennyiben a minta nem ilyen, úgy azt nem veszi figyelembe. (Ez a feltétel elengedhetetlen, hiszen egyébként az $\frac{x}{y}$ hányadosról nem beszélhetünk.) Vizsgáljuk meg először, hogy ez a becslés *torzítatlan-e,* másszóval vizsgáljuk meg az $\frac{x}{y}$ valószínűségi változó feltételes várható értékét az $y>0$ feltétel mellett, amelyet $M_n(p, q)$-val jelölünk és nézzük meg, hogy ez megegyezik-e $\frac{p}{q}$-val. (Mint ismeretes, egy statisztikai becslést akkor neveznek torzítatlannak, ha várható értéke egyenlő a megbecsülendő mennyiséggel). Egyszerű számolással adódik, hogy

$$M_n(p, q)=\frac{np}{1-(1-q)^n}\sum_{r=0}^{n-2}(1-q)^r\,\frac{1-(1-q)^{n-r-1}}{n-r-1} \tag{1}$$

tehát — amint ez várható volt — a becslés nem torzítatlan. Vizsgáljuk meg $M_n(p, q)$ határértékét ha $n\to\infty$, p és q állandóak. Egyszerűen belátható, hogy ebben az esetben

$$M_\infty=\lim_{n\to\infty} M_n(p, q)=\frac{p}{q} \tag{2}$$

azaz a becslés határértékben torzítatlan. A konvergencia sebessége is megbecsülhető:

$$M_n(p, q)-\frac{p}{q}=O((1-q)^{\frac{n}{2}}\,n\log n)+O\left(\frac{1}{nq^2}\right) \tag{3}$$

Tegyük most fel, hogy ugyanakkor, amikor $n\to\infty$, p és q is változnak, mégpedig úgy, hogy mindkettő 0-hoz konvergál, olymódon, hogy hányadosuk egy határértékhez közeledik: pontosabban tegyük fel, hogy $np\to\mu$ és $nq\to\lambda$ akkor a várakozással ellentétben $\lim_{n\to\infty} M_n(p, q)$ nem egyenlő $\frac{p}{q}$-val, hanem ehelyett a következő határértékkel bir:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ np\to\mu\\ nq\to\lambda}} M_n(p,q) = \frac{\mu}{e^{\lambda}-1}\int_0^{\lambda}\frac{e^x-1}{x}\,dx. \tag{4}$$

Ha λ nagy, úgy (4) jobboldala közelítőleg $\frac{\mu}{e^{\lambda}}Li(\lambda)$-val egyenlő, ahol $Li(x)=\int_1^x\frac{du}{\ln u}$ a törzsszámelméletből jól ismert integrállogaritmus; mivel aszimptotikusan $Li(x)\approx\frac{x}{\ln x}$, tehát ha $\lambda\to\infty$, úgy (4) jobboldala aszimptotikusan $\frac{\mu}{\lambda}$-val egyenlő. Ha azonban $\lambda\to 0$ és μ állandó, úgy (4) jobboldalának határértéke μ, míg ez esetben $\frac{\mu}{\lambda}\to\infty$.

Ez mutatja, hogy ennek a becslésnek az alkalmazásánál körültekintéssel kell eljárnunk: adott p, q és n értékek mellett meg kell becsülni az

$$M_n(p,q)-\frac{p}{q}$$

különbséget és csak ha ez kicsiny, $\frac{p}{q}$-hoz képest, akkor fogadhatjuk el az $\frac{x}{y}$ becslést (illetőleg az ezzel a becslési eljárással kapott értékek középértékét) megbízhatónak. Ehhez azonban hozzá kell tennünk a módszer „mentségére", hogy ugyanez a hibája minden más elképzelhető becslésnek is megvan; könnyű belátni ugyanis, hogy az x, y értékekből $\frac{p}{q}$-ra torzítatlan becslést megadni egyáltalán nem lehetséges. Legyen ugyanis $F(x, y)$ egy tetszőleges függvénye x-nek és y-nak; ha $F(x, y)$ a $\frac{p}{q}$ hányados torzítatlan becslése volna, úgy fennállna az

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}F(k,l)\,V(x=k;\,y=l)=\frac{p}{q} \tag{5}$$

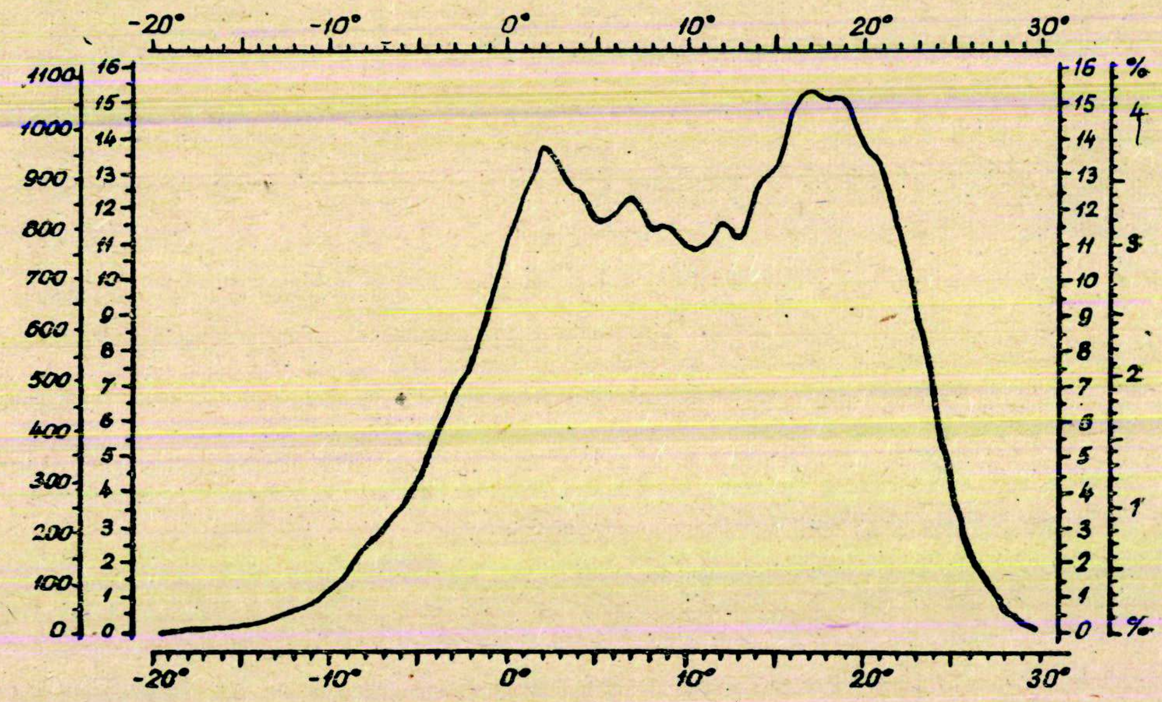
reláció, mégpedig p-ben és q-ban identikusan; ez azonban lehetetlen, hiszen ha $q\to 0$, úgy (5) jobboldala végtelenhez tart, míg a baloldal korlátos marad (ugyanez a helyzet, ha feltételes várható értékkel számolunk $y>0$ feltétel mellett). Ilyenmódon minden gyakorlati problémában p, q és n nagyságához szabott eljárást kell alkalmazni és nem létezik olyan univerzális „jó" módszer, amely minden körülmények között alkalmazható. A kérdésre más alkalommal még vissza fogok térni.

Még csak azt jegyzem meg, hogy a fluoreszcens porok szemmegoszlása jó egyezést mutat a logaritmikus normális eloszlás törvényével.

Áttérek ezek után az eredmények harmadik csoportjára: a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika természettudományi és technikai alkalmazásaira. Ami a fizikát illeti, első helyen *Jánossy Lajosnak* a láncreakciókra vonatkozó dolgozatát[18] kell megemlíteni.

Ennek a dolgozatnak az érdekességét elsősorban az adja meg, hogy a numerikus számolás szükségletei vezették *Jánossyt* a függvényiteráció fogalmának folytonos paraméter esetére való általánosítására. Ennek lehetősége már a mult század végén felmerült, a kérdés azonban azóta éppen alkalmazások hiányában feledésbe merült. Az alkalmazások jelentőségére és a kérdés elméleti érdekességére való tekintettel indokoltnak látszik ebben az irányban folytatni a kutatásokat. Ezzel kapcsolatban előadó is ért el bizonyos részleteredményeket, azonban erről más alkalommal számol be.

Megemlítem itt *Fényes Imre* kísérletét a kvantummechanika új felépítésére a valószínűségszámítás segítségével. Elméletének lényege, hogy a Schrödinger-egyenletet a sztochasztikus folyamatok *Kolmogorov*-féle egyenleteiből igyekszik levezetni; *Fényes* kísérlete élénk vitát váltott ki, ami még nincs lezárva és így korai volna értékelést adni, azonban a kísérlet figyelemre méltó.



2. ábra

Részletesebben szeretnék beszámolni a valószínűségszámítás egy meteorológiai alkalmazásáról a napi középhőmérséklet eloszlásfüggvényének elméleti meghatározására vonatkozólag, mely kérdéssel nemrégiben foglalkoztam. Budapest napi középhőmérsékleteit az év minden napjára 70 év (1871—1940) adatai alapján *Takács Lajos* vizsgálta meg[19] és megállapította, hogy felrajzolva a napi középhőmérséklet gyakorisági görbéjét, egy-két maximummal biró (bimodális) görbét kapunk (2. ábra). Takács igen helyesen állapítja meg, hogy a két maximum nem véletlenül mutatkozik, hanem meteorológiai jelentésük van: a két maximum a téli és nyári félév átlagos hőmérsékletének felel meg. Takács azonban — megegyezőleg *Castrillon, Springstubbe* és mások véleményével — az említett gyakorisági görbét (helyesebben valószínűségi sűrűségfüggvényt) két Gauss-féle gyakorisági görbe (sűrűségfüggvény) összegeként próbálja előállítani. Azonban egy egyszerű valószínűségszámítási meggondolással beláthatjuk, hogy ez elméletileg nem indokolt és a szóbanforgó sűrűségfüggvényt nem két, hanem igen nagyszámú Gauss-féle sűrűségfüggvény összegeként, vagy még inkább Gauss-féle sűrűségfüggvények súlyfüggvénnyel vett integrálközépértékeként kell felfognunk. Ugyanis az a feltevés, hogy a napi középhőmérséklet eloszlásának sűrűségfüggvénye két Gauss-féle sűrűségfüggvény összegére bontható, annak a feltevésnek felelne meg, hogy az év két élesen elkülönülő — nyári és téli — félévre osztható, olymódon, hogy a napi középhőmérséklet mindkét félévben egyforma eloszlással ingadozik ugyanazon nyári, ill. téli középérték körül. Nyilvánvaló, hogy ez a felfogás csak első és igen durva közelítésnek tekinthető és sokkal helyesebb képet kapunk a napi középhőmérséklet eloszlásáról, ha az évet négy évszakra osztva a szóbanforgó gyakorisági görbét négy Gauss-féle görbéből építjük fel; de még pontosabb képet kapunk, ha az egyes hónapoknak megfelelően 12 Gauss-féle görbéből próbáljuk az évi középhőmérséklet gyakorisági görbéjét előállítani; ezt a felbontást tovább folytatva még pontosabb és reálisabb modelljét kapjuk a tényleges hőmérsékletingadozásoknak. Matematikailag a problémát a következőképpen fogalmazhatjuk meg: az évet bontsuk fel n egyenlő hosszú szakaszra és a k-ik szakasz j-ik napjának napi középhőmérsékletét fogjuk fel két tag, mégpedig az illető szakaszra jellemző átlagos középhőmérséklet és az attól való véletlen eltérés összegeként: a k-ik szakaszon az átlagos napi középhőmérséklet legyen x_k, akkor az év k-ik szakaszának j-ik napjának középhőmérsékletét ζ_{kj}-vel jelölve

$$\zeta_{kj} = x_k + \eta_{kj},$$

ahol η_{kj} az x_k-tól a k-ik szakasz j-ik napján tapasztalt véletlen eltérést jelöli. Indokoltnak látszik feltenni, hogy az η_{kj} változók függetlenek és normális eloszlásúak, 0 középértékkel és σ_{kj} szórással. Feltesszük, hogy az év k-ik szakaszán σ_{kj} állandó, azaz csak k-tól függ: jelöljük értékét σ_k-val. Jelentse ζ egy találomra kiválasztott nap középhőmérsékletét, úgy

$$\zeta = \xi + \eta, \tag{6}$$

ahol a ξ valószínűségi változó rendre $\frac{1}{n}$ valószínűséggel veszi fel az $x_1, x_2, \dots x_n$ értékeket és az η valószínűségi változó $\xi = x_k$ esetében normális eloszlású 0 középértékkel és σ_k szórással. Ez esetben egyszerű valószínűségszámítási meggondolással következik, hogy ζ valószínűségi sűrűségfüggvénye

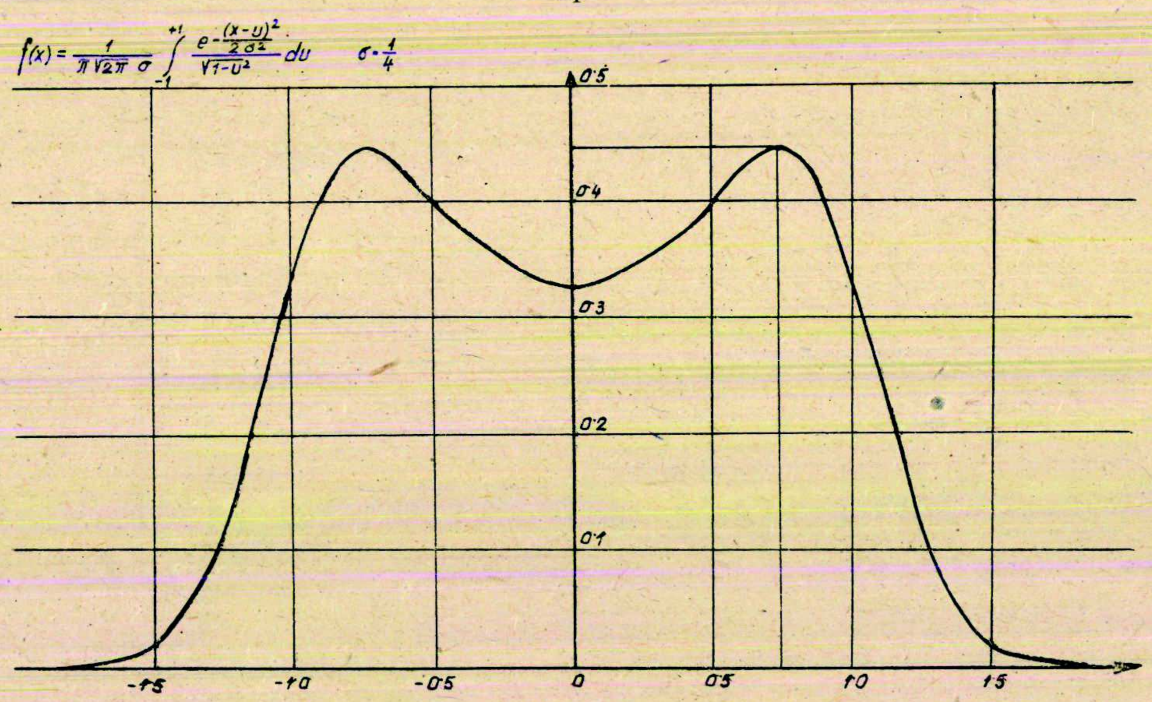
$$\frac{1}{n\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_k} e^{-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma_k^2}}. \tag{7}$$

Ha az x_k értéket mint egy $x=x(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ függvény értékét, a σ_k értéket pedig mint a $\sigma=\sigma(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ függvény értékét fogjuk fel a $t=\frac{k}{n}$ helyen, úgy a (7) összeg felfogható az

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 \frac{1}{\sigma(t)}\, e^{-\frac{(x-x(t))^2}{2\sigma^2(t)}}\, dt \tag{8}$$

integrál Riemann-féle közelítő összegének; ilyenmódon tehát a napi középhőmérséklet gyakorisági görbéjének egyenletét a (8) alakban indokolt keresni. Az $x=x(t)$ függvény nyilvánvalóan a napi középhőmérséklet szempontjából vizsgált földrajzi helytől függ; hogy valamilyen képet kapjunk az $y=f(x)$ görbe menetéről, tegyük fel, hogy $\sigma(t) \equiv \sigma$ állandó és $x(t)=a+b\cos 2\pi t$, ebben az esetben a szóbanforgó sűrűségfüggvény:

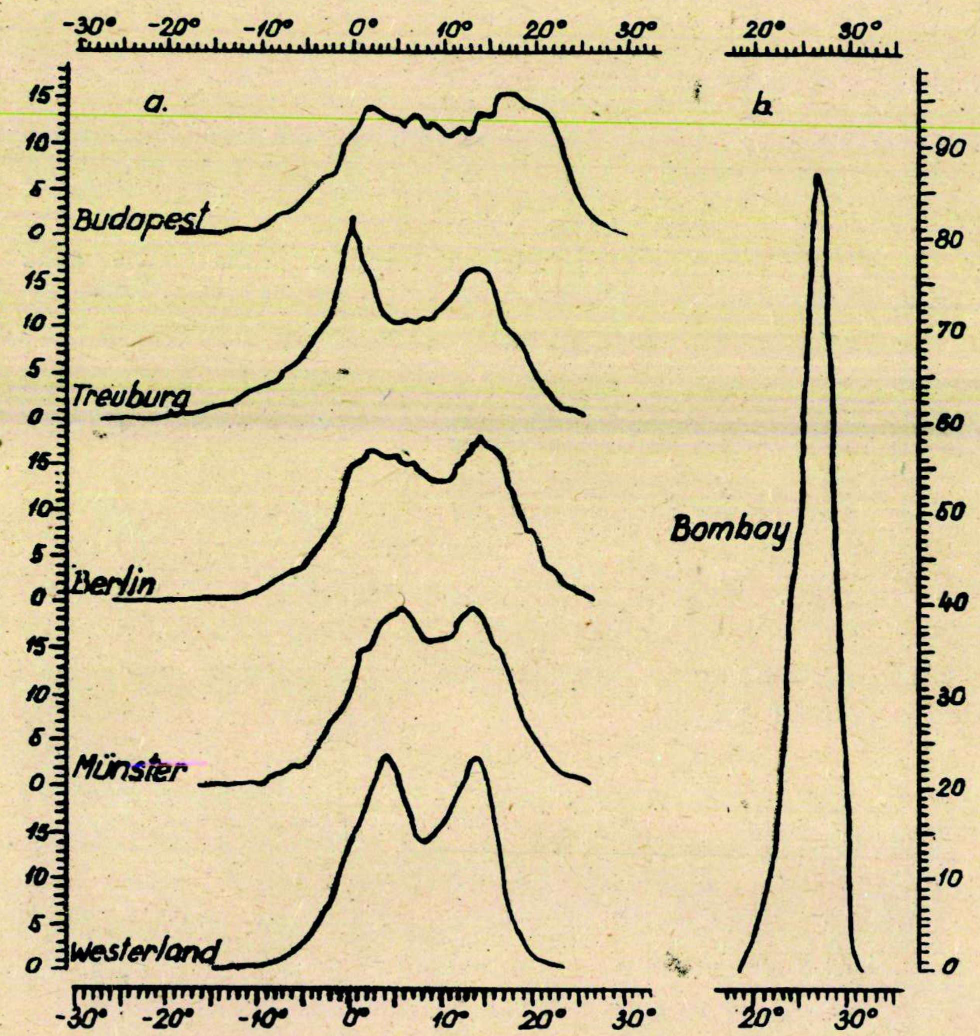
$$f(x)=\frac{1}{\pi\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{+1} \frac{e^{-\frac{(x-a-bu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{1-u^2}}\, du, \tag{9}$$



3. ábra

amelynek menetét a 3. ábra mutatja. Megjegyzendő, hogy a föld tetszőleges pontjának megfelelő $x(t)$ függvény meghatározható olymódon, hogy kiszámítjuk minden egyes napra a napi középhőmérséklet *sokévi átlagát*. Hasonlóképpen közelítőleg megállapítható a $\sigma(t)$ függvény is. (Érdemes megjegyezni, hogy Budapesten a napi középhőmérséklet szórása télen nagyobb, mint nyáron.) A trópusokon $x(t)$ és $\sigma(t)$ első közelítésben állandónak vehetők; ebben az esetben az $f(x)$ függvény egyetlen Gauss-féle görbére redukálódik, a tapasztalatokkal megegyezően (lásd a 4. ábrán, Bombay napi középhőmérsékletének gyakorisági görbéjét). Budapesten az $x(t)$ függvény egy eltorzított sinus-hullámhoz hasonlít, amelynek a nyári félévnek megfelelő fele hosszabb és nagyobb amplitudójú. Ilyen $x(t)$-nek valóban két maximumú $f(x)$ görbe felel meg.

Ilyenmódon tehát a napi középhőmérséklet gyakorisági görbéjének alakjára vonatkozó vázolt elméleti meggondolások számot adnak a napi középhőmérséklet gyakorisági görbéjének alakjának a földrajzi helytől való függéséről.



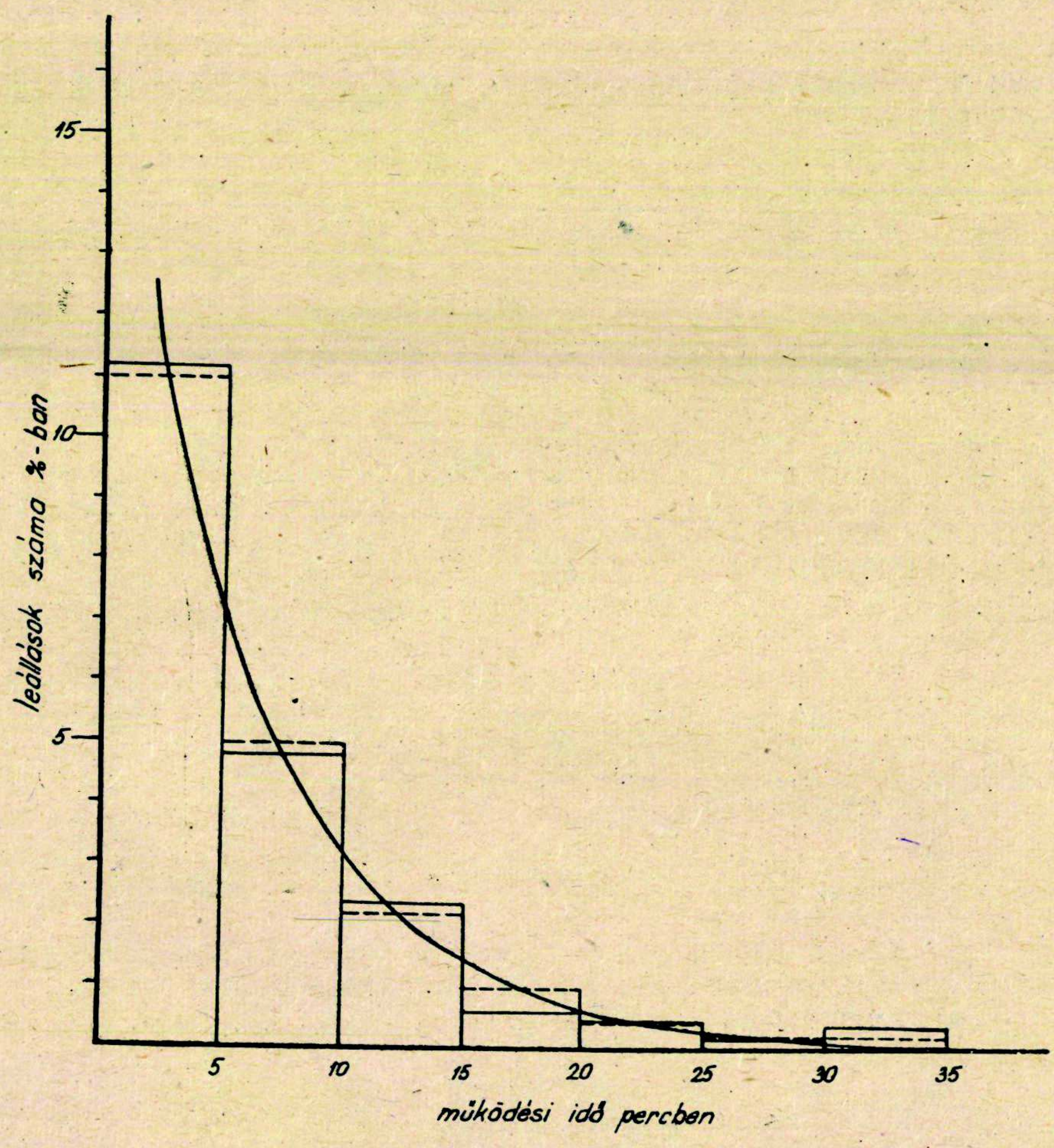
4. ábra

A fenti meggondolásokhoz egy elvi megjegyzést kívánok fűzni: a természettudományokban fellépő tapasztalati görbék képlettel definiált függvénnyel való megközelítésénél a lehetőségekhez képest arra kell törekedni, hogy a szóbanforgó természeti jelenség tényleges lefolyásának többé-kevésbbé pontos leírásán alapuló *elméleti meggondolás* eredményeképpen kapott képlettel közelítsünk és ne csupán a görbe *alakjából* kiindulva próbáljuk a tapasztalati görbét egy egyszerű alakú képlettel megközelíteni. Az ilyen eljárás célravezető voltát illusztrálják a napi középhőmérsékletre vonatkozó fenti megjegyzések.

Ami a valószínűségszámítás műszaki alkalmazásait illeti, az Alkalmazott Matematikai Intézet sok ilyen jellegű problémával foglalkozott, ezek közül csak három problémacsoportot emelek ki. Az első csoportba a minőségellenőrzés matematikai módszerei tartoznak. Az Intézet foglalkozott például a gödöllői Ganz Árammérő Gyár felkérésére automata-gépekkel gyártott csavarok gyártásánál a selejt csökkentésének kérdésével és kiszámította, hogy a futóellenőröknek milyen időközökben kell az automatagépek működését ellenőrizni, hogy a selejtszázalék egy előírt értéket ne haladjon meg. A probléma matematikai szempontból igen egyszerű, így ennek részletezésére itt nem térek ki. Matematikai szempontból is újszerű problémák merültek fel törésnek és kopásnak kitett gépalkatrészek tartalékolási és utánrendelési ütemtervének kidolgozásával kapcsolatban. Az erre vonatkozó eredményeinkről más helyütt fogunk beszámolni, azért itt ennek a kérdésnek a részletes ismertetését mellőzöm, csak annyit jegyzek meg, hogy ennek a kérdésnek igen nagy gyakorlati jelentősége van a népgazdaság szempontjából. A kérdés azért is érdekes, mert olyan problémáról van szó, amely a szocialista társadalomban egészen másképpen vetődik fel, mint a kapitalista társadalomban. Arról van szó ugyanis, hogy a tartalékolás és utánrendelés ütemtervének megállapításánál a szocialista iparban szem előtt kell tartani azt a követelményt, hogy egy üzem se tartalékoljon feleslegesen sok alkatrészt, mert a felesleges nagy tartalékot más üzemektől vonja el és így azok tervteljesítését veszélyezteti. Ugyanakkor azonban a tartaléknak elegendőnek kell lenni ahhoz, hogy a véletlen törések által szükségessé tett cserékre mindig legyen készenlétben alkatrész, illetőleg annak a valószínűsége, hogy a gép tartalékalkatrész hiányában ne tudjon termelni, gyakorlatilag elhanyagolhatóan kicsiny legyen.

Csak röviden említem meg a textilgépek optimális fordulatszámának meghatározására irányuló vizsgálatokat is[20]. A probléma a következő: egy munkás több automata szövőgépet kezel. Ha valamelyik gépen fonalszakadás történik, a gép leáll és a munkás hozzákezd az elszakadt fonal összekötözéséhez. Azonban azalatt, amíg dolgozik, újabb gépeken történhet fonalszakadás és így azok addig állnak, amíg a munkás a már előzőleg leállt gépeken el nem végzi a szükséges munkát. Tehát nemcsak a javítás, hanem a javítások alatti gépállás is okoz termeléskiesést. A fordulatszám növelésével növekszik az időegység alatti termelés, de ugyanakkor gyakoribbakká válnak a fonalszakadások, tehát a gépek többet állnak. A feladat tehát az, hogy meghatározzuk azt a fordulatszámot, amely mellett a tényleges termelés maximális. A probléma megoldásához természetesen szükséges annak kísérleti meghatározása, hogy a szakadások gyakorisága hogyan függ a fordulatszámtól. Anélkül, hogy a részletekbe belemennénk, csak azt emelem ki, hogy többszáz szakadásmentes működési idő (azaz a gép beindításától az első fonalszakadásig terjedő időtartam) hosszára vonatkozó, a Kistextben végzett üzemi adatfelvétel teljes mértékben igazolta azt a feltevést, hogy a működési idők exponenciális eloszlást követnek. Ennek oka nyilvánvalóan abban áll, hogy az, hogy egy bizonyos pillanatban történik-e fonalszakadás, kizárólag az ebben a pillanatban igénybevételnek kitett fonalszakaszok lokális szilárdsági viszonyaitól függ és így annak a valószínűsége, hogy egy bizonyos t időtartam alatt történik-e fonalszakadás, független attól, hogy a szóbanforgó időtartamot megelőzőleg a gép mennyi idő óta volt működésben. Ha tehát $F(t)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy a működési idő t-nél hosszabb, úgy fennáll az

$$F(t+s) = F(t)F(s) \tag{10}$$



5. ábra

függvényegyenlet, amiből már következik, hogy $F(t) = e^{-\lambda t}$, ahol $\lambda > 0$ állandó, azaz a működési idők exponenciális eloszlást követnek. Ezt azért emeltem ki, hogy még egy példával rámutassak a tapasztalati alapon felvett görbék elméleti értelmezésére való törekvések jelentőségére. Az 5. ábra a szakadásmentes működési idők hisztogrammját mutatja; a pontozott vonalak az elméletileg számított értékeket, míg a kihúzott vonalak a megfigyelt értékeket jelölik; látható, hogy a megegyezés igen jó. Az exponenciális eloszlás feltevése alapján az optimális fordulatszám meghatározására vonatkozó számítások egyszerűen elvégezhetők.

Úgy hiszem, a fenti néhány kiragadott példa is képet ad arról, milyen nagy jelentősége van a valószínűségszámítás alkalmazásának a műszaki gyakorlatban. A matematika ötéves tudományos tervében ennek megfelelően a valószínűségszámítás gyakorlati alkalmazásainak kérdései súlyponti kérdésként szerepelnek: arra kell törekednünk, hogy megsokszorozva erőfeszítéseinket ezeknek a problémáknak a megoldására, elősegítsük ötéves tervünk sikeres végrehajtását. *

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] Megjelenik a Matematikai Lapokban.

[2] Lásd: *Rényi Alfréd:* A szovjet matematika 30 éve I. A valószínűségszámítás megalapozásáról, Matematikai Lapok I. *1* (1939) 27—64 és II. A valószínűségszámítás új irányai u. o. I. *2* (1950) 91—137. A valószínűségszámítás elvi kérdéseinek részletesebb kifejtését előadó a közeljövőben megjelenő „Valószínűségszámítás" c. tankönyvében fogja megadni.

[3] *Jánossy L., Rényi A., Aczél J.:* Összetett Poisson eloszlásokról I. MTA. III. O. Osztályközleményei I. *2* (1951). 315—328.

[4] *Rényi A.:* A Poisson eloszlás problémaköréről. MTA. III. O. Osztályközleményei I. *1* (1951) 202—212.

[5] *A. Rényi:* On some problems concerning Poisson processes. Publicationes Mathematicae *2* (1951) 66—73.

[6] *Rényi A.:* Összetett Poisson eloszlásokról. II. MTA. III. O. Osztályközleményei. I. *2* (1951), 329—341.

[7] *Jánossy L.:* A Laplace-transzformáció általánosítása a valószínűségszámításban. MTA. III. O. Osztályközleménye. I. *2* (1951), 343—350.

[8] *Takács Lajos:* Bekövetkezési és koincidencia jelenségek tárgyalása időtartamban tetszőleges eloszlású történések esetén. MTA. III. Osztályközlemények I. *2* (1951).

[9] *Gyires B.:* Valószínűségeloszlások egy határértékfeladata. I. Magyar Matematikai Kongresszus közl. (sajtó alatt).

[10] *Rényi A.:* A valószínűségszámítás központi határértéktételének egy új általánosításáról. MTA. III. O. Osztályközleményei I. *2* (1951).

[11] *Rényi A.:* Sztochasztikus függetlenség és teljes függvényrendszerek. I. Magyar Matematikai Kongresszus közleményei (sajtó alatt).

* Előadó az elmult évben elért alkalmazott matematikai eredmények közül csak a valószinűségszámítás terén elért eredményekről számolt be részletesen. Az egyéb irányú alkalmazott matematikai eredmények közül egyesekre nézve lásd Egerváry Jenő r. tag hozzászólását.

[12] *A. Rényi:* On a conjecture of. H. Steinhaus, Annales de la Société Polonaise de Mathématiques (sajtó alatt).

[13] *L. Pukánszky, A. Rényi:* On the approximation of measurable functions. Publicationes mathematicae. *2* (1951) 146—150.

[14] *Rényi A.:* Az aprítás matematikai elméletéről, Építőanyag, 1950.

[15] *Beke B.:* Aprított anyaghalmazok szemszerkezete, Építőanyag, (1951), 67—70.

[16] *Rényi A.:* Levél a szerkesztőséghez, Orvosi Hetilap, 1951, 29.

[17] *Z. Bodó:* Some optical properties of luminescent powders Acta Physica, I. *2*, 135—150.

[18] *Jánossy L.:* Egy az elektronsokszorozó elméletében fellépő sztochasztikus folyamatról MTA. III. O. Oszt. Közl. I. *2* (1951), 357—367.

[19] *Takács L.:* Napi hőmérsékletek gyakorisága Budapesten, Időjárás *51* (1947) és *54* (1948).

[20] Ezen vizsgálatok részletes ismertetése a Mérnöki Továbbképző Intézet kiadásában jelenik meg.