ÖSSZETETT POISSON ELOSZLÁSOKRÓL II.

RÉNYI ALFRÉD lev. tag

Előadta az 1951 május 8-án tartott osztályülésen

BEVEZETÉS

Jelen dolgozat *Aczél J.*, *Jánossy L.*, és a szerző közös dolgozatának [1] folytatása. Négy részből áll. Az 1 §-ban véletlen események inhomogén sztochasztikus folyamatának általános alakját nyerjük (1. tétel). Ez a § az [1] alatt idézett dolgozat 2. §-ának általánosítása. Jelen dolgozat 2. §-ában a következő problémát oldjuk meg: tegyük fel, hogy egy összetett Poisson-folyamat minden eseménye egy oly „történés" kiindulópontja, amely meghatározott ideig tart és amelynek időtartama szintén valószínűségi változó; tekintetbe vesszük, hogy az időtartam eloszlásfüggvénye függhet az esemény kezdetének időpontjától. Azt kérdezzük, mi az eloszlásfüggvénye azon történések számának, amelyek valamely t időpontban folyamatban vannak. Ezt η_t-vel jelöljük. Be fogjuk bizonyítani, hogy ez az eloszlás is összetett Poisson-eloszlás (2. tétel). Ezt a problémát a szerző oldotta meg nemrégen a [2] dolgozatban, arra az esetre, ha a szóbanforgó folyamat egy közönséges Poisson-folyamat; ebben a dolgozatban fizikai és technikai alkalmazások (többek között a következő problémáknál: rádióaktív bomlásjelenségek, telefon-hálózatok terhelési problémái, elektroncsövek tértöltése, stb.) is meg vannak említve. Egy másik alkalmazási lehetőség jelen dolgozat 3 §-ában van megemlítve. A 3 §-ban az általános összetett Poisson-eloszlásokat, mint egészértékű független valószinűségi változók összegeinek határeloszlását jellemezzük; mégpedig bebizonyítjuk a következő tételt (3. tétel): Legyenek $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots \xi_{nk_n}$ független, egészértékű valószínűségi változók, amelyek „végtelenül kicsinyek", vagyis feltételezzük, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqq k\leqq k_n} P(\xi_{nk} \neq 0) = 0. \tag{1}$$

Ekkor ha az

$$X_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \cdots + \xi_{nk_n} \tag{2}$$

összegek eloszlásai egy nem-elfajuló határeloszláshoz konvergálnak ha $n \to \infty$, akkor ez a határeloszlás szükségképpen egy összetett Poisson-eloszlás kell, hogy legyen. A (2) összeg konvergenciájára szükséges és elegendő feltételeket adunk *B. V. Gnyegyenko* és *A. N. Kolmogorov* egy tételének [3] felhasználásával. Ez az eredmény szorosan összefügg azzal a 4 §-ban tárgyalt ténnyel (4. tétel), hogy az összetett Poisson-eloszlások osztálya jellemezhető úgy, mint azon korlátlanul osztható nem-negatív egész értékű eloszlások osztálya, amelyek a 0 értéket pozitív valószínűséggel veszik fel.

Az összetett Poisson-eloszlások elmélete, úgy, mint azt [1]-ben és jelen dolgozatban felépítettük, most már sok tekintetben teljes; azonban még távol állunk attól, hogy ezen eloszlások alkalmazási lehetőségeit kimerítettük volna.

E helyen fejezem ki köszönetemet *Császár Ákos*nak értékes megjegyzéseiért, amelyeket felhasználtam jelen dolgozat megírásánál.

1. § *Az inhomogén összetett Poisson-folyamat*

Tegyük fel, hogy a folyamat $t=0$ időpontban kezdődik és jelölje $\zeta_t (t>0)$ azon események számát, amelyek a $(0, t)$ időintervallumban történnek. A következőket tesszük fel:

a) ha $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \cdots < s_r < t_r$, akkor a $\zeta_{t_1}-\zeta_{s_1}, \zeta_{t_2}-\zeta_{s_2}, \ldots, \zeta_{t_r}-\zeta_{s_r}$ valószínűségi változók függetlenek $(r=2, 3, \ldots)$.

b) Jelölje $W_k(s, t)$ pontosan k esemény bekövetkezésének valószínűségét az (s, t) időintervallumban, vagyis legyen

$$W_k(s, t)=P(\zeta_t-\zeta_s=k) \qquad (s<t; k=0, 1, 2, \ldots); \tag{1. 1}$$

fel fogjuk tételezni, hogy tetszőlegesen kis $\varepsilon>0$-hoz és tetszőlegesen nagy $T>0$-hoz található oly $\delta>0$, hogy tetszőleges r-re $(r=1, 2, \ldots)$ és olyan $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \cdots \leq s_r < t_r \leq T$ időpontokra, amelyek eleget tesznek a

$$\sum_{j=1}^{r}(t_j-s_j)<\delta$$

feltételnek, fennáll, hogy

$$\prod_{j=1}^{r} W_0(s_j, t_j)>1-\varepsilon. \tag{1. 2}$$

A *b)* feltevés a folyamatot alkotó események „ritkaságát" követeli meg abban az értelemben, hogy 1-hez tetszőleges közeli valószínűséggel elegendően kicsiny hossz-összegü időintervallumokban nem történik esemény. [1]-ben egy másik „ritkasági" feltevés szerepel (C feltevés) amely többszörös események lehetőségét zárja ki; e feltevést jelen dolgozatban nem alkalmazzuk.

A következő tételt fogjuk bebizonyitani:

1. tétel: Az a) és b) feltevések teljesülése mellett, ha

$$\varphi(s, t, z)=\sum_{k=0}^{\infty} W_k(s, t) z^k \tag{1. 3}$$

jelöli a folyamat generátorfüggvényét, akkor $\log \varphi(s, t, z)$ *előállítható a következő alakban:*

$$\log \varphi(s, t, z)=\sum_{r=1}^{\infty}(z^r-1) \int_s^t c_r(\tau)\, d\tau \tag{1. 4}$$

ahol $c_r(\tau)$ nem-negatív integrálható függvény ($r=1,2,\ldots$) és $\sum_{r=1}^{\infty} c_r(\tau)$ majdnem mindenütt konvergens. Más alakban kifejezve:

$$W_k(s,t)=\exp\left(-\sum_{r=1}^{\infty}\int_s^t c_r(\tau)\,d\tau\right)\cdot\sum_{r_1+2r_2+\ldots+kr_k=k}\prod_{j=1}^{k}\frac{\left(\int_s^t c_j(\tau)\,d\tau\right)^{r_j}}{r_j!}.$$

Vagyis ξ_t összetett Poisson-eloszlást követ t minden pozitív értékére.

Bizonyítás: Legyen

$$-\log\varphi(s,t,z)=\psi(s,t,z). \tag{1.5}$$

Nyilvánvalóan

$$\varphi(s,\tau,z)\,\varphi(\tau,t,z)=\varphi(s,t,z) \tag{1.6}$$

és így

$$\psi(s,\tau,z)+\psi(\tau,t,z)=\psi(s,t,z) \tag{1.7}$$

ha $s<\tau<t$.

Tekintetbe véve, hogy ha z valós és $0\leq z\leq 1$, akkor $0\leq\varphi(s,t,z)\leq 1$, következik, hogy

$$\psi(s,t,z)=\psi_z(I) \tag{1.8}$$

nem-negatív, additív függvénye az $I=(s,t)$ intervallumnak, ha $0\leq z\leq 1$.

Be fogjuk bizonyítani, hogy ha $s\leq t\leq T$ és $|z|\leq 1$, akkor $\psi_z(I)$ abszolut folytonos. Valóban, tegyük fel, hogy $0\leq s_1<t_1\leq s_2<t_2\leq\cdots\leq s_r<t_r\leq T$ és $\sum_{j=1}^{r}(t_j-s_j)<\delta$, ahol a $\delta>0$ számot úgy választottuk, hogy (1.2) érvényes legyen valamely megadott $\varepsilon>0$ mellett. A következőkben fel fogjuk tenni, hogy $\varepsilon<\frac{1}{4}$, és így $W_0(s_j,t_j)>\frac{3}{4}$; ebből következik, hogy

$$|\varphi(s_j,t_j,z)|\geqq W_0(s_j,t_j)-\sum_{k=1}^{\infty}W_k(s_j,t_j)=2\,W_0(s_j,t_j)-1>\frac{1}{2}, \tag{1.9}$$

$\varphi(s_j,t_j,z)$ tehát a $|z|\leq 1$ zárt egységkörben nem tűnik el s ezért $\psi_z(I_j)=-\log\varphi(s_j,t_j,z)$ az egységkörben analitikus. Alkalmazva a

$$\left|\log\frac{1}{1-\alpha}\right|\leqq 2|\alpha|$$

egyenlőtlenséget, amely érvényes minden olyan α komplex számra, amelyre $|\alpha|<\frac{1}{2}$, kapjuk, hogy

$$|\psi_z(I_j)|\leq 2\,|1-\varphi(s_j,t_j,z)|<2\left[1-W_0(s_j,t_j)+\sum_{k=1}^{\infty}W_k(s_j,t_j)\right]$$

és így, hogy

$$|\psi_z(I_j)|\leq 4(1-W_0(s_j,t_j)).$$

Felhasználva az $\alpha < \log \frac{1}{1-\alpha}$ (ha $0 < \alpha < 1$) egyenlőtlenséget és (1.2) segítségével nyerjük, hogy

$$\sum_{j=1}^{r} |\psi_z(I_j)| < 4 \sum_{j=1}^{r} (1 - W_0(s_j, t_j)) \leq 4 \log \left[\prod_{j=1}^{r} \frac{1}{W_0(s_j, t_j)} \right] \leq 4 \log \frac{1}{1-\varepsilon} . \quad (1.10)$$

Mint azt megjegyeztük, $\psi_z(I_j)$ az egységkörben analitikus; ezért írhatjuk, hogy

$$\psi_z(I_j) = B_0(I_j) - \sum_{k=1}^{\infty} B_k(I_j) z_k \qquad (1.11)$$

alakban ahol a $B_k(I_j)$ együtthatók az $I_j = (s_j, t_j)$ intervallum függvényei. A Cauchy-féle formulából következik, hogy

$$B_0(I) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\psi_\zeta(I)}{\zeta} d\zeta$$

és

$$B_k(I) = \frac{-k!}{2\pi i} \int \frac{\psi_\zeta(I)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \qquad (k = 1, 2, \ldots) \qquad (1.12)$$

ahol az integráció a $|\zeta| = r < 1$ körön végzendő. Ezért (1.10)-ből következik, hogy ha $\sum_{j=1}^{r} (t_j - s_j) < \delta$ és $I_j = (s_j, t_j)$, akkor

$$\sum_{j=1}^{r} |B_k(I_j)| \leq \frac{\delta k! \varepsilon}{r^k}$$

vagyis $B_k(I)$ is abszolut folytonos intervallumfüggvény. Ezért írhatjuk, hogy

$$B_k(I) = \int_s^t c_k(\tau) d\tau.$$

ahol $c_k(\tau)$ L-integrálható ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Most megmutatjuk, hogy, $c_k(\tau) \geq 0$ ($k = 1, 2, \ldots$). Ez hasonló módon látható be, mint ahogyan az [1]-ben szereplő c_k együtthatók nem-negatív voltát bizonyítottuk; be fogjuk bizonyítani, hogy

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{W_k(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = c_k(t) \qquad (1.13)$$

majdnem minden t-re és ezért $c_k(t) \geq 0$, ha $k = 1, 2, \ldots$. Valóban:

$$\sum_{k=0}^{\infty} W_k(t, t+\Delta t) z^k = e^{-\psi_z(\Delta I)}$$

ahol $\Delta I = (t, t+\Delta t)$. A jobboldalt z szerint k-szor differenciálva $z = 0$ helyettesítésével nyerjük, hogy

$$\left(\frac{d^k (e^{-\psi_z(\Delta I)})}{dz^k} \right)_{z=0} = W_0(t, t+\Delta t) \Big(-\psi_0^{(k)}(\Delta I) +$$

$$+ \sum_{j_1 + 2j_2 + \ldots + (k-1)j_{k-1} = k} c_{j_1 j_2 \ldots j_{k-1}} (\psi_0'(\Delta I))^{j_1} \ldots (\psi_0^{(k-1)}(\Delta I))^{j_{k-1}} \Big)$$

ahol $c_{j_1, j_2 \ldots j_{k-1}}$ numerikus együtthatók. Miután, ha $|z| \leq 1$, majdnem minden t értékre,

$$|\psi_z(\Delta I)| = O(\Delta t) \qquad \text{ha } \Delta t \to 0$$

ezért

$$|\psi_0^{(m)}(\Delta I)| = \frac{O(\Delta I) m!}{r^m} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

ha $|z| \leq r < 1$, és így

$$k!\, W_k(t, t + \Delta t) = W_0(t, t + \Delta t)\,[-\psi_0^{(k)}(\Delta I) + O(\Delta t)^2] =$$

$$= W_0(t, t + \Delta t)\left|k! \int_t^{t+\Delta t} c_k(\tau)\, d\tau + O(\Delta t)^2\right|$$

és ebből következik (1.13). Vagyis $B_0(I) - \psi_z(I) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(I) z^k$ egy nem-negatív együtthatójú hatványsor. Tekintetbe véve, hogy $\psi_1(I) = 0$ s ezért $\lim_{z \to 1} \sum_{k=1}^{\infty} B_k(I) z^k = B_0(I)$, és mivel egy nem-negatív tagu Abel-szummábilis sor konvergens, azt kapjuk, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} B_k(I)$ konvergens és összege egyenlő $B_0(I)$-vel. Ezért $\psi_z(I)$ a

$$\psi_z(I) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(I)(1 - z^k)$$

alakra hozható.

Ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk.

Ha a folyamat homogén, akkor $c_k(\tau)$ nem függ τ-tól: $c_k(\tau) \equiv c_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ és [1] 2. §-ának eredményeit speciális esetként nyerjük. Ha $c_k = 0$ ha $k = 2, 3, \ldots$, akkor a közönséges Poisson-folyamatot kapjuk. Megemlítjük, hogy inhomogén közönséges Poisson-folyamat esetén az inhomogénitás nem lényeges, mert az időskála megváltoztatásával kiküszöbölhető. Valóban, a $t' = \int_0^t c_1(\tau)\, d\tau$ új paraméter bevezetésével ez elérhető. Azonban ez nem lehetséges összetett inhomogén Poisson-folyamat esetén, mert egy új időskála bevezetése esetén egy tetszőlegesen választott $c_k(\tau)$-t konstanssá tehetünk ugyan, de általában valamennyi együtthatót egyidejűleg nem tehetjük állandóvá. Így tehát léteznek „lényegesen" inhomogén Poisson-folyamatok.

2. § *Az η_t változók eloszlástörvénye*

A következő tételt fogjuk bebizonyítani:

2. tétel: Induljunk ki véletlen eseményeknek egy inhomogén összetett Poisson-féle folyamatából, amelynek karakterisztikus függvényét (1.3) *és* (1.4) *adja. Feltesszük, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} k \int_0^t c_k(\tau)\, d\tau$ konvergens, vagyis hogy η_t középértéke* *létezik, minden $t>0$-ra. Tegyük fel, hogy e folyamat minden eseménye kezdete egy „történésnek", amelynek időtartama szintén valószínűségi változó. Jelölje $F(t_0, T)$ a t_0 időpontban kezdődő történések időtartamának eloszlásfüggvényét és legyen $\Phi(t_0, T) = 1-F(t_0, T)$, feltesszük, hogy $\Phi(t_0, T)$ folytonos és pozitív, t_0 és T minden értékére. Jelölje η_t a t időpontban folyamatban lévő történések számát. Az η_t valószínűségi változó eloszlása összetett Poisson-eloszlás amelynek generátorfüggvénye*

$$\chi(z, t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k(t)(z^k-1)\right) \tag{2.1}$$

ahol

$$d_k(t) = \int_0^t \left[\sum_{n=k}^{\infty} c_n(\tau)\binom{n}{k}\Phi^k(\tau, t-\tau)(1-\Phi(\tau, t-\tau))^{n-k}\right]d\tau \tag{2.2}$$

(Nyilvánvalóan $d_k(t) \geqq 0$).

A bizonyítás alapgondolata ugyanaz, mint amelyet [2] 2. §-ában alkalmaztuk.

Bizonyítás. Osszuk a $(0, t)$ intervallumot a $t_k = \frac{kt}{n}$ $(k=0, 1, \ldots n)$ pontok által n egyenlő részre és jelöljük ΔI_k-val a (t_{k-1}, t_k) időintervallumot. Legyen továbbá $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ és

$$M_k = \max_{t_{k-1} \leq \tau \leqq t_k} \Phi(\tau, t-\tau) \tag{2.3}$$

$$m_k = \min_{t_{k-1} \leq \tau \leqq t_k} \Phi(\tau, t-\tau)$$

Legyen $V_k(r)$ annak a valószínűsége, hogy a t időpontban pontosan r olyan történés van folyamatban, amely a ΔI_k időintervallumban kezdődött. Először bebizonyítjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\sum_{s=r}^{\infty}\binom{s}{r} W_s^{(k)} m_k^r (1-M_k)^{s-r} \leq V_k(r) \leq \sum_{s=r}^{\infty}\binom{s}{r} W_s^{(k)} M_k^r (1-m_k)^{s-r} \tag{2.4}$$

ahol

$$W_s^{(k)} = W_s(t_{k-1}, t_k).$$

Ha r olyan történés van folyamatban t időpontban, amelyek mind a ΔI_k időintervallumban kezdődtek, akkor ebben az intervallumban $s \geqq r$ eseménynek kellett történnie; ha egy történés a τ időpontban kezdődött $(t_{k-1} < \tau \leqq t_k)$ akkor annak a valószínűsége, hogy még a t időpontban is tart, $\Phi(\tau, t-\tau)$; miután τ pontos értékét nem ismerjük, csak azt tudjuk, hogy ΔI_k-ban van, csak azt állíthatjuk, hogy ez a valószínűség m_k és M_k közé esik; hasonlóképpen, annak a valószínűsége, hogy a szóbanforgó történés t időpont előtt befejeződjék, egyenlő $F(\tau, t-\tau)$-val ahol τ valamely a ΔI_k intervallumba eső érték és így $F(\tau, t-\tau)$ az $1-M_k$ és $1-m_k$ határok közé esik.

Vezessük most be a következő függvényeket:

$$\chi^{(k)}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} V_k(r) z^r \qquad (k = 1, 2, \dots n) \tag{2.5}$$

Feltesszük, hogy $0 \leq z \leq 1$; (2.5)-ből (1.4)-ből és (1.9)-ből következik, hogy

$$\exp\left[\sum_{r=1}^{\infty} B_r(\Delta I_k)((m_k z + 1 - M_k)^r - 1)\right] \leq$$
$$\chi^{(k)}(z) \leq \exp\left[\sum_{r=1}^{\infty} B_r(\Delta I_k)((M_k z + 1 - m_k)^r - 1)\right] \tag{2.6}$$

(Hogy a (2.6) jobboldalán a kitevőben álló sor konvergenciáját biztosítsuk, n-et oly nagyra választjuk, hogy $M_k < 2m_k$ legyen és feltesszük, hogy $z < \frac{1}{2}$).
Jelölje

$$\mu_k = \sum_{r=1}^{\infty} r B_r(\Delta I_k) \tag{2.7}$$

$\zeta_{t_k} - \zeta_{t_{k-1}}$ várható értékét (μ_k létezését feltételeztük). Könnyen nyerjük, hogy

$$\chi^{(k)}(z) = \exp[-\psi(t_{k-1}, t_k, m_k z + 1 - M_k) + \vartheta \mu_k (M_k - m_k)] \tag{2.8}$$

ahol $|\vartheta| \leq 1$.
Jelölje most $p_N(t)$ annak a valószínűségét, hogy a t időpontban pontosan N történés legyen folyamatban.

Nyilvánvalóan

$$p_N(t) = \sum_{r_1 + r_2 + \dots + r_n = N} V_1(r_1) V_2(r_2) \dots V_n(r_n) \tag{2.9}$$

ahol az összegezés a pozitív egész számok valamennyi olyan ismétléses n-rendű variációjára terjesztendő ki, amelyekre $r_1 + r_2 + \dots + r_n = N$. Legyen

$$\chi(z, t) = \sum_{N=0}^{\infty} p_N(t) z^N \tag{2.10}$$

$\chi(z, t)$ az η_t valószínűségi változó generátorfüggvénye. (2.9) miatt

$$\chi(z, t) = \prod_{k=1}^{n} \chi^{(k)}(z) \tag{2.11}$$

és így (2.8)-ra való tekintettel

$$\chi(z, t) = \exp\left[-\sum_{k=1}^{n} \psi(t_{k-1}, t_k, m_k z + 1 - M_k) + \vartheta' \sum_{k=1}^{n} \mu_k (M_k - m_k)\right] \tag{2.12}$$

ahol $|\vartheta'| \leq 1$.

Ha most $n \to \infty$, akkor (2.12) jobboldalán az exponensben álló második tag 0-hoz tart, míg az első tag határértéke:

$$\pi(z, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^t c_r(\tau) [(\Phi(\tau, t - \tau) z + 1 - \Phi(\tau, t - \tau))^r - 1] \, d\tau. \tag{2.13}$$

Ezért

$$\chi(z, t) = e^{\pi(z, t)} \tag{2. 14}$$

Egyszerű átrendezéssel adódik

$$\pi(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t)(z^k - 1) \tag{2. 15}$$

ahol a $d_k(t)$ együtthatókat (2. 2) definiálja; így a 2. tételt bebizonyítottuk.

Megemlítjük, hogy ha $c_k(\tau) \equiv 0$ ha $k = 2, 3, \ldots$ vagyis ha a szóbanforgó folyamat közönséges Poisson-folyamat, akkor (lásd [2])

$$\pi(z, t) = \left(\int_0^t c_1(\tau)\, \Phi(\tau, t - \tau)\, d\tau\right)(z - 1) \tag{2. 16}$$

s ezért η_t is Poisson-eloszlást követ. Általánosabban, nevezzük az összetett Poisson-eloszlást D-ed fokúnak, ha $c_n(\tau) \equiv 0$, ha $n > D$, akkor η_t eloszlásának a fokszáma egyenlő ζ_t eloszlásának fokszámával, (ez igaz $D = \infty$-re is!)

3. § *Összetett Poisson-eloszlásokhoz való konvergencia*

3. tétel: Legyenek $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_n}$ *nem-negatív, független, egész értékű valószínűségi változók,* $(n = 1, 2, \ldots)$, *amelyek „végtelenül kicsinyek", vagyis tegyük fel, hogy*

$$\lim_{n \to \infty} \max_{1 \leq k \leq k_n} P(\xi_{nk} \neq 0) = 0. \tag{3. 1}$$

Legyen

$$X_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \cdots + \xi_{nk_n} \tag{3. 2}$$

és $p_{nks} = P(\xi_{nk} = s)$, *végül pedig* $c_{ns} = \sum_{k=0}^{k_n} p_{nks}$. *Annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy az* X_n *összegek eloszlásai egy határeloszláshoz konvergáljanak az, hogy létezzék nem-negatív* $c_1, c_2, \ldots c_s, \ldots$ *számoknak egy olyan sorozata, amely a következő tulajdonsággal bír:*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{s=1}^{\infty} |c_{ns} - c_s| = 0. \tag{3. 3}$$

Ha (3. 3) *teljesül, akkor* X_n *eloszlásfüggvénye* $n \to \infty$-*re ahhoz az összetett Poisson-eloszláshoz konvergál, amelynek a generátorfüggvénye*

$$\varphi(z) = \exp\left[\sum_{s=1}^{\infty} c_s(z^s - 1)\right] \tag{3. 4}$$

Bizonyítás: A 3. tételt *B. V. Gnyegyenko* és *A. N. Kolmogorov* következő fontos tételéből ([3] 25. §-ának 1. tétele) fogjuk levezetni: Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy konstansoknak egy A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozata létezzék, amelyek $X_n - A_n = X'_n$ eloszlásfüggvényének a konvergenciáját biztosítják, ahol X_n (3. 2) által van definiálva és a ξ_{nk} változók végtelenül kicsinyek, $F_{nk}(x)$-el jelölve ξ_{nk} eloszlásfüggvényét, a következő: létezzenek oly nem-csökkenő $M(u)$ $(-\infty < u < 0;\ M(-\infty) = 0)$ és $N(u)$ $(0 < u < \infty;\ N(\infty) = 0)$ függvények, amelyek korlátos ingadozásuak és létezzék egy σ konstans, úgy, hogy

a) $M(u)$ illetve $N(u)$ minden folytonossági pontjában

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(u) &= M(u) \qquad \text{ha } u<0 \\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n} (F_{nk}(u)-1) &= N(u) \qquad \text{ha } u>0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

b) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int\limits_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x)\right)^2\right\} = \sigma^2 \tag{3.6}$$

továbbá (3. 6) legyen érvényes akkor is ha $\overline{\lim}$ helyet $\underline{\lim}$-et írunk.

Abban az esetben, ha a fenti feltételek teljesülnek, az A_n konstansokat a következőképpen választhatjuk:

$$A_n = \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\tau} x dF_{nk}(x)$$

ahol τ tetszőleges olyan pozitív szám, hogy $-\tau$ és $+\tau$ az $M(u)$ illetve $N(u)$ függvényeknek folytonossági pontjai. Jelölje $f(t)$ X_n' határeloszlásának karakterisztikus függvényét, akkor

$$\log f(t) = i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{0}\left(e^{iut}-1-\frac{iut}{1+u^2}\right)dM(u) + \int_{0}^{\infty}\left(e^{iut}-1-\frac{iut}{1+u^2}\right)dN(u) \tag{3.7}$$

(*P. Lévy* formulája), ahol $M(u)$, $N(u)$ és σ jelentése ugyanaz, mint fentebb, míg γ egy valós konstans.

A mi esetünkben az a feltevés, hogy a ξ_{nk} valószínűségi változók „végtelenül kicsinyek" equivalens a $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Min}\limits_{1\leqq k\leqq k_n} p_{nk0} = 1$ feltevéssel. Továbbá $F_{nk}(u) = 0$ ha $u < 0$, vagyis *a)* első feltétele teljesül ha $M(u) \equiv 0$ és $F_{nk}(u) = \sum\limits_{s<u} p_{nks}$ ha $u > 0$ és ezért $\sum\limits_{s=0}^{\infty} p_{nks} = 1$ miatt

$$\sum_{k=1}^{k_n}(F_{nk}(u)-1) = -\sum_{s\geqq u} c_{ns} \tag{3.8}$$

vagyis *a)* második feltétele equivalens a

$$\lim_{n\to\infty} D_{nu} = D_u, \qquad \lim_{u\to\infty} D_u = 0 \tag{3.9}$$

határértékrelációkkal, ahol $D_{nu} = \sum\limits_{s\geqq u} c_{ns}$.

(A D_u sorozat nyílvánvalóan nem-növekvő). A *b)* feltétel esetünkben nyílvánvalóan teljesül és $\sigma = 0$, mert a (3. 6)-ban szereplő integrálok eltünnek, ha

$\varepsilon < 1$. Hasonló meggondolásokból abban az esetben, ha (3. 9) feltételei teljesülnek, feltehetjük, hogy $A_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Bevezetve a $C_n = D_n - D_{n+1}$ jelölést, (nyilván $c_n \geqq 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens) nyilvánvaló, hogy (3. 9)-ből következik

$$\lim_{n \to \infty} (c_{ns} - c_s) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{3. 10}$$

Ennek megfordítása természetesen nem igaz, azonban helyettesítsük a (3. 10) feltételeket a következő egyetlen feltétellel:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{s=1}^{\infty} |c_{ns} - c_s| = 0. \tag{3. 11}$$

Könnyen belátható, hogy (3. 11) equivalens a (3. 9) feltételekkel. Valóban, bebizonyítjuk, hogy (3. 11)-ből következik (3. 9) és megfordítva. Ha (3. 11) teljesül, akkor

$$|D_{nu} - D_u| = \left| \sum_{s \geqq u} (c_{ns} - c_s) \right| \leqq \sum_{s=1}^{\infty} |c_{ns} - c_s| \tag{3. 12}$$

vagyis (3. 9) minden $u = 1, 2, \ldots$ értékre igaz. Megfordítva (3. 9)-ből következik, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} |c_{ns} - c_s| &= \sum_{s=1}^{\infty} (c_{ns} - c_s) + \\ &+ 2 \sum{}' (c_s - c_{ns}) \leqq D_{n1} - D_1 + 2 \sum_{s=N}^{\infty} c_s + 2N\varepsilon_n^{(N)} \end{aligned} \tag{3. 13}$$

ahol $\sum{}'$ mindazon s értékekre terjesztendő ki, amelyekre $c_s - c_{ns} > 0$ és $\varepsilon_n^{(N)} = \max_{s < N} (c_s - c_{ns})$ vagyis

$$\sum_{s=1}^{\infty} |c_{ns} - c_s| \leqq D_{n1} - D_1 + 2D_N + 2N\varepsilon_n^{(N)} \tag{3. 14}$$

Nyilván $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n^{(N)} = 0$, N minden rögzített értéke mellett, (3. 10)-el megegyezően. Válasszuk most N értéket elég nagyra, úgy, hogy $D_N < \frac{\varepsilon}{6}$ legyen és azután n_0 értékét oly nagyra, hogy ha $n \geqq n_0$, $|D_{n1} - D_1| < \frac{\varepsilon}{3}$ és $\varepsilon_n^{(N)} < \frac{\varepsilon}{6N}$ legyen; következik, hogy (3. 14) jobboldala $< \varepsilon$, ha $n > n_0$ ami (3. 11)-el equivalens.

Vagyis, *B. V. Gnyegyenko* és *A. N. Kolmogorov* tételének feltételei $M(u) = 0$ és $N(u) = -\sum_{z > u} c_s$ és $\sigma = 0$ mellett akkor és csak akkor teljesülnek, ha (3. 3) fennáll s így X_n eloszlása egy olyan határeloszláshoz konvergál, amelynek karakterisztikus függvénye $f(t)$ ahol

$$\begin{aligned} \log f(t) &= i\gamma t + \int_0^{\infty} \left(e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1 + u^2} \right) dN(u) = \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} c_s (e^{ist} - 1) + it \left(\gamma - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s c_s}{1 + s^2} \right). \end{aligned}$$

Miután X_n csak nem-negatív egész értékeket vesz fel $\gamma = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{sc_s}{1+s^2}$, és így

$$f(t) = \exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} c_s(e^{ist}-1)\right)$$

ami $f(t) = \varphi(e^{it})$ miatt (3. 4)-el equivalens. Ezzel a 3. tételt bebizonyítottuk.

E határértéktétel az összetett Poisson-eloszlás ujabb gyakorlati alkalmazásainak felismeréséhez segít hozzá.

Tekintsük két vagy több szemcsés anyagnak a keverékét, amelyeknek a fajsúlyai különbözők. Tegyük fel például, hogy csak két anyag van, amelyek fajsúlyának aránya 1 : 2. A keverék fajsúlya nyilván a komponensek fajsúlyának súlyozott középértéke, a „súlyok" arányosak az egyes komponensek mennyiségével (térfogatával). Azonban, ha a keverék kisebb részének térfogatát vizsgáljuk, tekintetbe véve, hogy a keverés általában nem lesz tökéletes, azt fogjuk találni, hogy az említett középérték körül ingadozások vannak. Egy találomra kivett térfogatrész fajsúlya valószínűségi változónak tekintendő, amelynek vizsgálhatjuk eloszlását. Könnyen szerkeszthetünk egy olyan egyszerű urnamodellt, amelyik az említett probléma modelljéül szolgálhat és a 3. tételből következik, hogy a keverék kiválasztott kis térfogatrészének a fajsúlya összetett Poisson-eloszlást fog követni, amelynek generátorfüggvénye $\exp(c_1(z-1)+c_2(z^2-1))$. Ugyanez a meggondolás alkalmazható két vagy több fémből álló ötvözet részeinek fajsúlyára is.

4. § *Az összetett Poisson-eloszlások jellemzése*

Végül be fogjuk bizonyítani a következő tételt, amely fényt vet a fenti eredményekre.

4. tétel: Az összetett Poisson-eloszlások osztálya jellemezhető, mint nemnegatív egész értékeket felvevő valószínűségi változók azon korlátlanul osztható eloszlásainak osztálya, amely változók a 0 *értéket pozitív valószínűséggel veszik fel.*

Bizonyítás: Kiindulunk egy korlátlanul osztható eloszlás karakterisztikus függvényének kanonikus alakjából:

$$\log f(t) = i\gamma t - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \\ + \int_{-\infty}^{0}\left(e^{iut}-1-\frac{iut}{1+u^2}\right)dM(u) + \int_{0}^{\infty}\left(e^{iut}-1-\frac{iut}{1+u^2}\right)dN(u) \tag{4. 1}$$

ahol γ és σ valós számok, $M(u)$ és $N(u)$ a $(-\infty, 0)$ ill. $(0, +\infty)$ intervallumokban nem csökkenő és korlátos ingadozású függvények, továbbá $M(-\infty) = N(+\infty) = 0$. Egy Poisson-eloszlás karakterisztikus függvényének a logaritmusa:

$$\log f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{int} - 1) \tag{4.2}$$

alakú, ahol $c_n \geqq 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$. (4. 1)-ban $\sigma = 0$ és $M(u) \equiv 0$ helyettesítéssel, $\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n c_n}{1+n^2}$ és $N(u) = -\sum c_n$ $(u > 0)$ mellett, azt kapjuk, hogy minden összetett Poisson-eloszlás korlátlanul osztható. (Valóban, ez abból is belátható, hogy minden összetett Poisson-eloszlás véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok többszörös Poisson-eloszlás kompoziciója (lásd [1]). Megfordítva, tegyük fel, hogy a ξ valószínűségi változó csak nem-negatív egész értékeket vesz fel és eloszlása korlátlanul osztható, vagyis ξ minden $n = 2, 3, \ldots$-ra előállítható $\xi = \sum_{k=1}^{n} \eta_k$ alakban, ahol az $\eta_k (k = 1, 2, \ldots n)$ változók függetlenek és egyforma eloszlásúak. Tudjuk, hogy ha $f(t)$ jelöli ξ karakterisztikus függvényét, akkor $\log f(t)$ a (4. 1) alakban állítható elő. Nyílván $\sigma = 0$, mert különben ξ eloszlásfüggvénye folytonos volna. Valóban, legyen $f(t) = f_1(t) f_2(t)$, ahol $f_2(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$. Miután $f_2(t)$ az $F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du$ normális eloszlás karakterisztikus függvénye, ha $F(x)$ ξ eloszlásfüggvényét jelenti és $F_1(x)$ annak a korlátlanul osztható eloszlásnak az eloszlásfüggvényét, amelynek a karakterisztikus függvénye $f_1(t)$, nyerjük, hogy

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x-y)\, dF_1(y).$$

Tekintetbe véve, hogy $|F_2(a+h) - F_2(a)| \leqq \frac{|h|}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$ $(-\infty < a < \infty)$ következik, hogy $|F(x+h) - F(x)| \leqq \frac{|h|}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$, vagyis $F(x)$ folytonos, ami ellentmond annak a feltevésnek, hogy ξ csak nem-negatív egész értékeket vesz fel. Minthogy azonban

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{ikt} \qquad (A_k = P(\xi = k)) \tag{4.3}$$

láthatjuk, hogy $f(2\pi) = 1$ s ezért $\log f(2\pi)$ valós része eltünik. Ezért

$$\int_{-\infty}^{0} (\cos 2\pi u - 1)\, dM(u) + \int_{0}^{\infty} (\cos 2\pi u - 1)\, dN(u) = 0. \tag{4.4}$$

Tekintettel arra, hogy $M(u)$ és $N(u)$ nemcsökkenőek, és $\cos 2\pi u - 1 < 0$, ha $u \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ következik, hogy $M(u)$ ill. $N(u)$ csak negatív, illetve pozitív egész u értékre növekedhetnek. Ezért írhatjuk, hogy

$$\log f(t) = it\gamma' + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' c_n (e^{int} - 1) \tag{4.5}$$

ahol $\sum'$ azt jelenti, hogy az összegezés nem terjed ki az $n=0$ értékre, és $\gamma'=\gamma-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{nc_n}{1+n^2}$. Azonban könnyen belátható, hogy abban az esetben, ha a $c_{-n}(n=1,2,\ldots)$ együtthatók nem tűnnek el mind, akkor ξ negatív egész értékeket is felvesz: valóban

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{it(n-\gamma')} = \exp\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' c_n(e^{int}-1)\right) =$$

$$= \exp\left(-\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' c_n\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' c_n e^{int}\right)^k}{k!} \tag{4. 6}$$

és miután $c_n \geqq 0$ ha $n=\pm 1, \pm 2, \ldots$ ha valamely $n>0$-ra $c_{-n} \neq 0$ volna, akkor találnánk e^{it}-nek tetszőlegesen nagy negatív hatványát pozitív együtthatóval. Ezért $c_{-n}=0$ ha $n=1,2,\ldots$. Mivel feltettük, hogy $A_0 \neq 0$ azt kapjuk, hogy (4. 6) baloldalán az e^{it} legalacsonyabb hatványát tartalmazó tag $A_0 e^{-it\gamma'}$; mivel (4. 6) jobboldalán az e^{it}-ben legalacsonyabb fokú tag konstans, tehát kell hogy $\gamma'=0$ legyen, s ennek megfelelően

$$\log f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(e^{int}-1) \tag{4. 7}$$

Miután feltételeztük, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = -N(o)$ véges, következik, hogy (4. 6) egy összetett Poisson eloszlás karakterisztikus függvénye; a 4. tételt ezzel bebizonyítottuk. Megemlítjük, a következő korolláriumot: *Ha az $F(x)$ összetett Poisson eloszlás $F_1(x)$ és $F_2(x)$ korlátlanul osztható eloszlások kompoziciója, amelyeknek pozitív ugrása van $x=0$-nál, akkor ezek is összetett Poisson eloszlások, amelyeknek a fokszáma nem haladja meg $F(x)$ fokszámát.* A bizonyítás nyilvánvaló.

Ez egy Poisson eloszlásokra vonatkozó jól ismert tény általánosítása. (lásd [3] 18. §)

Kiemeljük, hogy [1] 3. §-ának a tétele egyszerű következménye a 4. tételnek.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

1 *Jánossy L., Rényi A.* és *Aczél J.:* Összetett Poisson eloszlásokról I. (ebben a füzetben 315—328.)

2 *Rényi A.:* On general inhomogeneous Markov processes of random events, Publicationes Mathematicae. *2* (1951). 66—73.

3 *B. V. Gnyegyenko* és *A. N. Kolmogorov:* Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai, Akadémiai Kiadó 1951.