SZTOCHASZTIKUS FÜGGETLENSÉG ÉS TELJES FÜGGVÉNYRENDSZEREK

RÉNYI ALFRÉD (Budapest)*.

A sztochasztikus függetlenség fogalma egyike a valószínűségszámítás legalapvetőbb fogalmainak. *A. N. Kolmogorov* »A valószínűségszámítás alapfogalmai« című munkájában[1] rámutat arra, hogy a függetlenség fogalma bizonyos értelemben központi helyet foglal el a valószínűségszámításban, és történetileg a függetlenség fogalma volt az a matematikai fogalom, amely a valószínűségszámítás sajátos jellegét meghatározta. A valószínűségszámítás alapfogalmainak és így a sztochasztikus függetlenség fogalmának is matematikailag precíz és kielégítő fogalmazását *A. N. Kolmogorov* adta meg elsőnek, idézett munkájában ; a függetlenségnek ez a fogalma igen hűen tükrözi vissza és teszi matematikailag tárgyalhatóvá az anyagi világ objektív jelenségeinek függetlenségét.

Legyen $\mathfrak{E}$ egy tetszőleges (absztrakt) halmaz, amelynek elemeit az $a, b, c, \ldots$ betűkkel fogjuk jelölni ; legyen F az $\mathfrak{E}$ halmaz bizonyos részhalmazainak egy összessége, és tegyük fel, hogy F Borel-féle halmaztest (azaz két halmazzal együtt azok különbsége is F-hez tartozik, továbbá véges vagy megszámlálható sok F-hez tartozó halmaz összege is F-hez tartozik), és jelöljük F elemeit $A, B, C, \ldots$ betűkkel ; feltesszük, hogy maga az $\mathfrak{E}$ halmaz is eleme F-nek. Legyen adva továbbá egy az F halmaztesten értelmezett $\mu(A)$ nemnegatív és abszolút additiv halmazfüggvény [azaz, ha $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ az F halmaztest páronként idegen elemei, és $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$, akkor legyen $\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n) + \ldots$] és tegyük fel, hogy $\mu(\mathfrak{E}) = 1$. Egy ilyen F halmaztestet a rajta értelmezett μ halmazfüggvénnyel *Kolmogorov* nyomán *valószínűségi mezőnek* nevezünk. Valószínűségi változónak egy az $\mathfrak{E}$ halmazon értelmezett, a μ halmazfüggvényre nézve mérhető valós $\xi = \xi(a)$ függvényt nevezünk ; más szóval ha $E(\xi < x)$ az $\mathfrak{E}$ halmaz azon a elemeinek halmazát jelenti, amelyekre $\xi(a) < x$, a $\xi = \xi(a)$ függvényt akkor nevezzük valószínűségi változónak (a szóbanforgó valószínűségi mezőn), ha x minden valós értékére az $E(\xi < x)$ halmaz hozzá-

* 1950. augusztus 31-én tartott előadás.

[1] *A. N. Kolmogoroff*, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, (Berlin, 1933), 8. o.

tartozik az F halmaztesthez. Az $F(x) = \mu(E(\xi < x))$ függvényt a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük. Hasonlóképpen, jelentse $E(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n)$ az $\mathfrak{E}$ halmaz azon a elemeinek halmazát, amelyekre a $\xi_1(a) < x_1$, $\xi_2(a) < x_2, \ldots, \xi_n(a) < x_n$ feltételek egyidejűleg teljesülnek; az $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu(E(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n)$ függvényt a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvényének nevezzük.

Egy $\mathfrak{E}$ halmaz F Borel-féle halmaztestén értelmezett nemnegatív és abszolút additiv μ halmazfüggvény által definiált $(\mathfrak{E}, F, \mu)$ valószínűségi mezőt *szeparábilis*nak nevezzük, ha létezik egy olyan $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots)$ megszámlálható halmazrendszer, amelynek elemei mind F-hez tartoznak és amely a következő két tulajdonsággal bír: 1) $\mathfrak{E}$ bármely két különböző eleméből álló (a, b) elempárjához, kivéve esetleg egy H 0-mértékű halmazhoz tartozó a és b elemeket, található a $\boldsymbol{B}$ rendszer olyan eleme, amely az a és b elemek közül az egyiket tartalmazza, de a másikat nem; 2) bármely F-hez tartozó A halmazhoz található a $\boldsymbol{B}$ rendszer által generált Borel-féle halmaztestnek olyan B eleme, hogy $A \in B$ és $\mu(B - A) = 0$, azaz, amely A-tól csak egy 0-mértékű halmazban különbözik. Az ilyen tulajdonságú $\boldsymbol{B}$ halmazrendszert a valószínűségi mező *bázis*ának nevezzük.

Vezessük be a következő jelöléseket: legyen $B^1 = B$ és $B^{-1} = \mathfrak{E} - B$. Legyen $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots)$ az $(\mathfrak{E}, F, \mu)$ valószínűségi mező egy bázisa és képezzük az összes lehetséges $\prod_{n=1}^{\infty} B_n^{\varepsilon_n}$ alakú szorzatokat, ahol $\varepsilon_n = +1$ vagy -1. Ha az ilyen szorzatok sohasem üresek (és ennélfogva mindig $\mathfrak{E}$ egyetlen egy eleméből állnak), akkor a valószínűségi mezőt a $\boldsymbol{B}$ bázisra vonatkozólag *teljes*nek nevezünk. Egy $(\mathfrak{E}, F, \mu)$ valószínűségi mezőt a $\boldsymbol{B}$ bázisára vonatkozólag *mod 0 teljes*nek nevezünk, ha az $\mathfrak{E}$ halmazt és a $\boldsymbol{B}$ bázis elemeit egy-egy 0-mértékű halmazon megváltoztatva (azaz 0-mértékű halmaz elvétele és hozzátétele útján) az $(\mathfrak{E}, F, \mu)$ valószínűségi mező a $\boldsymbol{B}$ bázisra vonatkozólag teljessé tehető. Bebizonyítható, hogy ha egy valószínűségi mező mod 0 teljes egy bázisára nézve, akkor minden más bázisára nézve is mod 0 teljes; beszélhetünk tehát mod 0 teljes valószínűségi mezőkről, a bázis megadása nélkül.

Egy szeparábilis és mod 0 teljes $(\mathfrak{E}, F, \mu)$ valószínűségi mezőt Lebesgue-féle valószínűségi mezőnek, a μ halmazfüggvényt pedig *Lebesgue-féle mérték*nek nevezzük. Ha nincsen olyan F-hez tartozó és $\mathfrak{E}$ egyetlen egy eleméből álló részhalmaz, amelynek pozitív mértéke volna, akkor a μ mértéket folytonosnak nevezzük[2].

A következőkben mindig feltesszük, hogy μ *folytonos Lebesgue-féle mérték*. Ismeretes, hogy ebben az esetben az $(\mathfrak{E}, F, \mu)$ valószínűségi mező izomorf

[2] A mértékelméleti fogalmakra vonatkozólag l. *V. A. Rohlin*, Izbrannije voproszi metricseszkoj tyeorii gyinamicseszkih szisztyem, *Uszpehi Maty. Nauk* (1949), 58—128.

azzal a valószínűségi mezővel, amelyet úgy kapunk, hogy $\mathfrak{E}$-nek a (0, 1) intervallum pontjainak összességét, F-nek a (0, 1) intervallum mérhető halmazainak összességét és μ-nek a közönséges Lebesgue-féle mértéket választjuk. Ilyen módon rögtön feltehetnénk azt is, hogy $\mathfrak{E}$ maga a (0, 1) intervallum és μ a közönséges Lebesgue-féle mérték. Ebben az esetben valószínűségi változó egyszerűen a (0, 1) intervallumon értelmezett mérhető függvényt jelent. Ilyen módon jutunk el valós változójú *függvények sztochasztikus függetlenségének* fogalmához, amelyet *M. Kac* és *H. Steinhaus* [3] [4] vizsgáltak behatóan.

A $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változókat akkor nevezik függetleneknek, ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ minden valós értékére fennáll, hogy

$$\mu(E(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n)) = \prod_{k=1}^{n} \mu(E(\xi_k < x_k)). \tag{1}$$

A $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ valószínűségi változók végtelen sorozatát akkor nevezzük függetlennek, ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ függetlenek, akármilyen nagy is n.

A (0, 1) intervallumon értelmezett sztochasztikusan független függvények jól ismert tulajdonságai közül csak egyet említünk itt meg: ha az $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ függvények függetlenek a $(0 \leqq x < 1)$ intervallumban, akkor

$$\int_0^1 f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)\, dx = \int_0^1 f_1(x)\, dx \cdot \int_0^1 f_2(x)\, dx \cdots \int_0^1 f_n(x)\, dx, \tag{2}$$

amennyiben ezek az integrálok egyáltalán léteznek. Ha $f(x)$ és $g(x)$ függetlenek, akkor nyilván $f^n(x)$ és $g^m(x)$ is függetlenek, ha n és m pozitív egész számok, és így fennáll

$$\int_0^1 f^n(x) g^m(x)\, dx = \int_0^1 f^n(x)\, dx \int_0^1 g^m(x)\, dx, \tag{3}$$

amennyiben ezek az integrálok léteznek. Érdekes megjegyezni, hogy amint azt *M. Kac*[3] bebizonyította, ez az állítás megfordítható: ha (3) n és m minden pozitív egész értékére teljesül, akkor $f(x)$ és $g(x)$ függetlenek.

A sztochasztikusan független függvények elmélete szoros kapcsolatban áll az ortogonális függvények elméletével. Legyen ugyanis $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ független függvények sorozata és tegyük fel, hogy $f_n(x)$ az L^2 függvénytérhez tartozik (azaz négyzetével együtt integrálható). Legyen

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = a_n \text{ és } \int_0^1 (f_n(x) - a_n)^2\, dx = b_n^2, \tag{4}$$

[3] *M. Kac:* Sur les fonctions indépendantes I, *Studia Math.*, *6* (1936), 46—58.
[4] *M. Kac* et *H. Steinhaus*, Sur les fonctions indépendantes, II, III, ibid. 59—66, 89—97.

és amennyiben $b_n \neq 0$ (azaz $f_n(x)$ nem állandó majdnem mindenütt), legyen

$$g_n(x) = \frac{f_n(x) - a_n}{b_n} \quad (b_n > 0). \tag{5}$$

Amennyiben vannak az $f_n(x)$ függvények között majdnem mindenütt állandó függvények, azokat egy kivételével hagyjuk ki; ha $f_{k_0}(x)$ az egyetlen majdnem mindenütt állandó függvény, úgy legyen $g_{k_0}(x) \equiv 1$. Könnyen belátható, hogy az így nyert $g_n(x)$ függvényrendszer ortogonális és normált, ugyanis definíció szerint, ha $n \neq k_0$ és $m \neq k_0$,

$$\int_0^1 g_n(x) g_m(x)\, dx = \frac{1}{b_n b_m}\left(\int_0^1 f_n(x) f_m(x)\, dx - a_n a_m\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq m, \\ 1, & \text{ha } n = m, \end{cases} \tag{6}$$

továbbá

$$\int_0^1 g_n(x) g_{k_0}(x)\, dx = \frac{1}{b_n}\left(\int_0^1 f_n(x)\, dx - a_n\right) = 0, \text{ ha } n \neq k_0.$$

Szükségünk lesz a teljes függvényrendszerek fogalmára is. Az L^2 függvénytérhez tartozó függvények $\{g_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozatát teljesnek nevezzük, ha

$$\int_0^1 f(x) g_n(x)\, dx = 0 \tag{7}$$

csak akkor állhat fenn n minden pozitív egész értékére egy az L^2 függvénytérhez tartozó $f(x)$ függvényre, ha az majdnem mindenütt 0-val egyenlő.

A fent említett független függvényekből álló ortogonális $\{g_n(x)\}$ függvényrendszer nem lehet teljes, mert ha $g_{n_1}(x)$ és $g_{n_2}(x)$ egyike sem konstans majdnem mindenütt, akkor (7) teljesül n minden értékére, ha $f(x) = g_{n_1}(x) g_{n_2}(x)$ (ehhez még csak azt sem kell feltenni, hogy a $g_n(x)$ függvénysorozat független, ehelyett az is elegendő, hogy a $g_n(x)$ függvények hármanként függetlenek). A független függvényekből álló $\{g_n(x)\}$ ortogonális függvényrendszerek, mint ismeretes, az úgynevezett lakunáris függvényrendszerek közé tartoznak, amelyeknek bizonyos értelemben tipikus képviselői.

Vizsgáljunk meg néhány példát: legyen $R_n(x) = \operatorname{sg}(\sin 2^{n-1} \pi x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, vagyis tekintsük a Rademacher-féle függvényeket. Ezek a függvények függetlenek és jól ismert lakunáris ortogonális és normált függvényrendszert alkotnak. Ha ehhez a rendszerhez hozzácsatoljuk az $R_n(x)$ függvények összes lehetséges szorzatait, azaz a $W_N(x) = R_{n_1}(x) R_{n_2}(x) \ldots R_{n_k}(x)$ függvényeket, ahol

$$N = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_k} \quad (n_1 < n_2 < \cdots < n_k), \tag{8}$$

az ú. n. Walsh-féle ortogonális rendszert nyerjük, amely már teljes rendszer. Ha az $R_n(x)$ rendszerből kihagyunk egyetlen egy $R_{n*}(x)$ függvényt, akkor az $R_{n_1}(x)\, R_{n_2}(x) \ldots R_{n_k}(x)$ szorzatok összessége (ahol $n_i \neq n^*, i = 1, 2, \ldots, k$), már nem lesz teljes, hiszen mindezek a függvények ortogonálisak az $R_{n*}(x)$ függvényre. Általában, ha $\{g_n(x)\}$ független függvények egy rendszerre és létezik olyan, nem majdnem mindenütt állandó, $g(x)$ függvény, amelyet a $g_n(x)$ függvényrendszerhez hozzácsatolva az így nyert $(g(x)\,;\, g_n(x))$ függvényrendszer is független rendszer, akkor az összes lehetséges

$$(9) \qquad g_{m_1 m_2 \ldots m_k}(x) = g_1^{m_1}(x)\, g_2^{m_2}(x) \ldots g_k^{m_k}(x)$$

függvények rendszere (ahol $m_1, m_2, \ldots, m_k$ az összes nemnegatív egész számokon futnak végig és $k = 1, 2, \ldots$) nem lehet teljes, mert ha $f(x) = g(x) - \int_0^1 g(x)\,dx$, az $f(x)$ függvény az összes $g_{m_1 m_2 \ldots m_k}(x)$ függvényekhez ortogonális lesz. A Rademacher-függvények példája kézenfekvővé teszi a következő sejtést: ha a $\{g_n(x)\}$ független függvények rendszere a *függetlenségre nézve telített*, azaz nincs olyan nem majdnem mindenütt állandó függvény, amelyet a $\{g_n(x)\}$ rendszerhez hozzácsatolva a rendszer független maradna, akkor az összes lehetséges (9) alakú függvények rendszere teljes. Ezt a sejtést elsőnek *H. Steinhaus* fogalmazta meg 1937-ben, amikor egy előadásában[5] azt mondotta a fenti kérdéssel kapcsolatban: »itt nyilvánvalóan egy általános törvénnyel állunk szemben, amelyet azonban nem sikerült bebizonyítanom« (»il y a évidemment une loi générale, que nous n'avons pas réussi à démontrer«). Sok példát lehet felsorolni, amelyek az említett sejtést alátámasztják. Így például, ha a $\{g_n(x)\}$ rendszer egyetlen függvényből, mégpedig a $g_1(x) = x$ függvényből áll, a (9) rendszer az x^n függvényekből áll ($n = 0, 1, 2, \ldots$), az $\{x^n\}$ függvényrendszer, mint ismeretes, teljes. Egy másik példa, amelyet *H. Steinhaus* is említ[5], a következő: a $\{g_n(x)\}$ függvényrendszer álljon két függvényből: $g_1(x) = g(x)$ és $g_2(x) = f(x)$ legyenek folytonosak és $u = g(x)$, $v = f(x)$ legyenek egy Peano-féle görbe paraméteres egyenletei, azaz olyan görbéé, amely a (0, 1) intervallumot az egységnégyzetre folytonos és mértéktartó módon képezi le. Egy harmadik példát *W. Sierpiński*[6] nyomán úgy nyerünk, hogy a $g_n(x)$ függvényrendszernek a $g_{n+1}(x) = g_n(g(x))$ $(n = 1, 2, \ldots)$; $g_1(x) = f(x)$ rekurzív relációk által definiált függvények rendszerét választjuk, ahol $u = g(x)$ és $v = f(x)$ az előbb említett Peano-görbe paraméteres egyenletei.

Mindezekben a példákban a $\{g_n(x)\}$ rendszer függetlenségre nézve telített, a $\{g_{m_1 m_2 \ldots m_k}(x)\}$ rendszer viszont teljes. Az első példában utóbbi rendszer az $\{x^n\}$ függvényrendszer; mivel, mint ismeretes, az L^2-térhez tartozó

[5] *H. Steinhaus*, La théorie et les applications des fonctions indépendantes au sens stochastique, (Paris,1938), 70. o.

[6] *W. Sierpiński, Wiadomosci Matematyczne, 42* (1936) 1.

függvények rendszerének teljessége ezen függvények rendszerének zártságával ekvivalens, tehát az $\{x^n\}$ rendszer teljessége ekvivalens Weierstrass ismert approximáció-tételével, amely ilyen módon a *Steinhaus* által sejtett általános törvényszerűség speciális esetének tekinthető.

Steinhaus sejtése mindmáig bebizonyítatlan maradt*. Előadásomban egy *Steinhaus* sejtéséhez közel álló általános tételt fogok bebizonyítani, amely fényt vet a felsorolt tények mélyebb okaira. Eredményeim azonban még nem adják a felmerülő problémák teljes megoldását, amennyiben csak olyan függvények rendszerére vonatkoznak, amely függvények mindegyike csak véges sok különböző értéket vesz fel, más szóval lépcsős-függvények rendszerének vizsgálatára szorítkozom. Úgy hiszem azonban, hogy ez a megszorítás nem lényeges és kiküszöbölhető lesz.

A tétel megfogalmazásához szükségünk lesz a maximális függvényrendszerek fogalmára, amely fogalmat egy előző dolgozatomban vezettem be[7]. A $(0, 1)$ intervallumon értelmezett és egyenként csak véges sok értéket felvevő mérhető függvényekből álló $\{g_n(x)\}$ függvényrendszert akkor nevezzük *maximálisnak*, ha az x valós szám a $g_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ értékek által egyértelműen meg van határozva x minden értékére, (kivéve esetleg egy 0-mértékű halmaz pontjait). Más szóval a $\{g_n(x)\}$ függvényrendszert akkor nevezzük maximálisnak, ha $g_n(x_1) = g_n(x_2)$ akkor állhat fenn csak n minden pozitív egész értékére, ha $x_1 = x_2$ vagy ha úgy x_1, mint x_2 egy bizonyos 0-mértékű H halmazhoz tartoznak.

Könnyű bebizonyítani, hogy *független függvények maximális rendszere a függetlenségre nézve telített*. Ezt direkt úton is bebizonyíthatnánk, de erre nincs szükség, tekintve, hogy ez közvetve következik abból, hogy, amint már láttuk, a $\{g_n(x)\}$ rendszer függetlenségre vonatkozó telítettsége a $\{g_{m_1 m_2 \cdots m_k}(x)\}$ rendszer teljességének szükséges feltétele és be fogjuk viszont bizonyítani, hogy a $\{g_n(x)\}$ függvényrendszer maximalitása a $\{g_{m_1 m_2 \cdots m_k}(x)\}$ függvényrendszer teljességének elégséges feltétele; így tehát a maximalitás feltételéből a telítettségnek következnie kell. A közvetlen bizonyítás eléggé kézenfekvő, de arra kitérni itt nincs helyünk.

A maximalitás fogalmát kiterjeszthetjük tetszőleges mérhető függvényekből álló sorozatokra is. Általában fennáll, hogy a független függvények sorozatának maximalitása maga után vonja a függetlenségre nézve való telítettséget. Ez azért is fontos, mert a maximalitás bizonyítása konkrét esetekben gyakran egyszerűbb, mint a függetlenségre nézve való telítettség bizonyítása.

* Időközben sikerült kimutatnom, hogy minden külön feltevés nélkül *Steinhaus* sejtése nem érvényes. Példa erre az $f(x) = x$, ha $0 \leq x \leq 1/2$; $f(x) = 1$, ha $1/2 < x \leq 1$ függvény, amely önmagában függetlenségre nézve telített rendszert alkot, azonban az $\{f^n(x)\}$ rendszer nem teljes a $(0, 1)$ intervallumban.

[7] *A. Rényi*, K tyeorii pregyelnih tyeorem dlja szumm nyezaviszimih szlucsajnih velicsin, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, *1* (1950), 99—108. Folytonos függvényekre ez a fogalom szerepel M. H. *Stone* egy munkájában (Trans. Amer. MaK. Soc. 41 (1937) 375—481.)

Nézzük például a fentebb említett *Steinhaus*tól származó példát. Induljunk ki egy x valós szám diadikus előállításából: legyen

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{2^n} \qquad (0 \leqq x < 1), \tag{10}$$

ahol $e_n = 0$ vagy $= 1$; a rövidség kedvéért, ha (10) fennáll, írjuk azt, hogy $x = 0, e_1 e_2 \ldots e_n \ldots$. Legyen $g(x) = 0, e_2 e_4 e_6 \ldots$ és $f(x) = 0, e_1 e_3 e_5 \ldots$ Az $u = g(x)$, $v = f(x)$ paraméteres egyenletek által definiált görbe ú. n. Peano-görbe, azaz ha x végigfut a (0, 1) intervallumon, a görbe egy 0-mértékű halmaztól eltekintve egyszer és csak egyszer halad át az egységnégyzet minden pontján. Mármost nyilvánvaló, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvényekből álló rendszer maximális, hiszen $f(x)$ és $g(x)$ diadikus kifejtésében szereplő jegyek sorozatait »egymásbatolva« megkapjuk x diadikus kifejtését és így magát x-et. Még nyilvánvalóbb az $f(x) = x$ függvényből álló rendszer maximalitása (x meghatározza önmagát). Végül nézzük meg a *Sierpiński* által vizsgált függvényrendszert. Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeket ugyanúgy értelmezzük, mint az előbb, akkor, ha újból $x = 0, e_1 e_2 \ldots e_n \ldots$ és $g_1(x) = f(x)$, $g_{n+1}(x) = g_n(g(x))$ $(n = 1, 2, \ldots)$, akkor

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 0, e_1 e_3 \cdots e_{2n+1} \cdots, \\ g_2(x) &= 0, e_2 e_6 \cdots e_{4n+2} \cdots, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ g_n(x) &= 0, e_{2^{n-1}} e_{3\cdot 2^{n-1}} \cdots e_{(2k+1)2^{n-1}} \cdots, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned} \tag{11}$$

más szóval x diadikus kifejtésének minden jegye a $g_n(x)$ számok diadikus kifejtései közül pontosan egyben fordul elő, mégpedig ha $m = 2^{n-1}(2k+1)$, akkor e_m $g_n(x)$ diadikus kifejtésében a $(k+1)$-ik jegy; ily módon tehát a $g_n(x)$ számok ismeretében x-et meghatározhatjuk, vagyis a $\{g_n(x)\}$ függvényrendszer maximális.

Egy $\{g_n(x)\}$ függvényrendszer maximalitását a következőképpen is megfogalmazhatjuk: a (0, 1) intervallum minden x pontjához hozzárendeljük a végtelen számsorozatok terének egy pontját, mégpedig az $(a_1, a_2, \ldots) = A(x)$ pontot, ahol $a_n = g_n(x)$. A $\{g_n(x)\}$ függvényrendszert akkor nevezzük maximálisnak, ha ez a leképezés a (0, 1) intervallum egy 0-mértékű részhalmazától eltekintve egy-egyértelmű.

Térjünk most át a már fentebb említett tétel pontos megfogalmazására és bebizonyítására.

Tétel: Legyen $\{g_n(x)\}$ *a* (0, 1) *intervallumban értelmezett mérhető függvények maximális rendszere; feltesszük, hogy* $g_n(x)$ *csak véges sok különböző értéket vesz fel. Akkor a*

$$g_{m_1 m_2 \cdots m_k}(x) = g_1^{m_1}(x) \cdot g_2^{m_2}(x) \cdots g_k^{m_k}(x) \tag{12}$$

függvények összessége $(m_i = 0, 1, 2, \ldots, i = 1, 2, \ldots, k; k = 1, 2, \ldots)$ *teljes függvényrendszert képez**.

Nézzük most ennek a tételnek a bizonyítását. Legyenek $g_n(x)$ összes lehetséges értékei $g_{n1}, g_{n2}, \ldots, g_{nk_n}$, mégpedig $g_n(x) = g_{ni}$, ha $x \in E_{ni}$ (másszóval E_{ni}-vel jelöljük a (0, 1) intervallum azon pontjainak összességét, amelyekben $g_n(x)$ a g_{ni} értéket veszi fel); feltevésünk szerint az E_{ni} halmazok mérhetőek. Könnyű belátni, hogy a $\{g_n(x)\}$ függvényrendszer maximalitásából következik, hogy az $\{E_{ni}\}$ halmazrendszer $(i = 1, 2, \ldots, k_n; n = 1, 2, \ldots)$ bázist alkot a (0, 1) intervallumban a Lebesgue-féle mértékre nézve. Ugyanis ismeretes[2], hogy Lebesgue-féle mérték esetén a bázis definíciójában szereplő két feltétel közül az 1) feltétel teljesülése már maga után vonja a 2) feltétel teljesülését, és így csak azt kell kimutatnunk, hogy az 1) feltétel teljesül, azaz ha $x \neq y$, akkor található az $\{E_{ni}\}$ halmazrendszernek olyan eleme, amely az x és y pontok közül az egyiket tartalmazza, de a másikat nem, kivéve esetleg egy bizonyos 0-mértékű halmazhoz tartozó x és y pontokat. Feltevésünk szerint a $\{g_n(x)\}$ függvényrendszer maximális; ez azt jelenti, hogy ha x és y nem tartoznak egy bizonyos 0-mértékű kivételes halmazhoz, akkor található olyan n pozitív egész szám, hogy $g_n(x) \neq g_n(y)$; ha $g_n(x) = g_{ni}$, akkor E_{ni} a keresett halmaz, vagyis állításunkat bebizonyítottuk. A fenti meggondolásból az is világos, hogy az állítás megfordítása is igaz: ha az $\{E_{ni}\}$ halmazrendszer bázist alkot, akkor a $\{g_n(x)\}$ függvényrendszer maximális. Ilyen módon — véges sok különböző értéket felvevő függvények esetében — a maximális függvényrendszer új definícióját nyerjük. Ezzel kapcsolatban meg kell jegyeznünk, hogy ha a $g_n(x)$ függvényekre vonatkozólag semilyen megszorítást sem teszünk, akkor is adható a maximalitásnak a fentihez hasonló definíciója: jelentse E_{nrs} a (0, 1) intervallum azon x pontjainak összességét, amelyekre nézve fennáll, hogy $r \leq g_n(x) < s$, ahol r és s racionális számok $(r < s)$. A $\{g_n(x)\}$ függvényrendszer akkor és csak akkor lesz maximális, ha az $\{E_{nrs}\}$ halmazrendszer — ahol (r, s) az összes rendezett racionális számpárokon és n az összes pozitív egész számokon fut végig — bázist alkot a (0, 1) intervallumban. Ez lényegében ugyanúgy látható be, mint a fent tárgyalt speciális esetben az analóg állítás

*Időközben sikerült az alábbi tételt általánosítanom és kimutatnom, hogy az a feltevés, hogy $g_n(x)$ csak véges sok különböző értéket vesz fel, elhagyható. (Megjegyzés a korrektúránál, 1951. IX. 10.)

(ha $g_n(x)$ csak véges sok különböző értéket vesz fel ($n = 1, 2, \ldots$) akkor az $\{E_{ni}\}$ és $\{E_{nrs}\}$ halmazrendszerek azonosak!).

Legyen most

$$B_{i_1 i_2 \ldots i_n} = E_{1i_1} \cdot E_{2i_2} \cdots E_{ni_n}. \tag{13}$$

A $B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ halmazok ($i_j = 1, 2, \ldots, k_j$; $j = 1, 2, \ldots, n$) nyilván páronként idegenek és együtt lefedik a $(0, 1)$ intervallumot (az n számot itt rögzítettük). Be fogjuk bizonyítani, hogy minden olyan $g(x)$ függvény, amely a $B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ halmazok mindegyikén állandó, előállítható, mint a (12) által definiált függvényrendszer azon függvényeinek lineáris kombinációja, ahol m_j a $0, 1, 2, \ldots, k_j - 1$ értékeken futhat végig és $j = 1, 2, \ldots, n$. Tegyük fel ugyanis, hogy

$$g(x) = b_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \text{ ha } x \in B_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \tag{14}$$

és keressük $g(x)$-et a következő alakban:

$$g(x) = \sum_{m_1=0}^{k_1-1} \sum_{m_2=0}^{k_2-1} \cdots \sum_{m_n=0}^{k_n-1} c_{m_1 m_2 \ldots m_n} g_{m_1 m_2 \ldots m_n}(x); \tag{15}$$

ez azt jelenti, hogy a $c_{m_1 m_2 \ldots m_n}$ együtthatókat oly módon kell meghatároznunk, hogy fennálljanak a

$$b_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_{m_1=0}^{k_1-1} \sum_{m_2=0}^{k_2-1} \cdots \sum_{m_n=0}^{k_n-1} c_{m_1 m_2 \ldots m_n} g_{1 i_1}^{m_1} g_{2 i_2}^{m_2} \ldots g_{n i_n}^{m_n} \tag{16}$$

egyenletek. A (16) $k = k_1 k_2 \ldots k_n$-rendű lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának bebizonyításához csak az szükséges, hogy kimutassuk, hogy a rendszer determinánsa 0-tól különbözik. Ez viszont következik *Hajós György* egy determinánstételéből[8], amely *Kronecker* és *Rados*[9] egy determinánstételét általánosítja.

Mivel az $\{E_{ni}\}$ halmazrendszer bázis, abból, hogy minden a $B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ halmazokon állandó függvény előállítható, mint a (12) függvények lineáris kombinációja, következik, hogy minden mérhető lépcsősfüggvény, és így minden az L^2 függvénytérhez tartozó függvény tetszőleges pontossággal approximálható a (12) függvények lineáris kombinációival az L^2 tér metrikájában, vagyis a (12) függvényrendszer az L^2 függvénytérben zárt. Mármost jól ismeretes[10], hogy egy az L^2 függvénytérben zárt függvényrendszer szükségképpen teljes.

Ilyen módon a (12) függvényrendszer zártságából annak teljessége és így tételünk következik.

[8] *Hajós Gy.*, Egy determináns-tétel, *Mat. Term. Tud. Ért.*, *50* (1933), 231—240.

[9] *Rados G.*, Egy determináns-tétel általánosítása, *Mat. Term. Tud. Ért.*, *46* (1929), 724—737.

[10] *St. Kaczmarz—H. Steinhaus*, Theorie der Orthogonalreihen, (Warszawa—Lwów, 1935), 83. o.

STOCHASTICAL INDEPENDENCE AND COMPLETE SYSTEMS OF FUNCTIONS

By ALFRÉD RÉNYI (Budapest)

Let $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots$ be a system of measurable stochastically independent, functions on the interval $(0,1)$. Let us suppose that this system is saturated concerning independence, i. e. that if $g(x)$ is not almost everywhere constant, the system of functions $g(x), g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots$ can not be independent. *H. Steinhaus* conjectured[5] that in this case if the functions

$$(1) \qquad g_1^{m_1}(x)\, g_2^{m_2}(x) \ldots g_n^{m_n}(x)\, (i=1,2,\ldots,n;\ m_i=0,1,2,\ldots;\ n=1,2,\ldots)$$

belong to the space L^2, the system (1) is complete in this space. This assertion is proved in the present paper under slightly stronger suppositions*. The system of measurable functions $\{g_n(x)\}$ is called maximal, if for almost every x and $y \neq x$ there can be found a positive integer n for which $g_n(x) \neq g_n(y)$. Using this notion, the author proves the following

Theorem; Let $\{g_n(x)\}$ denote a maximal system of measurable independent functions in the interval $(0,1)$, *and let us suppose that the number of possible different values of $g_n(x)$ is finite for every $n=1, 2, 3, \ldots$ It follows that the system* (1) *is complete in* L^2.

It is stated that the condition that each function has only a finite number of different values, could be dispensed with. It is shown, that the condition of maximality is fulfilled in all examples mentioned by *H. Steinhaus*[5], further that a maximal system of independent functions is saturated concerning independence.

The notion of maximality has been introduced by the author in a previous paper[7], where other important consequences of the maximality of a system of independent functions (or a system of independent random variables) are proved.

* Without supplementary conditions the conjecture does not hold, as it is shown by the system consisting of the single function $f(x)=x$ if $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$, $f(x)=1$ if $\frac{1}{2} < x \leqq \leqq 1$, which is saturated concerning independence, but the system $\{f^n(x)\}$ is not complete.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ И ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

АЛЬФРЕД РЕНЬИ (Будапешт)

Понятие стохастической независимости играет большую роль в теории вероятностей. Акад. *А. Н. Колмогоров* в своей книге »Основные понятия теории вероятностей« указал на то, что понятие независимости занимает центральное положение в теории вероятностей и, что исторически понятие независимости определил специфический характер теории вероятностей.

Логически строгое обоснование теории вероятностей вообще и понятия независимости в частности было дано *А. Н. Колмогоровым* в вышеупомянутой его книге; математическое понятие независимости хорошо отражает объективные отношения реального мира.

Пусть $\mathfrak{E}$ — произвольное множество, элементы которого будем обозначать строчными буквами: $a, b, c, \ldots$ пусть далее F борелевское поле подмножеств множества $\mathfrak{E}$, элементы от F будем обозначать прописными буквами $A, B, C, \ldots$; предположим, что само $\mathfrak{E} \in F$. Пусть наконец $\mu(A)$ $(A \in F)$ абсолютно аддитивная, неотрицательная функция множеств и $\mu(\mathfrak{E}) = 1$.

Иными словами, мы рассматриваем поле вероятностей в смысле теории *А. Н. Колмогорова.* Для краткости обозначим это поле вероятностей через $(\mathfrak{E}, F, \mu)$. Измеримую относительно μ вещественную функцию $\xi = \xi(a)$ определенную на $\mathfrak{E}$ называем случайной величиной и через $E(\xi < x)$ обозначим множество тех $a \in \mathfrak{E}$, для которых $\xi(a) < x$.

Функцию $F(x) = \mu(E(\xi < x))$ называем функцией распределения случайной величины ξ. Подобным образом множество тех элементов a от M для которых одновременно выполнены условия $\xi_1(a) < x_1, \xi_2(a) < x_2, \ldots, \xi_n(a) < x_n$ обозначим через $E(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n)$; функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu(E(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n))$ называем совместной функцией распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Поле вероятностей $(\mathfrak{E}, F, \mu)$ называем сепарабельным, если существует счетная система $\mathbf{B} = (B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots)$ подмножеств, принадлежащих к F, так, что выполнены следующие два условия: 1. Для любой пары различных элементов a, b множества $\mathfrak{E}$ (кроме быть может для элементов множества меры 0) существует множество B_n, которое содержит только одну из элементов a, b. 2. Для всякого $A \in F$ существует множество B, которое принадлежит к наименьшему борелевскому полю, которое содержит все множества B_n, так, что B содержит A и $\mu(B-A) = 0$, т. е. B тождественно с A mod 0. Если условия 1. и 2. выполнены, то система **B** называется базисом поля $(\mathfrak{E}, F, \mu)$.

Введем следующие обозначения: пусть $B^1 = B$ и $B^{-1} = \mathfrak{E} - B$. Если $\mathbf{B} = (B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots)$ — базис поля вероятностей $(\mathfrak{E}, F, \mu)$, рассмотрим все возможные множества вида $\prod_{n=1}^{\infty} B_n^{\varepsilon_n}$ где $\varepsilon_n = 1$ или $= -1$; поле вероятностей $(\mathfrak{E}, F, \mu)$ называется полным относительно своего базиса **B** если все эти множества непусты (и следовательно, одноточечны). Если поле вероятностей $(\mathfrak{E}, F, \mu)$ может быть сделан полным относительно своего базиса **B** путем изменения на множество меры 0, то $(\mathfrak{E}, F, \mu)$ называется mod 0 полным относительно **B**.

Сепарабельное и mod 0 полное поле вероятностей $(\mathfrak{E}, F, \mu)$ называем полем вероятностей типа *Lebesgue*-а, и функцию множеств называем в этом случае мерой *Lebesgue*-а. Если все одноточечные множества имеют меры 0, то мера μ называется непрерывной.

В дальнейшем всегда предполагаем, что μ — непрерывная мера *Lebesgue*-а. Известно, что в этом случае поле вероятностей $(\mathfrak{E}, F, \mu)$ является изоморфным с полем, в котором $\mathfrak{E}$ — интервал (0,1), F — множество всех измеримых подмножеств интервала (0,1) и μ — обыкновенная мера *Lebesgue*-а. Таким образом можно было бы сразу исходить из того, что $\mathfrak{E}$ — интервал (0,1) и μ мера *Lebesgue*-а; так мы придем к понятию независимых функций.

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называются независимыми, если для всех вещественных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет место

$$(1) \qquad \mu(E(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n)) = \prod_{k=1}^{n} \mu(E(\xi_k < x_k)).$$

Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$, то скажем, что $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ является последовательностью независимых случайных величин.

Есл для $\mathfrak{E}$ принимаем интервал (0,1), и для μ — меру *Lebesgue*-а, тогда случайные величины будут все измеримые функции $\xi = f(x)$ вещественного переменного $t \in (0,1)$ итак получается понятие *стохастически независимых функций.*

Из известных свойств независимых функций отметим лишь одно: интеграл от произведений независимых функций равно произведению от интегралов этих функций; т. е. если $f_1(x), f_2(x), \ldots$ и $f_n(x)$ независимые функции в интервале (0,1), то имеем

$$(2)\qquad \int_0^1 f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_n(x)\, dx = \int_0^1 f_1(x)\, dx \,.\, \int_0^1 f_2(x)\, dx \ldots \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

(предполагая конечно существование этих интегралов). Если $f(x)$ и $g(x)$ независимы, то $f^n(x)$ и $g^m(x)$ также независимы $(n, m = 1, 2, 3, \ldots)$ и поэтому должен быть

$$(3)\qquad \int_0^1 f^n(x)\, g^m(x)\, dx = \int_0^1 f^n(x)\, dx \cdot \int_0^1 g^m(x)\, dx.$$

Интересно заметить, что — как это доказал *М. Кас* — имеет место и обратная теорема: если (3) верно для всех натуральных n и m, то $f(x)$ и $g(x)$ независимы.

Теория стохастически независимых функций тесно связана с теорией ортогональных систем. Пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность независимых функций, которые интегрируемые вместе с их квадратами, т. е. принадлежат к пространству L^2. Пусть $\int_0^1 f_n(x)\, dx = a_n$ и $\int_0^1 (f_n(x) - a_n)^2\, dx = b_n^2$ и положим $g_n(x) = \dfrac{f_n(x) - a_n}{b_n}$ когда $b_n \neq 0$ т. е. когда $f_n(x)$ не постоянная почти всюду; что касается постоянных, предположим, что в системе $\{f_n(x)\}$ имеется не более одной постоянной функции; если $f_{k_0}(x) \equiv c$, положим $g_{k_0}(x) \equiv 1$. Легко убедиться, что система $\{g_n(x)\}$ ортогональная и нормированная, так как

$$(4)\qquad \int_0^1 g_n(x) g_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 \text{ если } n \neq m, \\ 1 \text{ если } n = m. \end{cases}$$

Здесь приходится говорить о полных системах функций. Система $\{g_n(x)\}$ $(g_n(x) \in L^2)$ называется полной, если

$$(5)\qquad \int_0^1 f(x)\, g_n(x)\, dx = 0$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$ где $f(t) \in L^2$, может иметь место только если $f(x) = 0$ почти всюду.

Ортогональная система $\{g_n(x)\}$ о которой говорилось выше, не может быть полной, так как например $g_1(x) g_2(x)$ не может быть ровно 0 почти всюду, но (5) имеет место для всех $n = 1, 2, \ldots$ если $f(x) = g_1(x)\, g_2(x)$ (для этого достаточно уже, если функции $g_n(x)$ независимы по трем). Известно, что ортогональные системы $\{g_n(x)\}$ независимых функций принадлежат к так называемым лакунарным ортогональным системам.

Посмотрим некоторые примеры.

Пусть $R_n(x) = \mathrm{sg}(\sin 2^{n-1}\pi x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ т. е. рассмотрим функции *Rademacher*-а. Эти функции независимы и образуют известную лакунарную ортогональную систему. Прибавляем к системе $\{R_n(x)\}$ все их произведения, т. е. рассмотрим все функции вида

$$(6)\qquad W_N(x) = R_{n_1}(x)\, R_{n_2}(x) \ldots R_{n_k}(x), \text{ где } N = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_k}$$

и получим *полную* ортогональную систему *Walsh*-а. Если из системы $\{R_n(x)\}$ выбросим хотя бы одну функцию $R_{n^*}(x)$ и посмотрим систему функций (6), где $n_i \neq n^*$, $i = 1, 2, \ldots, k$, эта система уже не будет полной, так как все эти функции ортогональны к $R_{n^*}(x)$. Вообще, если $\{g_n(x)\}$ — некоторая система независимых функций, и существует такая не почти всюду постоянная функция $g(x)$, что прибавляя эту функцию к системе $\{g_n(x)\}$ она остается системой независимых функций, то система всех возможных функций вида

$$(7)\qquad g_{m_1 m_2 \ldots m_k}(x) = g_1^{m_1}(x).\ g_2^{m_2}(x) \ldots g_k^{m_k}(x)$$

(где $m_1, m_2, \ldots, m_k$ принимают все неотрицательные целые значения и $k = 1, 2, \ldots$), не может быть полной, так как функция $f(x) = g(x) - \int\limits_0^1 g(x)\,dx$ ортогональна ко всем функциям вида (7).

Однако, пример функций *Rademacher*-а вызывает гипотезу, что в случае, если система $\{g_n(x)\}$ *насыщенная* по независимости — т. е. если нет такой не почти всюду постоянной функции $g(x)$, что $g(x), g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$ были бы также независимым, — тогда система (7) будет полной. Эту гипотезу сформулировал *H. Steinhaus* в 1937 г., в своем докладе, прочитанном на женевском конгрессе[5], когда он об этом высказал, что »здесь явно должен иметь место некоторый общий закон, которого однако, мне не удалось доказать«.

Можно указать на многие примеры, которые поддерживают эту гипотезу. Так, например, если система $\{g_n(x)\}$ состоит из единственной функции $g_1(x) = x$, система (7) есть система функции x^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, которая, как хорошо известно, является полной. Другой пример, на который *Steinhaus* указал, получается, если за систему $\{g_n(x)\}$ принимаем систему двух функций $g(x)$ и $f(x)$, где $u = g(x)$, $v = f(x)$ есть параметрическое представление некоторой кривой Peano (эта кривая отображает интервал (0, 1) на квадрат $0 \leqq u < 1$, $0 \leqq v < 1$ непрерывным образом и это отображение сохраняет меру).

Третий пример, получается если построим, следуя *W. Sierpiński*, систему функции $\{g_n(x)\}$ таким образом:

$$g_{n+1}(x) = g_n(g(x)) \text{ и } g_1(x) = f(x), \text{где } u = g(x),\ v = f(x)$$

опять параметрические уравнения упомянутой кривой Peano.

Во всех этих примерах система $\{g_n(x)\}$ является насыщенной по независимости и система (7) полной.

До сих пор не известно при каких необходимых и достаточных условий верна гипотеза *Steinhaus*-а*. В настоящем докладе докажем общую теорему, которая в некотором смысле дает ответ на вопрос *Steinhaus*-а. Однако, мой результат еще не дает окончательного решения всей проблемы, так как он относится только к системам функций, каждая из которых принимает лишь конечное число различных значений. Впрочем мне кажется, что это не является существенным ограничением.

Для формулировки нашей теоремы нужно вести понятие максимальных последовательностей функции; это понятие** введено в моей работе.[7] Последовательность измеримых функций $\{g_n(x)\}$ определенных в интервале (0,1) будем называть максимальной, каждое из которых принимает лишь конечное число различных значений, если каждое $x \in (0,1)$ (кроме, быть может, точки некоторого исключительного множества меры 0) однозначно определяется значениями $g_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$ Иными словами последовательность $\{g_n(x)\}$ называется максимальной, если $g_n(x_1) = g_n(x_2)$ для $n = 1, 2, \ldots$ возможно только если $x_1 = x_2$, или, если x_1 и x_2 принадлежат к некоторому множеству меры 0.

Легко доказать, что максимальная последовательность *независимых* функций всегда является насыщенной по независимости. Это можно доказать прямым путем, но для функции с конечным числом различных значений этот результат получается также косвенным образом, из того, что — как мы уже видели — насыщенность относительно независимости системы $\{g_n(x)\}$ является необходимым условием полноты системы (9) и мы будем доказывать (см. теорему ниже), что максимальность системы $\{g_n(x)\}$ является достаточным условием полноты системы (7); таким образом из условия максимальности следует, что система насыщенная по независимости. Здесь нет места изложить прямое доказательство этого факта, хотя это доказательство не является трудным.

Понятие максимальности может быть распространено на случай последовательностей любых измеримых функций и в общем случае тоже

* Следующии пример показывает что гипотеза *Steinhaus*-а без дополнительных условиях вообще не верна: пусть $f(x) = x$ если $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ и $f(x) = 1$ если $\frac{1}{2} < x \leqq 1$, тогда сама $f(x)$ образует систему насыщенную по независимости но система $\{f^n(x)\}$ не является полной.

** Для непрерывных функций это понятие введено в работе M. H. Stone-a. См. 7.

верно, что максимальность последовательности независимых функций влечет за собою насыщенность по независимости. Это важно, например и потому, что во многих примерах доказательство максимальности легче, чем доказательство насыщенности.

Например пусть

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{2^n}, \tag{8}$$

где $e_n = 0$ или 1 — диадическое разложение числа x; если (8) имеет место, для краткости пишем $x = 0, e_1 e_2 \ldots e_n \ldots$; положим $f(x) = 0, e_1 e_3 \ldots$ и $g(x) = 0, e_2 e_4 \ldots$

Кривая с параметрическими уравнениями $u = f(x)$, $v = g(x)$ $(0 \leqq x < 1)$ есть кривая Peano, т. е. непрерывным образом отображает отрезок (0,1) на единичный квадрат $(0 \leqq u < 1, 0 \leqq v < 1)$. Очевидно, система $\{f(x), g(x)\}$ является максимальной. В качестве другого примера посмотрим систему *Sierpiński*: $\{g_n(x)\}$, где $g_1(x) = f(x)$ и $g_{n+1}(x) = g_n(g(x))$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где $f(x)$ и $g(x)$ определены как в первом примере. Тогда имеем

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 0, e_1 \; e_3 \ldots e_{2n+1}, \\ g_2(x) &= 0, e_2 \; e_6 \ldots e_{4n+2}, \\ &\vdots \\ g_k(x) &= 0, e_{2^{k-1}} \; e_{3\cdot 2^{k-1}} \ldots e_{2^{k-1}(2n+1)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Значит, каждая цифра e_m диадического разложения числа x найдется в диадическом разложении одной функции $g_k(x)$ (если $m = 2^{k-1}(2n+1)$, то e_m есть $(n+1)$-я цифра в разложении числа $g_k(x)$ и, поэтому если известно значение каждого $g_k(x)$, само x однозначно определено.

Переидем теперь к точному изложению и доказательству нашей теоремы.

Теорема: *Пусть* $\{g_n(x)\}$ — *максимальная система независимых измеримых функций определенных в интервале* (0,1) *каждая из которых принимает лишь конечное число различных значений; тогда система функций.*

(10) $g_{m_1 m_2 \ldots m_k}(x) = g_1^{m_1}(x)\, g_2^{m_2}(x) \ldots g_k^{m_k}(x)$ $(m_i = 0, 1, 2, \ldots;\ i \leqq k, k = 1, 2, \ldots)$ *является полной.**

Доказательство теоремы: Обозначим возможные значения от $g_n(x)$ через g_{ni} $(i \leqq k_n)$; пусть $g_n(x) = g_{ni}$ если $x \in E_{ni}$ другими словами E_{ni} означает множество тех точек x интервала (0,1), для которых $g_n(x) = g_{ni}$; множества E_{ni} по предположению измеримы. Легко убедиться, что система множеств $\{E_{ni}\}$ есть базис всех измеримых множеств в интервале

* Недавно мне удалось доказать, что условия что функуии $g_n(x)$ принимают лишь конечное число различных значений, может быть опущена.

(0,1). В самом деле известно (см.[2]) что в случае меры *Lebesgue*-а, из двух условий в определении базиса первое влечет за собою второе, и, поэтому для того, чтобы доказать, что система $\{E_{ni}\}$ есть базис, достаточно доказать, что если $x \neq y$ (x и y точки интервала $[0,1]$), найдется множество E_{ni}, которое содержит только одну из точек x, y (кроме, быть может, для точек x, y некоторого множества меры 0, иными словами — почти всегда).

Но мы предполагали, что система функций $\{g_n(x)\}$ максимальная, поэтому если $x \neq y$ почти всегда находится такое натуральное n_0 что $g_{n_0}(x) \neq g_{n_0}(y)$; если $g_{n_0}(x) = g_{n_0 i_0}$ то $E_{n_0 i_0}$ содержит x но не содержит y. Прочем, из этого рассуждения ясно, что имеет место и обратный случай: если система множеств $\{E_{ni}\}$ есть базис, то система функций $\{g_n(x)\}$ максимальна. Мы получили таким образом новое определение максимальной системы функций (каждая из которых принимает лишь конечное число различных значений. В общем случае тоже имеется подобное определение: пусть E_{nrs} множество тех точек x для которых $r \leqq g_n(x) < s$ где r и s рациональные числа $(r < s)$; система функций $\{g_n(x)\}$ максимальна тогда и только тогда, если система $\{E_{nrs})$ где r, s принимают все рациональные значения — есть базис. (В частном случае, если все $g_n(x)$ принимают лишь конечное число различных значений, система $\{E_{nrs}\}$ и $\{E_{ni}\}$ тождественны).

Положим

$$B_{i_1 i_2 \ldots i_n} = E_{1 i_1} E_{2 i_2} \ldots E_{n i_n}. \tag{11}$$

Множества $B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ $(i_j \leqq k_j;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ попарно не пересекаются и покрывают интервал $(0, 1)$, (здесь значение n прикреплено). Докажем прежде всего, что всякая функция $g(x)$ которая постоянная на каждом из множества $B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, может быть представлена в виде суммы

$$g(x) = \sum_{m_1=0}^{k_1-1} \sum_{m_2=0}^{k_2-1} \ldots \sum_{m_n=0}^{k_n-1} c_{m_1 m_2 \ldots m_n} g_{m_1 m_2 \ldots m_n}(x), \tag{12}$$

где коэффициенты $c_{m_1 m_2 \ldots m_n}$ постоянны. На самом деле, пусть

$$g(x) = b_{i_1 i_2 \ldots n} \quad \text{если} \quad x \in B_{i_1 i_2 \ldots i_n}. \tag{13}$$

Для того, чтобы (12) имело место, коэффициенты $c_{m_1 m_2 \ldots m_n}$ должны быль определены, как решения системы линейных уравнений

$$b_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_{m_1=0}^{k_1-1} \sum_{m_2=0}^{k_2-1} \cdots \sum_{m_n=0}^{k_n-1} c_{m_1 m_2 \ldots m_n} g_{1 i_1}^{m_1} g_{2 i_2}^{m_2} \cdots g_{n i_n}^{m_n} \tag{14}$$

$$(i_j \leqq k_j;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Для того, чтобы доказать, что система линейных уравнений (14) имеет решение, необходимо убедиться, что определитель этой системы отличен от нуля. Это следует из теоремы *G. Hajós*[8]; его теорема в своей очереди является обощением теоремы *Kronecker* и *Rados*[9] об определителях.

Так как система мно жеств $\{E_{ni}\}$ есть базис, и всякая функция, которая постоянна на каждом из множеств $B_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ есть линейная комбинация функции $g_{m_1 m_2 \ldots m_n}(x)$, следует, что всякая измеримая кусочно постоянная функция, и потому также всякая функция пространства L^2 может быть приближена в метрике пространства L^2 с какой либо точностью с помощью линейных комбинаций функций системы (10) — иными словами: система функции (10) является замкнутой в пространстве L^2.

Однако, как известно,[10] в пространстве L^2 всякая замкнутая система является полной, поэтому система (10) полная и наша теорема доказана.

Отмечаем лишь, что понятие максимальных систем независимых случайных величин оказалось полезным и в других отношениях. В работе[7] доказаны некоторые другие интересные свойства таких систем.