GÉPIPARI ÜZEMEK ELEKTROMOS ENERGIASZÜKSÉGLETÉNEK ÉS EGYIDEJŰSÉGI, ILLETŐLEG SZÜKSÉGLETI TÉNYEZŐJÉNEK VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI MEGHATÁROZÁSA

RÉNYI ALFRÉD és SZENTMÁRTONY TIBOR

ÖSSZEFOGLALÁS

Gépipari üzemek *tényleges* teljesítménye (időegység alatti energiafogyasztása) elméletileg *lehetséges* maximumát, ú. n. *beépített* teljesítményét nagy gépszámnál általában nem éri el, hanem jóval ez alatt ingadozik. A kettő hányadosának gyakorlatilag még számbavehető valószínűségű felső határa az üzem *t szükségleti tényezője.* Egyforma teljesítményű gépekből álló üzemnél ez az *egyidejűségi tényezőre* egyszerűsödik. A (2,4) — (2,12) képletek e tényezőkre az eddigi nyers tapasztalati szabályok helyett elméletileg megalapozott, 99% biztonságot nyujtó értékeket szolgáltatnak, mégpedig egymástól függetlenül működő n gép esetén, a k-ik gép bekapcsolásának λ_k időbeli valószínűségi sűrűsége és $\frac{1}{\mu_k}$ átlagos működési ideje mellett, ha $P_k = 1-Q_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_k+u_k}$ + a k-ik gép kihasználási fokát, f_k működése esetén teljesítménye átlagá, s_k pedig szórását jelenti. A dolgozat e képletek használhatóságát biztosító legkisebb gépszámra is nyujt becslést és kapcsolatot ad meg egy üzem és műhelyeinek t-értékei között.

Egy üzemben, amelyben nagyszámú gépet (pl. szerszámgépet) ugyanaz az áramforrás táplál és az egyes gépek nem állandóan működnek, hanem mindig csak egy bizonyos időre vannak igénybe véve, az egyidejűleg működő gépek száma véletlen ingadozásokat mutat. Ez a szám azonban mindenesetre jóval kisebb, mint az összes gépek száma és ennek megfelelően az *időegység alatti energiafogyasztás, a teljesítmény is kisebb,* mintha a gépek mind egyidejűleg működnének, azaz kisebb, *mint a beépített kapacitás.* Ha azt akarjuk meghatározni, hogy az üzem összes gépei együttvéve hosszabb időtartam alatt mennyi energiát fogyasztanak, úgy az egyidejűleg működő gépek átlagos számát, illetve az időegységre eső energiafogyasztás, teljesítmény várható értékét kell meghatározni. Ezt a beépített kapacitással elosztva kapjuk az üzem **kihasználási tényezőjét.** Ez azonban önmagában még nem ad felvilágosítást arról, hogyan kell az áramforrást méretezni, mert ehhez tudnunk kell az időegységre eső fogyasztás, a teljesítmény gyakorlatilag előforduló legnagyobb értékét is. *A gyakorlatilag még számbaveendő legnagyobb teljesítmény is általában jóval* *kisebb a beépített kapacitásnál*, tehát az elméletileg elképzelhető maximális teljesítménynél. A kettő hányadosát nevezik az illető üzem* **szükségleti tényezőjének.**** Amennyiben a gépek egyformák, vagy legalábbis mind ugyanolyan teljesítményűek, amikor éppen működnek, úgy ez a hányados megegyezik az egyidejűleg működő gépek gyakorlatilag előforduló legnagyobb számának és az összes gépek számának hányadosával. Utóbbi hányadost az illető üzem **egyidejűségi tényezőjének** nevezik. Mivel a legtöbb üzemben általában különböző jellegű és méretű gépek táplálkoznak ugyanabból az áramforrásból, célszerűbb a szükségleti tényezővel számolni, amint ezt a szovjet szakirodalomban is teszik. A szükségleti tényező természetesen attól függ, hogy milyen gyakran és milyen időtartamokra veszik igénybe az egyes gépeket. Kialakult állandó jellegű munkamenetnél azonban az igénybevétel mértéke bizonyos állandó számokkal jellemezhető, amint azt alább meg fogjuk mutatni, és ezen állandók ismeretében az egyidejűségi tényező, illetve a szükségleti tényező is meghatározott értékkel bír. Ennek megállapítása igen nagy gyakorlati jelentőségű, különösen új üzemek létesítésénél, meglévő üzemek bővítésénél stb. az energiaellátás biztosítása és így a tervgazdálkodás szempontjából.

A szóbanforgó problémával a *Kohó- és Gépipari Minisztérium* felkérésére foglalkoztunk és a problémát a valószínűségszámítás módszereivel oldottuk meg. Ezúton mondunk köszönetet *Knizsek Ferenc* főmérnöknek, a KGM csoportvezetőjének, akitől a probléma gyakorlati vonatkozásait illetőleg számos értékes felvilágosítást kaptunk. A problémára vonatkozó megbeszéléseken a *Gépipari Tervező Intézet* több mérnöke is részt vett, akik közül *Sors László* mérnöktől kaptunk értékes útmutatásokat. Ő hívta fel a figyelmünket arra, hogy hasonló probléma merül fel sűrített levegővel dolgozó gépek esetében a kompresszor és légtartály méretezése tekintetében: ezzel a kérdéssel egy másik közleményben foglalkozunk.

A kérdés igen nagy gyakorlati jelentőségét és elméleti érdekességét tekintve meglepő, hogy a szakirodalomban erre a kérdésre vonatkozólag tapasztalati adatokon és elméletileg nem kellően megalapozott empírikus szabályokon kívül, más nem található. A Szovjetunióban e téren alapos adatgyűjtés történt, mely alapján *D. Sz. Livsic* 1937-ben tapasztalati képletet állított fel [7] és a *Gláveléktromontázs* táblázatokat is készített. Egyforma gépek esetére az egyidejűleg működő gépek számának valószínűségeloszlására vonatkozólag *Adler* és *Miller* [1] végeztek vizsgálatokat, amelyek azonban, mint azt *W. Feller* [2] megjegyzi, szabatosság szempontjából nem kielégítőek. Egyforma gépek esetére bizonyos igen speciális és a tényleges üzemi körülményektől távolálló egyszerűsítő feltevések mellett *Feller* kimutatta szabatosan, hogy a működő gépek száma binomiális eloszlást követ, azonban az egyidejűségi tényezővel nem foglalkozott és meg sem kísérelte a problémát a gyakorlat szükségleteinek megfelelő általánosabb feltételek mellett megoldani.

* Kovács Károly Pál »A villamos energia termelésének és eloszlásának időszerű kérdései hazánkban« c. előadásában (MTA Magyar Tudományos Akadémia VI. o. Közleményei I. kötet 1951. 78—112. o,) a következőket írja: »Hazánkban az utóbi évek átlagában ... erőműveink kihasználása a legnagyobb üzemi teljesítménynek mindössze kereken 60%-a; a beépített teljesítménynek — a tartalékok miatt — kereken 48%-a« Ezek a számok megvilágítják a kérdés nagy népgazdasági jelentőségét. A szóbanforgó előadás foglalkozik a véletlen üzemzavarok valószinűségszámítási vizsgálatával, a nem állandó igénybevétel kérdésére azonban a valószinűségszámítás módszereit nem alkalmazza.

** Beszélhetünk szükségleti tényezőről kisebb egységek, pl. műhelyek vagy nagyobb egységek, pl. egész ipartelepek esetében is, továbbá nemcsak elektromos, hanem más energiával hajtott gépek esetében is.

A következőkben a problémát teljes általánosságban tárgyaljuk és a valószínűségszámítás módszereinek alkalmazásával minden önkényes megszorítás elhagyásával oldjuk meg. A dolgozat végén kitérünk az eredmények gyakorlati alkalmazásánál figyelembeveendő szempontokra, továbbá az alapul szolgáló adatok meghatározásának gyakorlati módszereire is. Eredményeinket a jelenleg rendelkezésre álló hazai és szovjet tapasztalati adatokkal összehasonlítottuk és igen jó egyezést találtunk. Az alapos adatgyűjtést hazánkban a KGM most indította meg; az adatok összegyűjtése után mód fog nyílni elméleti úton nyert eredményeinknek a tapasztalatokkal való még szélesebbkörű összehasonlítására.

A kérdés valószínűségszámítási tárgyalásánál felhasználjuk *Rényi Alfréd* [3], [5] és *Takács Lajos* [4] bizonyos valószínűségszámítási tételeit. Amellett, hogy a tárgyalás ezen eredményekre támaszkodik, egyben példát is ad érdekes gyakorlati alkalmazásaikra.

Az egész tárgyalásban alapvető az a feltevés, hogy az egyes gépek működése egymástól független. Ez teszi lehetővé, hogy a valószínűségszámítás általános tételeit alkalmazzuk és ezzel tetszőleges számú gép esetét egyes gépek vizsgálatára vezessük vissza. Az 1. § egy gép esetével foglalkozik, a 2. § ennek alapján tetszőleges számú gép esetét tárgyalja, míg a 3. § a tapasztalati adatokkal való összehasonlítást és az eredmények gyakorlati felhasználására vonatkozó megjegyzéseket tartalmazza.

1. §. *Egy gép esete.*

Mindenekelőtt félreértések elkerülése végett hangsúlyozzuk, hogy egy gép esetének vizsgálata csak azt a célt szolgálja, hogy ennek alapján számítsuk ki több gép esetén a szükségleti tényezőt: a szükségleti tényezőnek egy gép esetében nincsen jelentősége, mivel 1-gyel egyenlő.

Egy gép esetében bármely t időpontban csak két eset lehetséges: a gép ezen időpontban vagy működik vagy nem működik. Annak valószínűségét, hogy a gép t időpontban működik, jelöljük $P(t)$-vel, annak valószínűségét, hogy nem működik, $Q(t)$-vel; ily módon tehát $P(t) + Q(t) = 1$. Jelentse λ a gép igénybevételének időbeli valószínűség-sűrűségét, vagyis annak valószínűsége, hogy az álló gépet t és $t + h$ időpontok között megindítsák, kis h érték mellett h-hoz képest elhanyagolható hibával legyen egyenlő λh-val. Feltesszük, hogy λ nem függ az időtől, azaz, hogy a gép igénybevételének valószínűsége az egész munkaidő alatt állandó. (Amennyiben utóbbi valószínűség bizonyos ingadozásokat mutatna, úgy mindig λ maximális értékével számolunk, vagyis biztonsági okokból a számítást a csúcsigénybevételre végezzük el.) A λ-ra vonatkozó feltevésünk úgy is megfogalmazható, hogy a gép két igénybevétele közötti szünet, vagyis a gépállás időtartama olyan a véletlentől függő mennyiség — szakkifejezéssel olyan valószínűségi változó — amely exponenciális eloszlással bír, azaz annak a valószínűsége, hogy a gépállás ideje t-nél rövidebb, $1 - e^{-\lambda t}$-vel egyenlő. Hasonlóképpen a véletlentől függő mennyiségnek, azaz valószínűségi változónak tekintendő egy igénybevétel időtartama is; utóbbi eloszlásfüggvénye a munkafolyamat jellegétől függ, és egyáltalán nem indokolt az a feltevés, hogy ez az időtartam is exponenciális eloszlású, amint azt *Feller* felteszi.

Kétségtelen, ilyen esetek is előfordulnak, azonban a következőkben ezt a megszorítást nem alkalmazzuk és tetszőleges eloszlású igénybevételek esetét is figyelembevesszük. Legyen tehát $F(t)$ egy igénybevétel időtartamának eloszlásfüggvénye, azaz annak a valószínűsége, hogy egy igénybevétel időtartama t-nél nem hosszabb. Itt megjegyezzük, hogy mind az időegység, mind az energiaegység megválasztása tetszőleges. Jelentse α az igénybevétel átlagos időtartamát, azaz legyen

$$\alpha = \int_0^\infty (1 - F(t))\, dt. \tag{1}$$

Vezessük be a $\mu = \frac{1}{\alpha}$ jelölést. Abban az esetben, amikor az igénybevétel időtartama is exponenciális eloszlású, $F(t) = 1 - e^{-\mu t}$ és így μ nem más, mint a gépleállás időbeli valószínűségsűrűsége, azaz annak a valószínűsége, hogy a t időpontban működő gépet t és $t + h$ időpontok között leállítják, kicsiny h esetében h-hoz képest kicsiny hibától eltekintve μh-val egyenlő. Feltevéseinkből és *Takács Lajos* már említett eredményeiből következik, hogy léteznek $P(t)$ és $Q(t)$ határértékei, ha $t \to \infty$, mégpedig

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = P \quad \text{és} \quad \lim_{t\to\infty} Q(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = Q = 1 - P. \tag{1.2}$$

Ez azt jelenti, hogy rövid felfutási idő után stacionér állapot áll be, amelyben a gép működésének, illetve állásának valószínűsége az időtől független állandó értékkel bír. Abban a speciális esetben, amikor a gép működési ideje is exponenciális eloszlású, a gép állapotváltozásai úgynevezett *Markov-folyamatot* alkotnak, ennek következtében a $P(t)$ és $Q(t)$ függvényekre a következő differenciálegyenletrendszer írható fel:

$$\begin{aligned} P'(t) &= -\mu P(t) + \lambda Q(t) \\ Q'(t) &= -\lambda Q(t) + \mu P(t), \end{aligned} \tag{1.3}$$

amelyből $P(t)$ és $Q(t)$ meghatározható, mégpedig:

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) + P(0)\, e^{-(\lambda+\mu)t} \\ &\qquad\text{és} \\ Q(t) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) + Q(0)\, e^{-(\lambda+\mu)t}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

A (1.4) képletekből is leolvashatók a (1.2) határérték-relációk. Hangsúlyozzuk azonban, hogy *Takács* vizsgálataiból a (1.2) relációk bármely $F(t)$ eloszlás esetére következnek.

A λ és μ számok gyakorlati meghatározása a következőképpen történhet: a szóbanforgó gépet néhány napon át megfigyeljük és regisztráljuk a be- és kikapcsolások időpontjait. Ezekből a feljegyzésekből kiszámítjuk a működési időket és a gépállási időket: legyenek a működési idők $m_1, m_2, \ldots m_n$ és a gépállási idők $l_1, l_2, \ldots, l_n$, akkor az

$$\frac{1}{\lambda} \approx \overline{l} = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n}$$

és

$$\frac{1}{\mu} \approx \overline{m} = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{n}$$

képletek alapján állapíthatjuk meg λ és μ értékeit. A λ, illetve μ értékek hibájáról felvilágosítást nyujt az m_k, illetőleg l_k számok szórása. Ha

$$\sigma_l = \sqrt{\frac{\Sigma (l_j - \bar{l})^2}{n}} \text{ és } \sigma_m = \sqrt{\frac{\Sigma (m_j - \bar{m})^2}{n}},$$

úgy λ hibája $\frac{\sigma_l}{\bar{l}^2 \sqrt{n}}$, hasonlóképpen μ hibája $\frac{\sigma_m}{\bar{m}^2 \sqrt{n}}$.

Gyakorlati szempontbó nem szükséges a λ és μ értékeket külön-külön ismerni ; elég, ha a $P = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ értéket ismerjük. A P számot a gép **kihasználási fokának** nevezzük ; ennek gyakorlati meghatározása úgy történhet, hogy megfelelő regisztráló órával megállapítjuk, hogy hosszabb T idő alatt a gép az idő hányadrészében működött. Ha a gép összes működési ideje ezalatt T^*, úgy $\frac{T^*}{T}$ adja P közelítő értékét.

A műszaki gyakorlatban számolnunk kell azzal az esettel is, hogy ugyanaz a gép aszerint, hogy milyen munkafolyamatot végeznek rajta, különböző teljesítményű. Ez fordul elő pl. forgácsológépek esetében. Ez esetben, ha a gép időegység alatti fogyasztásának, teljesítményének lehetséges értékei $f^{(1)}$, $f^{(2)}, \ldots, f^{(r)}$ és feltéve, hogy a gép működik, annak feltételes valószínűsége, hogy éppen $f^{(j)}$ a teljesítmény : $w^{(j)}$-vel egyenlő, úgy bevezetjük a működő gép átlagos teljesítményét, amelyet $\bar{f}$-sal jelölünk :

$$\bar{f} = \sum_{j=1}^{r} w^{(j)} f^{(j)},$$

továbbá a működő gép teljesítményének szórását, melyet s-sel jelölünk :

$$s = \sqrt{\sum_{j=1}^{r} w^{(j)} (f^{(j)} - \bar{f})^2}.$$

Jelentse most ξ a gép teljesítményét egy tetszőleges időpontban. A ξ mennyiség értéke a véletlentől függ, azaz ξ valószínűségi változó, amelynek értéke vagy 0 (ha a gép áll) vagypedig az $f^{(j)}$ számok valamelyike. Mivel annak valószínűsége, hogy $\xi = f^{(j)}$ nyilván $Pw^{(j)}$, tehát ξ átlagos (várható) értéke $\bar{F} = P\bar{f}$ és szórása $\sigma = \sqrt{Ps^2 + PQ\bar{f}^2}$. A gyakorlatban az $f^{(j)}$ és $w^{(j)}$ számokat és így az $\bar{f}$ és s értékeket a gépekre felbontott tervből meg lehet határozni, hiszen ezen értékek attól függnek, hogy a szóbanforgó gépen milyen munkálatok és milyen számban vannak tervbevéve.

2. §. *Több gép esete.*

Tegyük most fel, hogy a vizsgált üzemben (műhelyben, iparteleptn stb.) n számú gép táplálkozik ugyanabból az áramforrásból : a gépeket számozzuk meg 1-től n-ig. A k-ik gép kihasználási foka legyen P_k, teljesítménye egy tetszőleges időpontban legyen ξ_k, a teljesítmény várható értéke működés esetében legyen $\overline{f}_k$, míg szórása σ_k ($k = 1, 2 \ldots$). Jelentse továbbá λ_k a k-ik gép bekapcsolásainak időbeli valószínűségsűrűségét és α_k a k-ik gép átlagos működési idejét, továbbá legyen $Q_k = 1 - P_k$. Akkor tehát az előző § szerint fennállnak a következő képletek:

$$P_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k} \quad \text{és} \quad Q_k = \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}, \text{ ahol } \mu_k = \frac{1}{\alpha_k}.$$

Mivel az egyes gépek működései egymástól függetlenek, annak a valószínűsége, hogy az $i_1, i_2, \ldots, i_r$ gépek működjenek és ugyanakkor a többi gép, a $j_1, j_2, \ldots, j_{n-r}$-ik gépek álljanak:

$$P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_r} Q_{j_1} Q_{j_2} \ldots Q_{j_{n-r}}.$$

Speciálisan, ha $P_k = P$ és így $Q_k = Q$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), úgy ez a valószínűség nem más, mint $P^r Q^{n-r}$ és így annak valószínűsége, hogy a működő gépek száma r legyen:

$$\binom{n}{r} P^r Q^{n-r},$$

vagyis ez esetben a működő gépek száma binomiális eloszlást követ. Ez az eredmény megtalálható már *Feller* idézett munkájában is. Amennyiben P értéke kicsiny, viszont n igen nagy, úgy közismerten ez a binomiális eloszlás egy Poisson-eloszlással közelíthető meg. Mégpedig ez esetben annak a valószínűsége, hogy egyidejűleg r gép működjék, közelítőleg

$$\frac{\nu^r}{r!} e^{-\nu},$$

ahol $\nu = nP$.

Vizsgáljuk most meg, hogy mekkora lesz az egész üzem teljesítményének várható értéke és szórása. Ha az egész üzem teljesítményét η-val jelöljük, úgy nyilván $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ és így a valószínűségszámítás jólismert tételei szerint η átlagos (várható) értéke

$$M = \overline{\eta} = \sum_{k=1}^{n} P_k \overline{f}_k \tag{2.1}$$

és szórása

$$\sigma = \sigma(\eta) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}. \tag{2.2}$$

Másrészt a valószínűségszámítás centrális határeloszlás-tétele szerint nagyszámú független valószínűségi változó összegének eloszlása jó közelítéssel normális (Gauss—Laplace-féle) eloszlású, hacsak az egyes változókra bizonyos igen kevés megszorítást jelentő feltevések teljesülnek. Ezek a feltevések az általunk vizsgált esetben lényegében azt jelentik, hogy *az egyes gépek teljesítményei az egész üzem teljesítményéhez képest egyenként igen kicsinyek.* Arra a tényre, hogy az üzem legnagyobb teljesítményű gépeit külön kell figyelembe venni, *D. Sz. Livsic* is felhívta a figyelmet ; az általa adott ú. n. kéttagú képletben az üzem legnagyobb teljesítményű gépeire külön szükségleti tényezőt állapít meg, amely lényegesen nagyobb, mint a kis fogyasztókra vonatkozó szükségleti tényező és az egész üzem szükségleti tényezőjét úgy állapítja meg, hogy a nagyfogyasztók össz-szükségletét és a kisfogyasztók össz-szükségletét összeadja. Ha a legnagyobb teljesítményűek száma x, az összes fogyasztók száma n, továbbá a nagyteljesítményűek szükségleti tényezője a, a kisebb teljesítményűeké b, végre a nagyteljesítményűek névleges összteljesítménye (beépített kapacitása) N_x, a kisebb teljesítményűeké pedig N_{n-x}, akkor *Livsic* képlete szerint az üzem összes időegység alatti energiaszükséglete, teljesítménye :

$$N_{sz} = aN_x + bN_{n-x}.$$

Így ha N_n jelenti az egész üzem névleges összteljesítményét (beépített kapacitását), akkor az egész üzem szükségleti tényezőjét t-vel jelölve

$$t = \frac{N_{sz}}{N_n} = a\,\frac{N_x}{N_n} + b\,\frac{N_{n-x}}{N_n}.$$

Figyelembevéve, hogy $N_x + N_{n-x} = N_n$ és bevezetve a $c = a - b$ és $\frac{N_x}{N} = q$ jelöléseket

$$t = b + cq.$$

Livsic képlete nyitva hagyja azt a problémát, hogyan lehet az a és b szükségleti tényezőket elméletileg meghatározni, ezeket empírikus adatokként kezeli. Kétségtelen, hogy már működő üzemeknél ezek valóban empírikusan meghatározhatók és ennek alapján új üzemekre is esetleg lehet következtetéseket levonni. De nyilvánvalóan nagy gyakorlati jelentősége van annak, hogy ezeket a tényezőket a fogyasztásra vonatkozó adatokból elméleti úton meghatározzuk és éppen ez dolgozatunk célja. Először a kis teljesítményűek esetével foglalkozunk, vagyis feltesszük, hogy $q = 0$ és így $t = b$, ezután fogunk külön kitérni a legnagyobb teljesítményűek esetére. Nemcsak b elméleti meghatározásának problémáját oldjuk meg, hanem azt is kimutatjuk, hogy a *Livsic* kéttagú képletében szereplő a tényező is meghatározható elméleti úton.

Ezek előrebocsátása után térjünk vissza a szükségleti tényező elméleti meghatározására. *Ha a nagy teljesítményűeket figyelmen kívül hagyjuk*, akkor, mint már említettük, az összteljesítmény ingadozásai (közelítőleg) a normális eloszlás törvényét követik és így 99,99% valószínűséggel az összteljesítmény értéke az $\bar{\eta} - 4\sigma(\eta)$ és $\bar{\eta} + 4\sigma(\eta)$ határok közé fog esni. Tehát 99,99%-os biztonsággal* a gyakorlatilag előforduló legnagyobb teljesítmény

$$\bar{\eta} + 4\sigma(\eta) = \sum_{k=1}^{n} P_k f_k + 4\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}\,. \tag{2.3}$$

* Mivel a teljesítmény ingadozásai csak közelítőleg követik a normális eloszlás törvényét : a biztonság valójában valamivel kisebb lehet, de mint később kimutatjuk, 99% alá nem süllyed.

és így a szükségleti tényező

$$t = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \bar{f}_k + 4\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}}{\sum_{k=1}^{n} \bar{f}_k} \tag{2.4}$$

lesz. E képletben a nevezőben szereplő $\sum_{k=1}^{n} \bar{f}_k$ mennyiség nem más, mint az üzem beépített kapacitása (névleges összteljesítménye).

A (2.4) képlet az általános esetre vonatkozik. Vizsgáljunk most meg néhány speciális esetet.

1. *Az egyes gépek teljesítménye állandó.* Ebben az esetben

$$\bar{f}_k = f_k \quad \text{és} \quad s_k = 0, \quad \text{azaz} \quad \sigma_k = \sqrt{P_k Q_k f_k^2}$$

és így

$$t = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k f_k + 4\sqrt{\sum_{k=1}^{n} P_k Q_k f_k^2}}{\sum_{k=1}^{n} f_k}. \tag{2.5}$$

2. *Az összes gépek kihasználási fokai egyenlők.* Ebben az esetben $P_k = P$ és így

$$t = P + \frac{4\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}}{\sum_{k=1}^{n} \bar{f}_k}. \tag{2.6}$$

3. *Az összes gépek egyformák, tehát* $\bar{f}_k = \bar{f}$, $s_k = s$; az egyes gépeknek kihasználási fokai különbözők lehetnek. Ebben az esetben, bevezetve a

$$\bar{P} = \frac{P_1 + \ldots + P_n}{n}, \quad \text{továbbá} \quad \frac{\Sigma P_k Q_k}{n} = \bar{R}$$

jelölést, kapjuk, hogy

$$t = \bar{P} + 4\sqrt{\frac{\frac{\bar{P}s^2}{\bar{f}^2} + \bar{R}}{n}}. \tag{2.7}$$

4. *Az összes gépek egyformák és kihasználási fokaik is egyenlők.* Ebben az esetben (2.7)-ben $P = \overline{P}$, $\overline{R} = PQ$, úgyhogy

$$t = P + 4\sqrt{\frac{PQ + \frac{Ps^2}{\overline{f}^2}}{n}}. \tag{2.8}$$

5. *Az összes gépek egyformák, kihasználási fokaik is egyenlők, továbbá a gépek teljesítményei állandók.* Ebben az esetben $s = 0$ és így (2.8)-ból

$$t = P + 4\sqrt{\frac{PQ}{n}}. \tag{2.9}$$

Ha P értéke kicsiny, úgy $\sqrt{Q}$ közel lesz 1-hez és így (2.9) helyett használhatjuk az egyszerűbb

$$t = P + 4\sqrt{\frac{P}{n}} \tag{2.10}$$

képletet. Ez 5. esetben kihasználási tényező helyett beszélhetünk egyidejűségi tényezőről is, mivel egyforma és állandó teljesítményű gépek esetében a teljesítmény csak a működő gépek számától függ.

A most tárgyalt speciális esetek egyben fényt vetnek az általános képletre is. A t szükségleti tényező két tag összegével egyenlő : az első az üzem gépkihasználási tényezője ; ez nem más, mint az egyes gépek kihasználási fokainak súlyozott közepe, ahol súlyokként az egyes gépek átlagos teljesítményei szerepelnek. Ez a tag egyébként nem más, mint az üzem átlagos teljesítményének és a maximális teljesítménynek a hányadosa. Jelöljük az üzem gépkihasználási tényezőjét az általános esetben $\overline{P}$-sal, vagyis legyen

$$\overline{P} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \overline{f}_k}{\sum_{k=0}^{n} \overline{f}_k}, \tag{2.11a}$$

akkor

$$t = \overline{P} + 4\,\frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}}{\sum_{k=1}^{n} \overline{f}_k}. \tag{2.11b}$$

A szükségleti tényező másik tagja a teljesítmény ingadozását képviseli. Ennek a tagnak a nagysága attól függ, hogy az egyes gépek teljesítményeinek ingadozásai mennyire egyenlítődnek ki. A (2.7)—(2.10) képletek azt mutatják, hogy egyforma gépek esetében ez a tag fordítottan arányos a gépek számának négyzetgyökével, tehát a gépek számát növelve a kiegyenlítődés fokozódik és így a szükségleti tényező csökken és egyre inkább megközelíti a kihasználási tényezőt, annál azonban mindig valamivel nagyobb marad.

A szükségleti tényező változását a gépek számának függvényében az *1. ábra* mutatja. Erről látható, hogy a gépek számának növelésével a szükségleti tényező aszimptotikusan közeledik a kihasználási tényezőhöz. A P kihasználási tényező különböző értékeinek más és más görbék felelnek meg. Az 5. esetben, amikor az összes gépek egyformák, a szükségleti tényezőnek a gépszámtól való függését leíró függvény egyetlen paramétertől, P értékétől függ. Nagyobb P esetében nemcsak t határértéke lesz nagyobb, hanem a görbe menete is megváltozik ; a különböző P értékeknek megfelelő görbék egymás felett helyezkednek el és a nagyobb P értékhez tartozó görbe valamivel lassabban lejt.

Eddigi eredményeink összefoglalása előtt a (2.4)-nek szemléletesebb alakot adhatunk. Vezessük be ebbe ugyanis az

$$n_e = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{f}_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} \overline{f}_a{}^2}$$

viszonyt úgy, hogy a (2.4)-beli nevezővel a számláló mindkét tagjában, mégpedig a másodikban a gyök alatt $(\Sigma\, \overline{f}_r)^2$ helyett mindjárt $n_e\, \Sigma\, f_k^2$-tel osztunk. Akkor (2.4) helyébe

$$t = \overline{P} + 4 \sqrt{\frac{\overline{R} + \overline{S}}{n_e}} \tag{2.12}$$

lép a

$$\overline{P} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \overline{f}_k}{\sum_{k=1}^{n} \overline{f}_k}, \quad \overline{R} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k Q_k \overline{f}_k^2}{\sum_{k=1}^{n} \overline{f}_k^2}, \quad \overline{S} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k s_k^2}{\sum_{k=1}^{n} f_k^2}$$

értékekkel.

Ha a gépek *teljesítményre és kihasználásra* nézve megegyeznek, akkor $\overline{f}_k = f$, $s_k = s$, $P_k = \overline{P} = P$ és $n_e = n$, amivel a (2.12) a (2.8)-ra egyszerűsödik. A gépek működési időegységre eső — különböző — átlagos $\overline{f}_k$ fogyasztásánál azonban *Cauchy* egyenlőtlensége szerint $n_e < n$. A *teljesítményre és kihasználásra nézve egyenlő* gépek eme n_e számát, amely a vizsgált különböző n géppel azonos szükségleti tényezőre vezet, *effektív gépszám*nak nevezzük. E képzelt n_e gép mindegyikének kihasználási fokát $\overline{P}$-nak, teljesítményének átlagát az $\overline{f}_k$ számok átlagának választhatjuk. Ezzel e teljesítmény szórása egyértelműen van meghatározva.

Eddigi eredményeinket a következőképpen foglalhatjuk össze: *Ha egy üzemben ugyanaz az áramforrás táplálja a* $G_1, \ldots, G_n$ *gépeket, a* G_k *gép kihasználási foka* $P_k = 1 - Q_k$, *működése alatt az időegységre eső energiafogyasztásának, teljesítménynek átlaga* $\bar{f}_k$, *míg szórása* s_k, *úgy bevezetve a következő jelöléseket:*

$$\bar{P} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \bar{f}_k}{\sum_{k=1}^{n} \bar{f}_k}, \tag{2.13}$$

(P a gépek kihasználási fokának középértéke)

$$n_e = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \bar{f}_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} \bar{f}_k^2}, \tag{2.14}$$

(n_e az ú. n. »effektív gépszám«)

$$\bar{R} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k Q_k \bar{f}_k^2}{\sum_{k=1}^{n} \bar{f}_k^2} \tag{2.15}$$

és

$$\bar{S} = \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k^2 P_k}{\sum_{k=1}^{n} \bar{f}_k^2} \tag{2.16}$$

jelöléseket, a szükségleti tényezőre a következő kifejezést nyerjük:

$$t = \bar{P} + 4\sqrt{\frac{\bar{R} + \bar{S}}{n_e}}. \tag{2.17}$$

Ha a gépek egyformák, tehát $\bar{f}_k = f$ és $s_k = s$, *úgy* $n_e = n$, *továbbá* P, R *és* S *kifejezései a következőképpen egyszerűsödnek:*

$$P = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k}{n}, \quad R = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k Q_k}{n} \quad \text{és} \quad S = \frac{s^2 P}{f^2},$$

tehát

$$t = P + 4\sqrt{\frac{R + s^2 \dfrac{P}{f^2}}{n}}, \tag{2.18}$$

míg ha nemcsak a gépek egyformák, hanem kihasználási fokaik is egyenlők, vagyis $P_k = P$, úgy $R = PQ$, tehát

$$t = P + 4\sqrt{\frac{PQ + \dfrac{s^2 P}{f^2}}{n}}. \tag{2.19}$$

Ha az egyes gépek teljesítménye állandó, úgy $\sigma = 0$ és ennek megfelelően $S = 0$, tehát

$$t = P + 4\sqrt{\frac{PQ}{n}}. \tag{2.20}$$

Eddig nem érintettük azt a kérdést, hogy mekkora gépszámtól kezdve alkalmazhatók tételeink. Említettük, hogy $\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ eloszlása közelítőleg normálisnak tekinthető; mármost eredményeink alkalmazhatósága azon múlik, mennyire jó ez a közelítés. A közelítés megbecsülésére ismeretesek bizonyos általános eredmények, ezek azonban csak igen nagy n esetében adnak jó becslést. Ezzel szemben alkalmazható itt a Csebisev-féle egyenlőtlenségnek egy általánosítása, amely a következőképpen hangzik: Ha $\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, ahol a ξ_k $(k = 1, \ldots, n)$ valószínűségi változók függetlenek és korlátosak, $|\xi_k - M_k| \leq K$, ahol M_k jelenti ξ_k várható értékét, továbbá, ha $\sigma = \sigma(\eta)$ jelenti η szórását és $M = \Sigma M_k$ az η várható értékét, úgy annak a valószínűsége, hogy $|\eta - M| > \mu\sigma$ legyen, kisebb mint $2 \exp\left[-\frac{\mu^2}{2}\left(1 + \frac{\mu K}{2\sigma}\right)^{-2}\right]$, ahol μ tetszőleges, $\frac{\sigma}{K}$-nál nem nagyobb szám.*

Esetünkben $\mu = 4$, $M = \Sigma f_k P_k$, és $K = \mathrm{Max}\,|\xi_k - P_k f_k|$, $\sigma = \sqrt{\Sigma \sigma_k^2}$. Határozzuk most meg, hogy n milyen értékeitől kezdve nyújt a képlet 99%-os biztonságot, azaz, mikor lesz annak a valószínűsége, hogy $|\eta - \Sigma P_k f_k| > 4\sigma$, kisebb 0,01-nál. Ehhez elégséges az elmondott egyenlőtlenség szerint, hogy

$$2 \exp\left[-8\left(1 + \frac{2K}{\sigma}\right)^{-2}\right] < 0{,}01 \text{ legyen, ami teljesül, ha } \frac{K}{\sigma} \leq 0{,}12.$$

Tehát bebizonyítottuk, hogy eredményeink 99%-os biztonsággal alkalmazhatók, hacsak $\frac{K}{\sigma} \leq 0{,}12$. Abban az esetben, ha az összes gépek egyformák és teljesítményük állandó, továbbá $P_k = P < 0{,}5$, úgy $K = fQ$,

* Lásd [5]. Ezen egyenlőtlenség bizonyításának alapgondolata *Sz. N. Bernstein*től [6] származik, de ilyen alakban [5]-ben található először.

$\sigma = f\sqrt{nPQ}$ és így $\dfrac{K}{\sigma} = \sqrt{\dfrac{Q}{Pn}}$; vagyis a $\dfrac{K}{\sigma} \leq 0{,}12$ feltétel azt jelenti, hogy $n \geq \dfrac{70Q}{P}$. Ez esetben $\dfrac{\sigma}{K} \geq 8$, tehát a $\dfrac{\sigma}{K} \geq \mu$ feltétel is teljesül.

Ha például az összes gépek egyformák, és $P = 0{,}38$ (*Mukoszejev* [7] szerint ez P értéke egyfázisú, egyenlő teljesítményű ívhegesztők esetében) úgy az egyidejűségi tényező $t = P + 4\sqrt{\dfrac{PQ}{n}}$ képlete alkalmazható, ha $n \geq 114$; ha $P = 0{,}5$, úgy az egyidejűségi tényező képlete alkalmazható, hacsak $n \geq 70$.

Kisebb n értékekre a 4-es tényező helyett 4,5-es tényezővel kell dolgozni. Ebben az esetben az említett egyenlőtlenség alkalmazása arra az eredményre vezet, hogy a

$$t = P + 4{,}5\sqrt{\frac{R+S}{n_e}} \tag{2.21}$$

képlet 99%-os biztonságot ad, hacsak teljesül a $\dfrac{K}{\sigma} \leq 0{,}168$ feltétel. Egyforma és állandó teljesítményű gépek mellett ez azt jelenti, hogy az egyidejűségi tényezőre vonatkozó

$$t = P + 4{,}5\sqrt{\frac{PQ}{n}} \tag{2.22}$$

képlet alkalmazható, hacsak $n \geq \dfrac{35Q}{P}$, tehát például $P = 0{,}5$ esetében, ha $n \geq 35$ és $P = 0{,}38$ esetében, hacsak $n \geq 56$.

Megjegyzendő, hogy ha nem törekszünk 99%-os biztonságra, hanem például megelégszünk 95%-os biztonsággal, úgy a 4-es tényező 3-assal pótolható, vagyis a

$$t = P + 3\sqrt{\frac{R+S'}{n_e}} \tag{2.23}$$

képlet alkalmazható, mégpedig ha $\dfrac{K}{\sigma} \leq 0{,}08$; egyforma gépek esetében ez azt jelenti, hogy $n \geq \dfrac{156Q}{P}$. Hasonlóképpen 95%-os biztonságot írva elő, még nagyobb gépszám esetében a 3-as tényező tovább csökkenthető, mégpedig 2,8-ra, vagyis alkalmazható a

$$t = P + 2{,}8\sqrt{\frac{R+S}{n_e}} \tag{2.24}$$

képlet, hacsak $\dfrac{K}{\sigma} \leq 0{,}03$, azaz egyforma gépek esetében, ha $n \geq \dfrac{1000Q}{P}$.

Megjegyzendő, hogy a valóságban a szóbanforgó képletek jóval nagyobb biztonságot nyujtanak, mint ahogy azt megadtuk és *így a gyakorlatban általá-*

ban a 3-as tényezővel lehet dolgozni már 100-on aluli gépszám és nem túlságosan kicsiny P esetében is. Ugyanis a felhasznált becslés, bár a rendelkezésre álló becslések közül a legélesebb, még mindig a valóságnál kb. kétszer nagyobb értéket ad a szóbanforgó valószínűségekre.

Az eddig elmondottak nagyszámú kisteljesítményű gép esetére vonatkoztak. Áttérünk most kisszámú nagyteljesítményű gép vizsgálatára. Ha x számú egyforma fogyasztónk van, úgy annak a valószínűsége, hogy egyidejűleg y számú működjék ezen gépek közül, a binomiális eloszlás szerint

$$\binom{x}{y} P^y Q^{x-y}. \tag{2.25}$$

Ennek alapján annak a valószínűsége, hogy egyidejűleg több, mint z számú gép működjék az x gép közül

$$V(z) = \sum_{y=z+1}^{x} \binom{x}{y} P^y Q^{x-y}. \tag{2.26}$$

Mármost az x számú gép $\frac{z}{x}$ egyidejűségi tényezőjét úgy számíthatjuk ki, hogy meghatározzuk, hogy mely z értékre lesz az ebben a képletben szereplő $V(z)$ valószínűség 0,01-nél kisebb. Ez kicsiny x értékek mellett közvetlen számolással történhet és nincs értelme közelítő képlet megadásának. Így például, ha $x = 5$, úgy $z = 4$ esetben teljesül a mondott feltétel, ha $P^5 < 0{,}01$, vagyis ha $P < 0{,}4$; $z = 3$ esetben is teljesül, ha $P^5 + 5P^4Q = 5P^4 - 4P^5 < < 0{,}01$, vagyis ha $P < 0{,}22$. Hasonlóképpen, ha $x = 3$, úgy $z = 2$-re teljesül a mondott feltétel, ha $P^3 < 0{,}01$, vagyis ha $P < 0{,}21$. Így tehát $P < 0{,}21$ esetében ha 3 nagyteljesítményű gépünk van, 0,66 az egyidejűségi tényező, hasonlóképpen ha 5 nagyteljesítményű gépünk van, úgy 0,8 az egyidejűségi tényező, ha $0{,}22 < P < 0{,}4$ és 0,6 az egyidejűségi tényező, ha $P < 0{,}22$. Ily módon állapítható meg elméleti úton a *Livsic* képletében szereplő a egyidejűségi tényező a nagyteljesítményű gépekre vonatkozólag.

Befejezésül még egy problémával kívánunk foglalkozni : tegyük fel, hogy egy üzem több műhelyének gépei ugyanabból az áramforrásból táplálkoznak és a műhelyekre külön-külön ismerjük az egyidejűségi, illetve a szükségleti tényezőt. Kérdés : hogyan lehet ennek alapján az egész üzem egyidejűségi tényezőjét meghatározni? A kérdés megoldása az elmondottak alapján igen egyszerűen történhet. Legyenek ugyanis $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(m)}$ az egyes műhelyek teljesítményei, $N^{(1)}, \ldots, N^{(m)}$ az egyes műhelyek beépített kapacitásai, továbbá $N^{(1)}P^{(1)}, \ldots, N^{(m)}P^{(m)}$ az egyes műhelyek teljesítményeinek várható értékei és $S^{(1)}, \ldots, S^{(m)}$ a műhelyek szórásai. Akkor az egyes műhelyek szükségleti tényezői az elmondottak szerint a következők lesznek : a j-ik műhely szükségleti tényezőjét $t^{(j)}$-vel jelölve

$$t^{(j)} = P^{(j)} + \frac{4S^{(j)}}{N^{(j)}}.$$

Mivel az egész üzem teljesítménye az egyes műhelyek teljesítményeinek összege, az egész üzem teljesítményét η-val, az egész üzem beépített kapacitását pedig N-el jelölve kapjuk, hogy

$$\eta = \eta^{(1)} + \cdots + \eta^{(m)} \quad \text{és} \quad N = N^{(1)} + \cdots + N^{(m)}.$$

Tehát az egész üzem átlagos teljesítménye

$$\overline{\eta} = \frac{1}{N} \sum_j N^{(j)} P^{(j)} \cdot$$

továbbá az összteljesítmény szórása

$$\sigma(\eta) = \sqrt{\sum_j (S^{(j)})^2}$$

és így az egész üzem egyidejűségi tényezője

$$T = \sum_j \frac{N^{(j)}}{N} P^{(j)} + \frac{4}{N} \sqrt{\sum_j (S^{(j)})^2} \cdot$$

Megjegyzendő, hogy mivel az egész üzemre nézve a gépek száma általában igen nagy, az egész üzem egyidejűségi tényezőjének számításánál általában a 4-es tényező 3-assal, sőt esetleg 2,8-el pótolható és így az egész üzem egyidejűségi tényezője a

$$T = \sum_j P^{(j)} \frac{N^{(j)}}{N} + 3 \sqrt{\frac{\sum_j (S^{(j)})^2}{N^2}}$$

képlet alapján számítható. Ez viszont azt jelenti, hogy bevezetve a

$$q_j = \frac{N^{(j)}}{N}$$

jelölést, az egész üzem szükségleti tényezője és a műhelyek szükségleti tényezői között a következő összefüggés áll fenn:

$$T = \sum_{j=1}^{m} q_j t^{(j)} + \left[\frac{3}{4} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} q_j^2 (t^{(j)} - P^{(j)})^2} - \sum_{j=1}^{m} q_j (t^{(j)} - P^{(j)})\right].$$

Hogy ezt az összefüggést jól megértsük, vizsgáljuk azt a speciális esetet, amikor az összes gépek egyformák, teljesítményük állandó, továbbá minden műhelyben ugyanannyi (n számú) gép van; ez esetben, ha $t = P + \sqrt{\frac{P}{n}}$ az egyes műhelyek szükségleti (egyidejűségi) tényezője, úgy nyilván $T = P + \sqrt{\frac{P}{nm}}$ a teljes üzem egyidejűségi tényezője. Ez utóbbi tehát lényegesen kisebb, mint az egyes műhelyek egyidejűségi tényezője; mégpedig

(2.27) $$T = \frac{t}{\sqrt{m}} + P\left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right),$$

vagyis $\frac{1}{\sqrt{m}}$ ill. $1-\frac{1}{\sqrt{m}}$ súlyokkal vett súlyozott középértéke az egyes műhelyek egyidejűségi tényezőjének és gépkihasználási tényezőjének.

Eddig kizárólag az egyidejűségi, illetve szükségleti tényező kiszámításával foglalkoztunk, amihez elegendő volt az üzemi teljesítmény várható értékének és szórásának ismerete. Ami pedig a teljesítmény ingadozásainak eloszlásfüggvényét illeti, elegendő volt annyit tudni, hogy ez közelítőleg megegyezik a normális eloszlásfüggvénnyel. Rá szeretnénk azonban befejezésül mutatni arra, hogy a teljesítmény ingadozásainak további vizsgálatához eloszlásuknál többet kell tudnunk. Erre meg is van a lehetőség. Abban az esetben ugyanis, ha az egyes gépek teljesítményei állandóak és egy egységnyi teljesítmény egészszámú többszörösei (ezt mindig feltehetjük, hiszen ha az egységet elég kicsinyre választjuk és minden gép teljesítményét felfelé kerekítjük, úgy, hogy az egység egészszámú többszöröse legyen, ezzel ezt mindig elérhetjük), abban az esetben a teljes teljesítmény eloszlása ú. n. *összetett Poisson-eloszlás* lesz. Ez eloszlások részletes tárgyalása megtalálható a [8] és [9] dolgozatokban, azért erre itt nem térünk ki részletesen, csak megjegyezzük, hogy a teljesítmény-ingadozások további vizsgálatának is van gyakorlati jelentősége.

3. §. *Megjegyzések az eredmények gyakorlati felhasználásával és tapasztalati ellenőrzésével kapcsolatban.*

Összehasonlítottuk eredményeinket hazai adatokkal és jó megegyezést kaptunk. Érdekes megemlíteni, hogy ez adatok feldolgozásánál azt találtuk, hogy a gépipari üzemekben a gépkihasználási tényező értéke 0,2 körül mozog : a megvizsgált 39 üzem közül a P gépkihasználási tényező értéke 28 esetben 0,18 és 0,21 között volt, 4 esetben 0,14 és 0,17 között, míg 7 esetben 0,22 és 0,25 között (*2. ábra*). Ez a tény arra mutat, hogy a gyakorlatban üzemtípusokat lehet megállapítani P értékének megfelelően és azonos típusba tartozó üzemekben ugyanaz az összefüggés áll fenn a gépszám és az egyidejűségi tényező között. Ami a pontosabb vizsgálatot illeti, a következőképpen járhatunk el (95% biztonsággal dolgozva) :

1. *Egyforma gépek esete :* Ha nincs mód a

$$t = P + 3\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

képletben szereplő P állandó közvetlen meghatározására, úgy egyetlen (n, t) értékpárból P értéke meghatározható a következőképpen :

A $$(9+n)P^2-(2tn+9)P+nt^2=0\,,$$

másodfokú egyenletből P-re két pozitív értéket kapunk :

$$\frac{2tn+9\pm\sqrt{(2tn+9)^2-4nt^2(9+n)}}{2(9+n)}\,.$$

Könnyű belátni, hogy a helyes érték mindig a kisebbik, azaz

$$P = \frac{2tn + 9 - \sqrt{36t(1-t)n + 81}}{2(9+n)}.$$

2. *Különböző gépek esete.* Ha nincs mód a P_k, s_k számok közvetlen meghatározására, akkor a

$$t = P + 3\sqrt{\frac{R+S}{n_e}}$$

összefüggést úgy tekintjük, mint egy $k = P + \frac{\Pi}{\sqrt{n_e}}$ alakú általános összefüggést és a P és Π ismeretlen állandókat két összetartozó adatpárból határozzuk meg. Összetartozó adatpáron egy (t, n_e) értékpárt értünk; természetesen az n_e effektív gépszám meghatározásához ismernünk kell az $f_1, \ldots, f_n$ teljesítményeket, ezek azonban általában a gyakorlatban valóban ismeretesek. Ha tehát ugyanarra a típusú üzemre vonatkozólag két ilyen adatpárunk van — mondjuk $(t^{(1)}, n_e^{(1)})$ és $(t^{(2)}, n_e^{(2)})$, úgy megoldva a

$$t^{(1)} = P + \frac{\Pi}{\sqrt{n_e^{(1)}}}$$

$$t^{(2)} = P + \frac{\Pi}{\sqrt{n_e^{(2)}}}$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk, hogy

$$P = \frac{t^{(1)}\sqrt{n_e^{(1)}} - t^{(2)}\sqrt{n_e^{(2)}}}{\sqrt{n_e^{(1)}} - \sqrt{n_e^{(2)}}}$$

és

$$\Pi = \frac{(t^{(1)} - t^{(2)})\sqrt{n_e^{(1)} n_e^{(2)}}}{\sqrt{n_e^{(2)}} - \sqrt{n_e^{(1)}}}.$$

Célszerű két olyan adatot választani, amelyeknél $n_e^{(1)}$ és $n_e^{(2)}$ nincsenek közel egymáshoz ; ellenkező esetben ugyanis a hibák nagyon eltorzítják P és Π értékeit. Amennyiben mód van arra, hogy az üzem teljesítményét hosszabb időn át megfigyeljük, úgy P tapasztalatilag meghatározható, mint az üzem kihasználási tényezője. Ez esetben Π meghatározásánál csak egyetlen (t, n_e) adatpár ismerete szükséges. Ha ugyanis t, n_e és P ismeretesek, úgy

$$\Pi = \sqrt{n_e}(t - P).$$

Foglaljuk össze e § eredményeit:

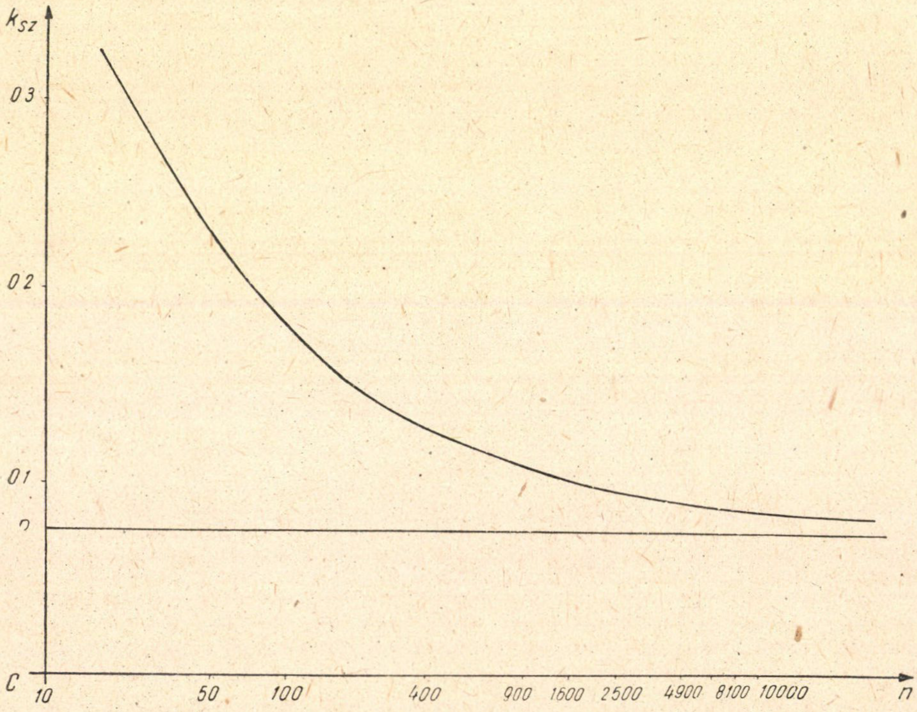
Meghatározott típusú üzem esetében a t szükségleti tényező és az n_e effektív gépszám között a következő összefüggés áll fenn:

$$t = P + \frac{\Pi}{\sqrt{n_e}}.$$

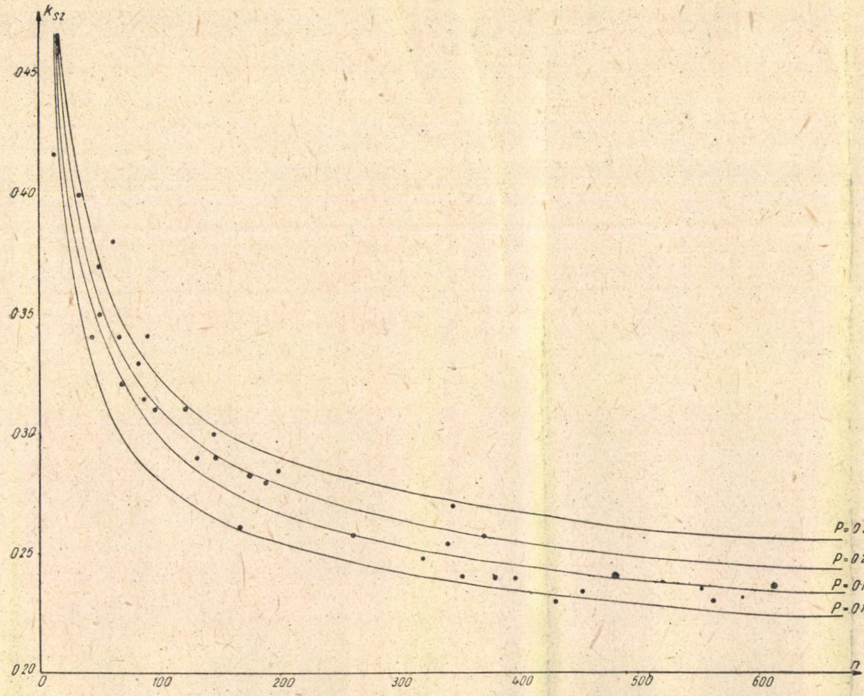
Itt P jelenti az üzem kihasználási tényezőjét, Π pedig egy, az egyes gépek igénybevételétől, fogyasztásától és fogyasztásának ingadozásától függő állandó, továbbá az n_e effektív gépszámot az egyes gépek $f_1, \ldots, f_n$ időegységbeli fogyasztásaiból, teljesítményeiből a következőképpen lehet meghatározni:

$$n_e = \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} f_k\right)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2}.$$

Az n_e effektív gépszám mindig kisebb, mint a tényleges gépszám, kivéve, ha az összes gépek teljesítményei egyenlők, amikoris $n_e = n$. (Figyeljük meg hogy n_e dimenziótlan mennyiség!) A P szám tapasztalatilag megállapítható-ha az üzem teljesítményét hosszabb időn át megfigyeljük, míg Π meghatároz,



1. ábra



2. ábra

ható egyetlen összetartozó (t, n_e) számpárból, ha már P ismeretes. Ha P értéke sem ismeretes, akkor két összetartozó (t, n_e) számpárból P-re és Π-re két lineáris egyenletet kapunk, melyből ezek meghatározhatók.

Befejezésül megjegyezzük, hogy eredményeink nemcsak egyes üzemek elektromos energiaszükségletének vizsgálatánál, hanem pl. városok világítási áramszükségletének, gáz- vagy vízfogyasztásának vizsgálatánál is alkalmazhatók, a megfelelő módosításokkal. Ezekre a kérdésekre más alkalommal vissza kívánunk térni.

IRODALOM

1. *H. A. Adler* and *K. W. Miller:* A new approach to probability problems in electrical engineering. Transact. Amer. Inst. Electr. Engineers. 65 (1946) 630—632. o.

2. *W. Feller:* An Introduction to Probability Theory and Its Applications I. I. Wiley and Sons. New York. 1950. 384. o.

3. *A. Rényi:* On some problems concerning Poisson processes. Publicationes Mathematicae. 2 (1951) 66—73. o.

4. *Takács L.:* Bekövetkezési és koincidenciajelenségek tárgyalása időtartamban tetszőleges eloszlású történések esetén. Magyar Tud. Akadémia III. Oszt. Közleményei. I (1951) 371—386. (Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae II (1951) 275—298. o.)

5. *Rényi A.:* Valószínűségszámítás (Egyetemi Jegyzet). Tankönyvkiadó, 1951/52. 444. old.

6. С. Н. Бернштейн: О некоторых видоизменениях неравенства Чебышева, доклады Акад. Наук СССР 17 (1937) 275—2780.

7. Ю. Л. Мукосеев; Вопросы электроснабжения промышленных предприятий. Москва. 1951. L. még a következő dolgozatot: С. М. Лившиц, О расчетах и исследовании электрических промышленных нагрузок, Электричество №5. 1952.
8. *Jánossy L., Rényi A., Aczél J.:* Összetett Poisson eloszlásokról. I. Magyar Tud. Akadémia III. oszt. Közleményei. I (1951) 315—328. o. (On composed Poisson distributions. I. Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae. I (1950) 209—224. o.)
9. *Rényi A.:* Összetett Poisson eloszlásokról II. Magyar Tud. Akadémia III. oszt. Közleményei. I (1951) 329—341. o. (On composed Poisson distributions II. Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae. II (1951) 83—98. o.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ И ФАКТОРА ОДНОВРЕМЕННОСТИ, Т. Е. ПОТРЕБЛЕНИЯ ЗАВОДОВ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

А. РЕНЬИ–Т. СЕНТМАРТОНИ

Резюме

Эффективная мощность (затрата энергии в единице времени) заводов машиностроительной промышленности не достигает своего теоретически возможного максимума (т. н. встроенной мощности), а колеблется под этим. Верхняя граница частного этих двух величин, вероятность которой еще принимается практически во внимание, называется фактором потребности t завода. В случае завода состоящего из машин с тождественной мощностей, он упрощается на фактор одновременности. Формулы (2,4) — (2,12) доставляют для этих факторов величины с уровнем вероятности 99,99%, вместо грубых эмпирических правил, бывших до сих пор. А именно: в случае n машин, действующих независимо друг от друга, при временной плотности вероятности включения λ_k и при среднем времени функционирования $\frac{1}{\lambda_k}$ k-ой машины, 3) если $P_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k}$ — степень эксплоатации этой машины, и f_k — ее мощность в случае функционирования.

Работа содержит оценку и для наименьшего n, обеспечивающего применяемость формул и дает связь между величинами t некоторого завода и его цехов.

DÉTERMINATION PROBABILISTIQUE DU BESOIN D'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE D'USINES DE CONSTRUCTION MÉCANIQUE AINSI QUE DE LEURS COÉFFICIENTS DE SIMULTANÉITÉ ET DE BESOIN D'ÉNERGIE

A. RÉNYI ET T. SZENTMÁRTONY

Résumé

La quantité d'énergie consommée pour des usines de construction mécanique par unité de temps n'atteint pas la valeur *maximum possible* nommée puissance installée, mais fluctue considérablement au-dessous de ce dernier. La plus grande valeur que le quotient de ces deux quantités peut atteindre avec une probabilité qui n'est pas négligeable s'appelle le *coéfficient de besoin d'énergie t* de l'usine. Dans le cas d'une usine qui consiste d'un nombre de machine dont chacune a le même besoin d'énergie ce coéfficient se simplifie au coéfficient de simultanéité. Les formules (2.4)—(2.12) déduites pour ces coefficients fournissent, au lieu des règles empiriques employées jusqu'ici, des valeurs dont le niveau de probabilité est 99%; notamment, en cas d'indépendance des n machines, avec la densité temporelle de probabilité λ_k et le temps moyen de fonctionnement $\frac{1}{\mu_k}$ de la machine k-ième, si $P_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k}$ désigne le degré d'exploitation et f_k la puissance de cette machine pendant son fonctionnement. L'article donne aussi une estimation concernant le nombre n minimum assurant la possibilité de l'application des formules, et indique la connexion entre les valeurs de t d'une usine et de ces ateliers.