

## HOZZÁSZÓLÁSOK

### KALMÁR LÁSZLÓ ELŐADÁSÁHOZ

RÉNYI ALFRÉD lev tag:

A Matematikai Bizottság ülésén eddig elhangzott előadások igen értékes és magas színvonalú beszámolók voltak a magyar matematikai tudomány fejlődéséről a matematika egy-egy átfogóbb fejezete terén. Nem véletlen azonban, hogy ezen előadások után nem alakult ki a szó szoros értelmében vett vita, hanem csak olyan hozzászólások hangzottak el, amelyek kiegészítették az előadást. Egy ilyen beszámolóval kapcsolatban ugyanis vita csak úgy alakulhat ki, ha az előadó az elért konkrét eredmények ismertetésén, sőt egyes konkrét még megoldatlan problémák ismertetésén túlmenőleg kísérletet tesz arra, hogy a matematika szóbanforgó fejezetének kijelölje a helyét a matematikán belül és vázolja azt az irányt, amelybe a matematika illető ágának fejlődnie kell, hogy a jövőben fokozottabban tölthesse be azt a szerepet, amelyre hivatott. Nem vitás, hogy *Kalmár László* előadása azon túlmenőleg, hogy világos és sok fontos összefüggésre rámutató beszámolót nyújtott a matematika alapjai terén a legutóbbi időkben magyar matematikusok által elért valóban figyelemre-méltó eredményekről, kísérletet tett arra is, hogy a matematika alapjaira vonatkozó kutatások célját és jelentőségét is vázolja és ezzel kapcsolatban kijelölje azt az irányt, amelybe a kutatásokat a jövőben folytatni kell. Ezt előadása jelentős pozitívumának tekintem, ugyanakkor azonban ez az értékes és helyes kísérlet szükségessé teszi a *Kalmár László* által kifejtett álláspont megvitatását is. Ezzel kapcsolatban már előljáróban meg kell mondanom, hogy *Kalmár László* álláspontjával két lényeges ponton nem értek egyet. Az első kérdés a matematikai logika szerepére vonatkozik. *Kalmár László* előadásából világosan kitűnik, hogy ő — helyesen — a matematikai logikát a matematika alapjaira vonatkozó kutatásoknak csak egyik fontos, de nem egyetlen fejezetének tekinti. A matematika alapjaira vonatkozó kutatások feladataként ugyanakkor azt jelöli meg, hogy utat mutasson a matematikusnak kutató munkájában. Az előadás során azonban később úgy tárgyalta a matematikai logikát, mintha egyedül a matematikai logika volna hivatott, hogy utat mutasson a matematikusnak, hogy „ne tapogatózzék sötétben“, hogy *Kalmár László* saját kifejezését használjam. Ez a felfogás azonban véleményem szerint szerepének indokolatlan eltúlzását jelenti, amit azért tartok különösen veszélyesnek, mert ha a matematikai logika olyan célokat tűz ki maga elé, amelyeket nem teljesíthet, ez gátolja azt, hogy tényleges feladatait — amelyek ugyan szerintem szerényebbek, mint ahogy azt *Kalmár László* megfogalmazta, de azért igen jelentősek — valóban meg is valósítsa. Véleményem szerint a matematikai logika a matematikának csak a formális oldalával foglalkozik és ezen fontos feladatának teljesítése közben a tartalom kérdését, a matematika és a valóság viszonyának kérdését szándékosan nem is érinti. A feladat önmagában véve is jelentős és nem szorul rá, hogy jelentőségét úgy húzzuk alá, hogy olyan szerepet tulajdonítsunk neki, amelyet éppen sajátos jellegénél fogva nem tölthet be. Formális apparátus nélkül nincsen matematika és a formális apparátus jelentőségét lebecsülni teljesen helytelen volna. Azonban más dolog a matematika formális apparátusának jelentőségét elismerni és más dolog elfeledkezni a tartalom kérdéséről. Éppen ez az alapvető ellentét a matematika materialista és idealista felfogása között: az idealista felfogás csak a formát látja, míg a materialista felfogás állandóan szem előtt

tartja, hogy a matematikai formákban, habár közvetve és elvontan, de mégis a valóság, annak mennyiségi viszonyai és térbeli formái tükröződnek — hogy *Engels Kalmár* által is idézett kifejezésével éljek. Ebből azonban nyilvánvalóan következik, hogy a matematikai logika csak a matematika formális kérdéseiben mutathat utat a matematikusnak, a matematika és a valóság viszonyának alapvető kérdéseiben nem. Éppen ezért, véleményem szerint ahhoz, hogy a matematikus „ne tapogatózzék sötétben“ elsősorban nem az szükséges (bár ez is hasznos és fontos), hogy fokozottabban megismerje és alkalmazza a matematikai logika módszereit és eredményeit, hanem ennél sokkal nagyobb jelentősége van annak, hogy megismerje a dialektikus materializmust és tudatosan alkalmazza azt a matematika és a valóság viszonyának kérdéseire, ez segíti a matematikust leginkább abban, hogy „ne tapogatózzék sötétben“.

A másik kérdés, amelyben nem értek egyet *Kalmár László*val, az analízis kérdése. *Kalmár László* párhuzamot vont a valószínűségszámítás és az analízis között. Valójában a helyzet az analízisben ma egészen más, mint a valószínűségszámításban. A valószínűségszámítás századunk első évtizedeiben válságon ment keresztül, a válságból a kiutat szovjet matematikusok találták meg — elsősorban *A. N. Kolmogorov* — és ennek során, a valószínűségszámítás szabatos matematikai elméletének megalkotásában, nagy segítségükre volt, hogy tudatosan alkalmazták a dialektikus materializmust. Hasonló jellegű válságról ma az analízisben nem beszélhetünk. Ilyen jellegű válság valóban volt az analízisben is, azonban ez a múlt század első felében volt és a kiutat az analízis szabatos felépítésével *Dedekind*, *Weierstrass*, *Cantor* és követőik mutatták meg. Hogy ezt a kérdést világosan lássuk, vizsgáljuk meg, hogy mi jellemzi a matematika valamely fejezetének válságát? A válságokat a matematikában (ugyanúgy, mint a társadalomban) elsősorban ellentmondások fellépése és kieleződése jellemzi, melyek következtében minden bizonytalanná válik és elmosódik a határ „igaz“ és „hamis“ között. Az analízis alapvető fogalmaival kapcsolatban a múlt század elején valóban felmerültek ellentmondások (gondoljunk *Bolzano* paradoxonaira, vagy a konvergencia-fogalom tisztázatlanságából származó ellentmondásokra, vagy még előbb a XVIII. században a függvény fogalmával kapcsolatos vitákra) és ezeknek az ellentmondásoknak igen nagy történelmi jelentőségük volt: ezeknek az ellentmondásoknak a feloldására irányuló törekvések nagymértékben hozzájárultak az analízis szabatos megalapozásához. Ilyen jellegű ellentmondásokkal ma az analízisben nem találkozunk és ez is mutatja, hogy nem lehet ma válságról beszélni az analízisben. Hivatkozom itt *Kolmogorov*nak az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadására, ahol — a valószínűségszámítás megalapozása terén előttünk álló feladatokat illetően — az analízist állította példaképpül a valószínűségszámítás elé és azt mondta: a valószínűségszámítás matematikai elméletének továbbfejlesztésénél arra kell törekednünk, hogy a valószínűségszámítás konkrét kérdéseinek megoldásához ne kelljen visszanyúlnunk a valószínűségszámítás halmazelméleti alapjaira, amelyekben végeredményben az illető konkrét probléma matematikai megoldása nyugszik, mint ahogy egy differenciálegyenlet megoldásánál nem kell a valós számok *Dedekind*-féle, vagy *Cantor*-féle elméletéig visszanyúlnunk, bár végső fokon a megoldás egy ilyen elmélet létezését feltételezi. Az analízis, alapjainak szilárdságát illetően tehát olyan fokon áll ma, hogy mintaképpül szolgálhat más, fiatalabb matematikai diszciplínáknak. Ha tehát az analízis megalapozása körül nincsenek nyitott problémák, akkor hogyan értékeljük azokat a problémákat, amelyeket *Kalmár László* felhozott?

A helyzet az, hogy az általa említett problémák valóban megvannak, és abban is egyetértek, hogy ezekkel a problémákkal foglalkozni kell, azonban ezek a problémák nem az analízis megalapozásának a problémái, hanem egyrészt az analízis oktatásával kapcsolatos didaktikai problémák, másrészt a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos általános problémák, amelyek az analízis megalapozásától teljesen függetlenek akkor is, ha az analízissel kapcsolatban lépnek fel leggyakrabban. Nagyon vigyázni kell, hogy ezekben a kérdésekben tisztán lássunk, hiszen e nélkül nem juthatunk egy lépéssel sem előbbre. Nézzünk egy konkrét kérdést: *Kalmár László* beszélt arról, hogy egyes fizikusok idegenkednek az analízis szabatos matematikai elméletétől és szívesebben megmaradnak a végtelen kicsiny mennyiségek misztikus felfogásánál. Kétségtelen, hogy akadnak ilyen fizikusok, ez azonban nem jelenti azt, hogy az analízis alapjaiban van a hiba: helyesebb volna a hibát az ilyen fizikusok matematikai tudásában keresni. Akkor volna indokolt az analízisben keresni a hibát, ha az analízis szabatos matematikai elmélete kevésbé volna alkalmazható, mint a misztikus differenciálfogalom. Erről azonban szó sincs. Az Alkalmazott Matematikai Intézet munkája során igen sok gyakorlati probléma merült fel és ezek megoldása során minden esetben tekintettel voltunk a gyakorlat követelményei mellett a matematikai szabatosságra is. Azonban egyetlen esetben sem tapasztaltuk, hogy ez a gyakorlati alkalmazhatóság hátrányára lett volna: éppen ellenkezőleg, a matematikai szabatosság mindig a gyakorlat követelményeit szolgálta. A másik kérdés, amit *Kalmár László* érintett a „precíziós” és „approximációs” matematika ellentéte. Valójában nincs kétfajta matematika, hanem csak arról van szó, hogy az elmélet és gyakorlat elszakadása a burzsoá társadalomban a matematika területén is megnyilvánul. Ennek megvannak a társadalmi okai és valóban beszélhetünk a burzsoa tudomány általános válságán belül a burzsoa matematika válságáról is, ami többek között az elmélet és gyakorlat elszakadásában nyilvánul meg, de ez nem az analízis válsága. Nekünk ma, a szocializmus építésének korszakában a matematika területén is az elmélet és gyakorlat egységének megvalósítására kell törekednünk és ez az analízis területén azt jelenti, hogy törekednünk kell olyan problémák megoldására, amelyeknek a gyakorlatban jelentőségük van; törekednünk kell például sorfejtéseknél a maradéktag gyakorlatilag használható megbecsülésére; ehhez azonban nincsen szükség a konvergencia szabatos matematikai fogalmának elvetésére, vagy valamilyen „új” analízisre, — az analízis „új alapvetésére”, ahogy *Kalmár* mondta —, hiszen ez az analízis meglévő elméletének keretei között teljes mértékben megvalósítható. Egyetértek abban, hogy „szakítanunk kell a tudomány öncélúságának tévtanával” de ez egészen más kérdés; különbséget kell tenni egy matematikai elmélet és polgári matematikusok vagy filozófusok által ahhoz fűzött idealista filozófiai megjegyzések között. Egyébként is a „tudomány öncélúságának tévtanával” a matematika bármely ágával kapcsolatban találkozunk, így például az algebrával kapcsolatban még nagyobb mértékben, mint az analízissel kapcsolatban. Azt jelenti ez, hogy az algebrában is „új alapvetésre” van szükség? Természetesen egyáltalán nem jelenti azt. Ezzel szemben valóban szükséges, hogy a matematikával kapcsolatos idealista megnyilvánulásokkal, a „matematikai idealizmussal” minden vonalon felvegyük a harcot és ugyanakkor a dialektikus materializmus alapján fokozott gonddal foglalkozzunk a matematika és alkalmazásainak elvi kérdéseivel. Ezzel lényegében visszajutottam ahhoz, amit a matematika alapjaira vonatkozó kutatásokkal kapcsolatban mon-

dottam és abban már egyetérttek Kalmár Lászlóval, hogy ezen a téren még igen sok tennivalónk van.

ALEXITS GYÖRGY r. tag:

- *Kalmár László* igen világos előadásának néhány filozófiai jellegű részletéhez szeretnék hozzászólni.

Semmiképp sem tudok egyetérteni *Kalmár*nak azzal a megállapításával, hogy a „matematikai logika a matematika alapjainak a tudománya“. A matematikai logika a *matematikai gondolkodás formáival*, nem pedig magával az anyagi valósággal foglalkozik. A gondolkodás pedig az anyagi létezésnek egy sajátos módon való visszatükrözése a tudatban (*Lenin*). A matematikai logika tehát a valóság egy sajátos visszatükrözésének *formáit* vizsgálja, nem pedig magát az anyagi valóságot. Ezzel szemben a „matematika tárgyát a valóságos világ térformái és mennyiségi viszonylatai alkotják“ (*Engels, Anti-Dühring*). A matematikai logika, mint a valóság visszatükrözésével foglalkozó tudomány, nem tartalmazhatja tehát a valóság bizonyos viszonyait *közvetlenül* vizsgáló matematikai alapjait, nem lehet „a matematika alapjainak a tudománya“.

*Kalmár* ebben a kérdésben idealista felfogású, mert előbbre helyezi a tudattal foglalkozó matematikai logikát, a lét egyes kérdéseit tárgyaló matematikánál. Ez a nézet megegyezik a logikai objektívizmus felfogásával, amelyet *Leibniz* óta *Bolzano, Husserl, Meinong, Russell* és az összes többi logisztikusok képviseltek. Teljesen helytelen és a dialektikus materializmussal homlokegyenest ellenkező, idealista álláspontot foglal el az, aki a matematikai megismerés formalizmusát tartja a matematika alapjai tudományának.

Ugyanakkor helytelen volna a matematikai logika eredményeinek lekicsinylése is. Kétségtelen, hogy a matematikai logika a matematikai megismerés formáit, különösen a formalizmus határait illetően jelentős eredményeket ért el és ezek között előkelő helyet foglal el *Kalmár* néhány vizsgálata. Különösen érdekes *Kalmár*nak az az eredménye, amely szerint a Church-tétel speciális esete az általánosan fogalmazott Gödel-tételnek. Nem tudok azonban teljesen egyetérteni *Kalmár*nak azzal a felfogásával, mintha *ezzel az eredménnyel* sikerült volna megcáfolni azt az idealista állítást, hogy a tudásnak vannak abszolút határai. Ez a fogalmazás ismét arra mutat, hogy *Kalmár* a matematikai logika eredményeit a valóságra vonatkozó tényeknek gondolja. A Church-tétel bármilyen interpretációja — akár ismerjük *Kalmár* eredményét, akár nem — mindenképpen legfeljebb azt jelentheti, hogy a pusztán formális, *axiomatikus megismerésnek* vannak határai. Ez az állítás pedig semmi meglepőt sem tartalmaz, hiszen a formális gondolkodás korlátozott volta a dialektikus materializmus ismerőinek nem jelent különös meglepetést. Az érdekes csupán az, hogy az idealisták ezt a tényt saját módszereik következetes alkalmazásával *kénytelenek* elismerni.

Nem tudok végül egyetérteni az előadás utolsó részének néhány megállapításával sem. Így helytelennek tartom a precíziós és approximációs matematika merev szétválasztásának felfogását. A matematikának ez a két tendenciája az anyagi valóságról való ismereteink különböző fejlődési fokát, nem pedig különböző megismerést jelent. Az olyan állítások pedig, hogy az approximációs matematika „kicsire nem néz“ elve a kapitalizmus hanyatló korának felel meg, a Weierstrass-féle epszilontika pedig *Weierstrass* korának a való-