VALÓSZÍNŰSÉG-ELOSZLÁSOK VETÜLETEIRŐL

RÉNYI ALFRÉD lev. tag

Előadta az 1952. április 28-án tartott felolvasó ülésen

J. Radon, egy 1917-ben közölt[1] értekezésében megoldotta a következő problémát: meghatározandó egy az (x, y) sík K korlátos tartományában értelmezett $f(x, y)$ folytonos függvény, ha adva van e függvény integráljának értéke a K tartomány minden húrja mentén. Eredményeiből egyebek között következik a következő

R. Tétel. Ha K az (x, y) sík korlátos tartománya és a folytonos $f(x, y)$ függvény integrálja a K tartomány minden húrja mentén eltűnik, úgy $f(x, y)$ azonosan egyenlő nullával.

Ezt a tételt azóta sok szerző függetlenül újra felfedezte. Így például az *R*-tételt *H. Steinhaus* 1941-ben egy a lwowi egyetem konferenciáján tartott előadásában[2] bebizonyította; ebben az időben *H. Steinhaus* professzornak nem volt tudomása *J. Radon* eredményeiről; csak nemrég ismerte meg a szóbanforgó értekezést és szíves volt figyelmemet arra felhívni. Figyelmemet erre a problémára *Hajós György* is felhívta már, aki ugyanezt a problémát *S. Tarski*[3] egy sejtésével kapcsolatosan vetette fel, mely sejtést időközben *Th. Bang*[4, 5] bebizonyított. *Bang* tétele a következőképpen hangzik: ha egy *K konvex* tartományt n számú, párhuzamos egyenesek által határolt $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sáv fed be, mely sávok szélességei $d_1, d_2, \ldots, d_n$, úgy $\sum_{k=1}^{n} d_k$ nagyobb vagy egyenlő, mint a K tartomány d szélessége. Mielőtt rámutatnánk az *R*-tétel és a *Bang*-féle tétel közötti összefüggésre, tegyük meg a következő megjegyzést: ha valamely K tartományra nézve létezik olyan nem-negatív, integrálható $f(x, y)$ függvény, melynek integrálja K minden húrja mentén 1-gyel egyenlő, úgy *Bang* tételének állítása könnyen következik erre a tartományra nézve, mivel, ha az $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sávok lefedik K-t, úgy fennáll, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} \iint_{S_k} f(x, y)\, dx\, dy \geqq \iint_{K} f(x, y)\, dx\, dy = d. \qquad (1)$$

Ily függvény azonban csak a körre nézve ismeretes: ha K az $x^2+y^2=1$ egyenlettel biró kör által határolt körlap úgy az

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad (2)$$

függvény rendelkezik a kívánt sajátságokkal. Ennek bebizonyítására szimmetriaokok alapján elegendő csupán oly húrokat vizsgálni, amelyek az y tengellyel párhuzamosak; így pl. az $x=a$ ($|a|<1$) húrra nézve azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\sqrt{1-a^2}}^{+\sqrt{1-a^2}}\frac{dy}{\sqrt{1-a^2-y^2}}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=1. \tag{3}$$

Ez számítások nélkül is bebizonyítható annak a jólismert geometriai ténynek alapján, hogy az 1 sugarú gömb bármely szeletének felszíne csak a szelet magasságától függ.

Könnyű belátni, hogy egy ily függvény csak állandó szélességű K tartományokra nézve létezhetik; ugyanis a koordinátarendszer minden helyzetére nézve fennáll, hogy

$$\iint\limits_{K} f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_{K} dy=\int\limits_{K} dz, \tag{4}$$

azaz a tartomány szélessége az y és z koordináta-tengelyek irányában egyenlő az $\iint\limits_{K} f(x,y)\,dx\,dy$ állandóval, amely független a koordinátarendszer megválasztásától. Nem tudjuk, vajjon a körtől különböző egyéb állandó szélességű tartományokra nézve ily függvény tényleg létezik-e.

Áttérünk most az R-tételnek *Tarski* sejtésével való összefüggésére. Ez abban áll, hogy ha valamilyen K tartományra nézve egyáltalában létezik egy oly $f(x,y)$ függvény, amely azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy integrálja K minden húrja mentén 1-gyel egyenlő, úgy azt kérdezhetjük, vajjon ez a függvény egyértelműen meg van-e határozva, vagy sem. Az R-tétel azt mutatja, hogy [ha $f(x,y)$ folytonosságát is kikötjük] $f(x,y)$ egyértelműen meg van határozva.* Az R-tételt függetlenül újra felfedezték és általánosították *I. Szarszki* és *T. Wazewski*[6] értekezésükben, amelyben e tétel igen egyszerű bizonyítása található meg. Az R-tétel további általánosításait találhatjuk meg *I. Mikusinski* és *C. Ryll-Nardzewski* a Studia Mathematicában közzé teendő értekezésében, valamint *W. Wolibner* sajtó alatt lévő értekezésében.** A jelen cikk tárgya szintén az, hogy az R-tételnek egy új bizonyítását, valamint egy (az említettektől különböző) általánosítását adja.

Ki fogjuk mutatni, hogy az egész probléma lényegében a valószínűségszámítás körébe tartozik és a valószínűségszámítás analitikus módszereivel tárgyalható, nevezetesen a karakterisztikus függvényekre vonatkozó unicitási tétel alkalmazásával. Ki fogjuk mutatni, hogy az R-tétel *H. Cramér* és *H. Wold*[7] egy tételének következménye, amely tétel a következőképpen fogalmazható meg:

CW tétel: Minden síkbeli valószínűség-eloszlás egyértelműen meg van határozva lineáris vetületeinek összessége által. Nyilván ez a tétel — valószínűség-eloszlások helyett — tömegeloszlásokra is megfogalmazható.

* Ha a folytonosságot nem tételezzük fel, úgy $f(x,y)$ módosítható egy tetszőleges halmazon, melynek közös része minden egyes egyenes vonallal 0 (lineáris) mértékkel bír.

** Az említett szerzők személyes közlése szerint.

Az I. fejezet tartalmazza az imént említett CW tétel bizonyítását, amely lényegében azonos *H. Cramér* és *H. Wold* bizonyításával és amelyet ebben a dolgozatban csak azért közlünk, hogy az önmagában teljes legyen. Az I. fejezet továbbá tartalmazza a tétel három-, vagy többdimenziós terekre való általánosításának bizonyítását (CW′ tétel), továbbá tartalmazza annak a tételnek (1. tétel) bizonyítását, amely szerint az eloszlások egy széles osztályára nézve megszámlálhatóan végtelen sok különböző vetület ismeretében is már egyértelműen meghatározható az eloszlás. Következik ebből a tételből, hogy annak biztosítására, hogy a K korlátos tartományban értelmezett $f(x, y)$ folytonos függvény azonosan eltűnjék, elegendő feltenni, hogy annak integrálja minden olyan húr mentén eltűnik, amely párhuzamos egy az egyenes vonalak valamely adott tetszőleges, megszámlálhatóan végtelen rendszeréhez tartozó egyenessel (2. tétel). A dolgozat nyitva hagyja azt a kérdést, vajjon ez minden eloszlásra igaz-e vagy sem.

A II. fejezet bizonyos diszkrét eloszlások, mégpedig — a tömegeloszlás terminológiájának felhasználásával — oly eloszlások tanulmányozásával foglalkozik, amelyek véges számú tömegpontból állnak, azaz véges számú olyan pontból, amelyekben pozitív tömegek vannak koncentrálva. A szerző felvetette azt a sejtést, hogy egy n számú tömegpontból álló eloszlás a síkban egyértelműen meg van-e határozva $n+1$ tetszőleges különböző vetülete által. E tételt (3. tétel) *Hajós György* bizonyította be; bizonyítását szíves engedelmével a jelen dolgozatban közlöm. Bebizonyítjuk, hogy ugyanez igaz *n egyenlő* tömegpontra nézve a térben (4. tétel) és ez az eredmény nem javítható. A szerző őszinte köszönetét fejezi ki *H. Steinhaus*nak, *T. Wazewski*nek, *M. Fisz*nek és *Hajós György*nek értékes megjegyzéseikért.

I. FEJEZET

J. Radon említett tétele a következő ekvivalens alakban is megfogalmazható:

R′-tétel: Egy a K konvex tartományban értelmezett $f(x, y)$ folytonos és nem-negatív függvény egyértelműen meg van határozva, ha integráljának értéke K minden húrja mentén adva van.

Mutassuk ki, hogy az R'-tétel következik az R-tételből és megfordítva. Ha az $f(x, y)$ nem-negatív és folytonos függvény integráljának értéke minden húr mentén ugyanaz, mint valamely folytonos és nem-negatív $g(x, y)$ függvény integráljának értéke, úgy $f(x, y)-g(x, y)$ integrálja minden húr mentén eltűnik és így az R-tétel értelmében fennáll, hogy

$$f(x, y) \equiv g(x, y).$$

Így tehát az R'-tétel az R-tételből következik. Másrészt, ha a folytonos $f(x, y)$ függvény integrálja K minden húrja mentén eltűnik, akkor legyen

$$f_1(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{ha } f(x, y) \geqq 0 \\ 0 & \text{ha } f(x, y) < 0 \end{cases}$$

és

$$f_2(x, y) = f_1(x, y) - f(x, y).$$

Ez esetben $f_1(x, y)$ és $f_2(x, y)$ folytonosak és nem-negatívak és integráljaik ugyanazon értékkel bírnak K minden húrjára. Így tehát az R'-tételből következik, hogy $f_1(x, y) \equiv f_2(x, y)$ és így hogy $f(x, y) \equiv 0$; vagyis az R-tétel következik az R'tételből.

Mármost, ahelyett, hogy feltennénk, hogy $f(x, y)$ integrálja minden egyenes vonal mentén ismeretes, feltehetjük, hogy a

$$J(H) = \iint_{HK} f(x, y)\, dx\, dy \tag{1.2}$$

integrál értéke ismeretes minden H félsíkra, ahol HK jelöli a K tartomány és a H félsík közös részét. Nevezetesen, ha $J(H)$ minden H félsíkra ismeretes, úgy a

$$J(S) = \iint_{SK} f(x, y)\, dx\, dy \tag{1.3}$$

integrál értéke ismeretes minden S párhuzamos egyenesek által határolt sávra és így $f(x, y)$ integráljának értéke minden egyes l húr mentén az

$$i(l) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \iint_{S_\Delta K} f(x, y)\, dx\, dy = \int_l f(x, y)\, ds \tag{1.4}$$

határátmenettel kiszámítható, ahol S_Δ egy oly párhuzamos egyenesek által határolt sáv, amelynek középvonala l és szélessége Δ, ds viszont az ívelemet jelöli az l egyenesen. Megfordítva, ha $i(l)$ minden l húrra ismeretes, $J(H)$ kiszámítható minden félsíkra, minthogy $J(H) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(l_x)\, dx$, ahol l_x egy oly húrt jelöl, amely párhuzamos H határvonalával és amely az erre a vonalra a koordinátarendszer kezdőpontján át húzott merőlegest egy ezen az egyenesen x abszciszszájú pontban metszi. Így tehát ahelyett, hogy azt tennénk fel, hogy $i(l)$ minden l húrra ismeretes, feltehetjük, hogy $J(H)$ minden H félsíkra ismeretes.

Mármost az általánosítás első lépése abból áll, hogy elhagyjuk azt a korlátozást, mely szerint $f(x, y)$ korlátos tartományban van értelmezve és oly $f(x, y)$ függvényeket vizsgálunk, amelyek az egész síkon értelmezve vannak, de feltesszük, hogy az $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy$ integrál véges. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1. \tag{1.5}$$

Az általánosítás második lépése abból áll, hogy elhagyjuk azt a korlátozást, amely szerint az $f(x, y)$ nem-negatív függvény folytonos legyen és csak azt tesszük fel, hogy *Lebesgue* szerint integrálható. Így, úgy tekinthetjük az $f(x, y)$ függvényt, mint valamely síkbeli valószínűség-eloszlás sűrűségfüggvényét és azt kérdezhetjük, vajjon e sűrűségfüggvény félsíkokra vonatkozó integráljának értékei egyértelműen meghatározzák-e a sűrűségfüggvényt, vagy ami ugyanaz, — egyértelműen meghatározzák-e a megfelelő

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du\, dv \tag{1.6}$$

eloszlásfüggvényt. Jelöljünk l-lel egy a koordinátarendszer kezdőpontján át húzott tetszőleges egyenest és jelöljük H_p-vel azt a félsíkot, amelynek határvonala merőleges l-re és amely az l egyenest egy oly pontban metszi, melynek koordinátája l-en p-vel egyenlő. Világos, hogy

$$F_l(p) = J(H_p) = \iint_{H_p} f(x, y)\, dx\, dy \tag{1.7}$$

mint p függvénye nem egyéb, mint a sík valamely találomra választott pontjának l-re való vetületének eloszlásfüggvénye, ha a pont síkbeli eloszlásfüggvényét (1.6) határozza meg. A következőkben *az l-en való lineáris eloszlást, melynek eloszlásfüggvénye $F_l(p)$ az $F(x, y)$ eloszlásfüggvénnyel biró síkbeli eloszlás l-re való vetületének fogjuk nevezni.* Az általánosítás utolsó lépése abból áll, hogy olyan eloszlásokat is tekintetbe veszünk, amelyeknek nincs sűrűségfüggvényük és bebizonyítjuk a következő

CW tételt. Jelölje $F(x, y)$ valamely tetszőleges síkbeli valószínűség-eloszlás eloszlásfüggvényét és tegyük fel, hogy ennek az eloszlásnak minden a koordinátarendszer kezdőpontján át húzott l egyenesen ismerjük a vetületét, azaz hogy

$$F_{l_\varphi}(p) = \iint_{x \cos\varphi + y \sin\varphi \leq p} dF(x, y) \tag{1.8}$$

*ismeretes, mint p függvénye, φ minden értékére, $(0 \leq \varphi < \pi)$ ahol φ jelöli az l_φ egyenes és az x tengely által bezárt szöget. Ekkor $F(x, y)$ egyértelműen meg van határozva x és y minden értékére.**

Amint azt már a bevezetésben megjegyeztük, ez a tétel *H. Cramér*-tól és *H. Wold*-tól ered. E tétel egyszerű bizonyítását alábbiakban közöljük:

Bizonyítás: A következőkben $M(\zeta)$-val fogjuk jelölni egy ζ valószínűségi változó várható értékét, $P(A)$-val pedig az A esemény bekövetkezésének valószínűségét.

Jelöljék ξ és η egy az $F(x, y)$ eloszlásfüggvénnyel biró síkbeli, találomra választott pont koordinátáit. Jelöljük $\psi(u, v)$-vel a (ξ, η) változó pont karakterisztikus függvényét (vagy másszóval az $F(x, y)$ eloszlásfüggvénnyel

* $F(x, y)$ értékének bizonytalansága annak diszkontinuitási helyein nem lép fel, mivel feltesszük (amint ez szokásos), hogy $F(x, y)$ x valamint y függvényeként balról folytonos.

bíró valószínűség-eloszlás karakterisztikus függvényét), azaz legyen

$$\psi(u, v) = M(e^{i(u\xi + v\eta)}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(ux+vy)}\, dF(x, y). \tag{1.9}$$

A (ξ, η) pont vetülete az l_φ egyenesen a $\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi = \zeta_\varphi$ koordinátával bír és így $F_{l_\varphi}(p)$ ζ_φ eloszlásfüggvénye. Ha $F_{l_\varphi}(p)$ ismeretes mint p függvénye, úgy annak

$$\psi_\varphi(t) = M(e^{it\zeta_\varphi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itp}\, dF_{l_\varphi}(p) \tag{1.10}$$

karakterisztikus függvénye szintén ismeretes. De (1.9) és (1.10) alapján azt kapjuk, hogy

$$\psi_\varphi(t) = M(e^{it(\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi)}) = \psi(t \cos \varphi, t \sin \varphi) \tag{1.11}$$

és így következik, hogy u és v minden valós értékére fennáll, hogy

$$\psi(u, v) = \psi_{\operatorname{arc\,tg} \frac{v}{u}}(\sqrt{u^2 + v^2}) \tag{1.12}$$

és ilymódon $\psi(u, v)$ u és v minden valós értékére ismeretes. Minthogy jól tudjuk, hogy egy eloszlásfüggvény egyértelműen meg van határozva annak karakterisztikus függvénye által[7], a CW tétel teljes mértékben be van bizonyítva.

Ugyanezen módszer felhasználásával a következő tétel is bebizonyítható:

CW' tétel: Egy az n-dimenziós térben megadott valószínűség-eloszlást egyértelműen meghatározzák annak az $1, 2, \dots (n-1)$ *dimenziós alterek oly rendszerére való vetületei, mely alterek együttesen befedik az egész teret.*

Így pl. a három-dimenziós tér egy valószínűség-eloszlását egyértelműen meghatározzák annak valamennyi, a koordinátarendszer kezdőpontján áthaladó egyenesre való vetületei, vagy annak valamely adott egyenesen áthaladó valamennyi síkra való vetületei, vagy annak egyenesek és síkok oly összességére való vetületei, melyek együttesen befedik az egész teret.

A CW tétel bizonyítása egyúttal kritériumot szolgáltat arra nézve is, hogy vajjon az $F_{l_\varphi}(p)$ eloszlásfüggvények valamely rendszere valamely síkbeli eloszlás vetületeit alkotja-e. Világos, hogy ennek szükséges és elegendő feltétele az, hogy $\psi_{\operatorname{arc\,tg} \frac{v}{u}}(\sqrt{u^2 + v^2})$ egy kétváltozós eloszlás karakterisztikus függvénye legyen, ahol

$$\psi_\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itp}\, dF_{l_\varphi}(p). \tag{1.13}$$

Ugyanezzel a módszerrel bizonyítható be a következő

1. *tétel: Ha a* (ξ, η) *pont* 1 *valószínűséggel bennefoglaltatik egy* $\xi^2 + \eta^2 \leq R^2$ *körben és meg van adva a* (ξ, η) *pont vetületeloszlása a koordinátarendszer kezdőpontján átmenő egyenesek tetszőleges végtelen rendszerére, azaz, ha a* $\zeta_\varphi = \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi$ *valószínűségi változó* $F_{l_\varphi}(p)$ *eloszlásfügg-*

vénye adva van φ végtelen sok mod π *különböző értékére, úgy a* (ξ, η) *pont eloszlásfüggvénye egyértelműen meg van határozva.*

Mielőtt az 1. tételt bebizonyítanók, megfogalmazzuk tétel alakjában e tételnek egy korolláriumát, amely az R-tétel egyenes általánosítása.

2. *tétel. Legyen* $f(x,y)$ *egy olyan folytonos függvény, melyre megadható olyan* $R>0$, *hogy* $f(x,y)=0$, *ha* $x^2+y^2 \geqq R^2$. *Ha* $f(x,y)$ *integrálja eltűnik minden olyan egyenes mentén, amely párhuzamos egy egyenessel, amely a koordinátarendszer kezdőpontján átmenő egyenesek valamely tetszőleges végtelen rendszeréhez tartozik, úgy* $f(x,y)\equiv 0$.*

Az 1. tétel bizonyítása. Jelöljék $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ φ azon értékeit, melyekre $F_{l_\varphi}(p)$ ismeretes. Jelölje φ_0 a φ_n sorozat egy torlódási pontját. (1. 11) értelmében $\psi(t \cos\varphi, t\sin\varphi)$ ismeretes t minden értékére és minden $\varphi=\varphi_n$-re. Minthogy $\psi(t\cos\varphi, t\sin\varphi)$ φ-nek analitikus függvénye t minden rögzített értékére, és $\psi(t\cos\varphi, t\sin\varphi)$ t bármely rögzített értékére ismeretes a $\varphi=\varphi_{n_k}$ értékekre, ahol $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_{n_k}=\varphi_0$, így tehát arra következtethetünk, hogy $\varphi(t\cos\varphi, t\sin\varphi)$ t és φ *minden* értékére ismeretes és így az 1. tétel ugyanolyan módon következik, mint ahogy a CW tételt bizonyítottuk. $g_t(\varphi)$ analitikus volta következik abból, hogy φ minden (komplex) értékére a

$$\frac{\partial g_t(\varphi)}{\partial \varphi}=it\iint(-x\sin\varphi+y\cos\varphi)e^{it(x\cos\varphi+y\sin\varphi)}dF(x,y) \qquad (1.14)$$

derivált létezik.

II. FEJEZET

Ebben a fejezetben diszkrét eloszlásokat fogunk vizsgálni. Az egyszerűség kedvéért a tömegeloszlások terminológiáját fogjuk használni. Vizsgáljunk a síkon egy n tömegpontból álló diszkrét tömegeloszlást, azaz egy oly eloszlást, mely az m_k tömegekből áll, amelyek az (x_k, y_k) $(k=1,2,\ldots,n)$ pontokban vannak elhelyezve. Mindenekelőtt be fogjuk bizonyítani a következő

3. *tételt. Egy az* $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$ *pontokban elhelyezett, az* $m_1, m_2, \ldots, m_n$ *tömegekkel biró n különböző tömegpontból álló diszkrét eloszlás*

* Az 1. tétel bizonyításából látható, hogy a 2. tétel akkor is igaz, ha ahelyett, hogy azt tennénk fel, hogy $f(x,y)=0$, ha $x^2+y^2\geqq R^2$ csupán azt tesszük fel, hogy $f(x,y)$ elegendően kicsiny x^2+y^2 nagy értékeire, pl. ha minden $\lambda>0$-ra

$$|f(x,y)|\leqq e^{-\lambda\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (*)$$

feltéve, hogy $\sqrt{x^2+y^2}\geqq R(\lambda)$, ahol $R(\lambda)$ λ-nak valamilyen tetszőleges pozitív függvénye. Ez világossá válik, ha tekintetbe vesszük, hogy az 1. tétel bizonyításában azt a feltételt, hogy $\xi^2+\eta^2\leqq R^2$ 1 valószínűséggel teljesül, csak annak bizonyítására használjuk fel, hogy a $\psi(p\cos\varphi, p\sin\varphi)$ karakterisztikus függvény p minden értékére φ-nek analitikus függvénye, ezt pedig már a (*) feltevés is biztosítja.

*teljesen meg van határozva, ha ismeretes annak $n+1$ számú, a koordinátarendszer kezdőpontján átmenő tetszőleges különböző egyenesre való vetülete.**

A 3. tételt csak egyenlő tömegek esetére bizonyítottam be, mely esetben, a 3. tétel a 4. tétel speciális esete és a nem-egyenlő tömegek esetére az állítást, mint sejtést, közöltem *Hajós Györgyg*yel, aki azt bebizonyította és szíves volt hozzájárulni, hogy elegáns bizonyítását itt közöljem.

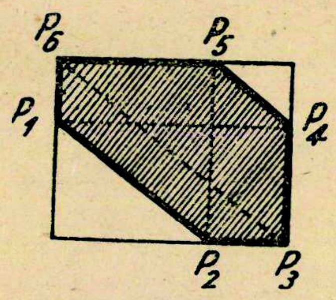
A 3. tétel bizonyítása: $n=1$ esetben a tétel triviális. Tegyük fel most, hogy $n \geqq 2$. Tekintsük minden egyes vetület két szélső pontját és vizsgáljuk az e pontokon át húzott vetítő egyeneseket (azaz, az arra az egyenesre, amelyre a vetítést eszközöljük, merőleges egyeneseket); a rövidség kedvéért ezeket az egyeneseket *szélső vetítő egyeneseknek* fogjuk nevezni.

Így tehát, ha a tömegeloszlás $n+1$ vetülete ismeretes, legalább $2n+1$ szélső vetítő egyenesünk lesz, mivel legalább n vetületnek van két különböző szélső pontja és csupán egyetlen vetület zsugorodhatik esetleg egy ponttá, (ha valamennyi pont egy egyenesen fekszik). Minden szélső vetítő egyenes legalább egy tömegponton áthalad. Minthogy n tömegpontunk van, kell, hogy legyen legalább egy olyan tömegpont, amelyen három, vagy ennél több szélső vetítő egyenes halad keresztül. Minthogy valamennyi tömegpont minden egyes szélső vetítőegyenes által meghatározott két zárt félsík egyikében fekszik, látjuk, hogy ha $r \geqq 3$ szélső vetítőegyenes halad át a síknak egy P pontján, ezek az egyenesek a síkot $2r$ szögtartományra osztják és kell, hogy valamennyi tömegpont e tartományok egyikének belsejében vagy határán feküdjék. Ezt a tartományt két szélső vetítőegyenes határolja, ennek folytán valamennyi többi szélső vetítőegyenesnek és így legalább egy vetítőegyenesnek nem lehet más közös pontja tömegpontrendszerünkkel, mint maga a P pont. De minthogy minden szélső vetítőegyenes legalább egy tömegponton keresztülhalad, következik, hogy P-nek magának tömegpontnak kell lennie. Így tehát bebizonyítottuk, hogy van legalább egy olyan tömegpont, melyen három, vagy ennél több vetítőegyenes halad keresztül és megfordítva: a síknak minden oly pontja, melyen három vagy ennél több szélső vetítőegyenes halad át, tömegpont. Így tehát, a szélső vetítőegyenesek vizsgálata útján legalább egy tömegpontot megtalálhatunk. Minthogy a többi $n-1$ pont vetületei $n+1$ egyenesre ismeretesek, (azáltal, hogy elhagyjuk a már megtalált pont vetületét), újból alkalmazhatjuk ugyanazt az eljárást és így egymásután megkereshetjük az összes tömegpontokat. Ilyenmódon a 3. tétel be van bizonyítva. Világos,

* Azon, hogy ismeretes a tömegeloszlás vetülete egy egyenesen, az értendő, hogy meg vannak adva az egyenesen azok a pontok, amelyek a tömegpontrendszer pontjainak (merőleges) vetületei, és meg van adva minden vetületi pontban, hogy mekkora tömegű tömegpont — illetve ha több pont vetülete egybeesik, úgy az van megadva, hogy mekkora össztömegű tömegpontok — vetülete.

hogy a fenti bizonyítás használható módszert szolgáltat arra, hogy egymásután megkeressük valamennyi tömegpontot és meghatározzuk a megfelelő tömegeket.

Könnyű belátni, hogy a 3. tétel nem javítható: n vetület nem mindig határoz meg egy n pontból álló diszkrét tömegeloszlást. Ugyanis, vizsgáljunk egy $2n$ oldalú Π szabályos sokszöget és nevezzük azt az n számú egyenlő, egyenként egységnyi tömegű, tömegpontból álló rendszert, amelynek tömegpontjai a Π sokszög minden második csúcsában vannak elhelyezve, az *A-rendszernek* és nevezzük azt az n számú egyenlő, egyenként egységnyi tömegű, tömegpontból álló rendszert, mely tömegpontok a Π sokszög azon n csúcsában vannak elhelyezve, amelyekben az A-rendszerbe tartozó tömegpont nincsen, *B-rendszernek*. Könnyű belátni, hogy ha $l_1, l_2, \ldots, l_n$ jelölik a Π sokszög szembenfekvő oldalpárjaira bocsátott merőlegeseket, az A-rendszer vetülete minden l_k egyenesen ugyanaz, mint a B-rendszeré. A fenti bizonyítást elemezve, könnyű belátni, hogy valamennyi olyan tömegeloszlás, melyet nem határoz meg teljesen n vetület, lényegében ekvivalens az imént említett tömegeloszlással és megkapható azáltal, ha a $2n$ oldalú, szabályos sokszöget egy oly $2n$ oldalú konvex sokszöggel helyettesítjük, melynek csúcsai $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ és amely a következő tulajdonsággal bir: a P_iP_j és P_kP_l egyenesek párhuzamosak, feltéve, hogy $i+j \equiv 1 \pmod 2$ és $i+j \equiv k+l \pmod{2n}$. Világos, hogy valamennyi $2n$ oldalú sokszögből affin transzformáció útján kapott sokszög kielégíti ezt a feltételt: de nemcsak ezek elégítik azt ki, pl. az 1. ábrán feltüntetett $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ hatszög bir a kívánt tulajdonsággal annak ellenére, hogy nem kapható meg affin transzformáció útján egy szabályos hatszögből:



1. ábra

Ahelyett, hogy valamilyen l egyenesre való vetítésről beszélnénk, beszélhetünk az l-re merőleges irányból való vetítésről, valamilyen rögzített L egyenesre.

Valamely irányból való vetítést, a projektív sík valamely a végtelenben fekvő pontjából történő vetítésnek tekinthetünk. Könnyű belátni, hogy a 3. tétel bizonyítása és ennek folytán állítása is érvényes arra az általánosabb esetre is, amikor végesben fekvő pontokból L-re való vetítést is megengedünk.

Vizsgáljuk most a három-dimenziós tér diszkrét tömegpontrendszereinek vetületeit. Bebizonyítjuk a következő

4. tételt. Vizsgáljunk a térben egy M diszkrét tömegeloszlást, amely n számú egyenlő tömegpontból áll, amelyek az (x_k, y_k, z_k) $(k, = 1, 2, \ldots, n)$ *derékszögű koordinátákkal biró pontokban vannak elhelyezve. Ha az M tömegeloszlás (ortogonális) vetülete* $n+1$ *tetszőleges síkra meg van adva, mely síkok közül nincsen két olyan, amely egymással párhuzamos volna, M teljes mértékben meg van határozva.*

Mielőtt a 4. tételt bizonyítanánk, említsük meg, hogy a tétel nem javítható. Ugyanis, ha a tömegpontok valamely α síkban, valamely $2n$ oldalú szabályos sokszög minden második csúcsában vannak elhelyezve, és azok a síkok, amelyekre ezeket a tömegeket vetítjük, valamennyien merőlegesek α-ra, úgy azt az ellenpéldát nyerjük, amelyet a 3. tétellel kapcsolatosan már megvizsgáltunk.

A 4. tétel bizonyítása. Jelöljék $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ azokat a síkokat, amelyekre a tömegeloszlást vetítjük, feltehetjük, hogy valamennyi A_k sík keresztülhalad az (x, y, z) derékszögű koordinátarendszer kezdőpontján és hogy e síkok nem haladnak át a z tengelyen, valamint, hogy egyetlen síkpár metszésvonala sem fekszik az (y, z) síkban. Válasszunk minden egyes A_k síkban egy oly (u_k, v_k) derékszögű koordinátarendszert, hogy annak kezdőpontja egybeessék az (x, y, z) koordinátarendszer kezdőpontjával és jelöljék $\alpha_{2k}, \beta_{2k}, \gamma_{2k}$ a $v_k = 0$ egyenes iránycosinusait és $\alpha_{1k}, \beta_{1k}, \gamma_{1k}$ az $u_k = 0$ egyenes iránycosinusait. Következik, hogy (x_j, y_j, z_j) vetülete az A_k síkra az (u_k, v_k) koordinátarendszerben az

$$\left.\begin{aligned} u_{jk} &= \alpha_{1k}x_j + \beta_{1k}y_j + \gamma_{1k}z_j \\ v_{jk} &= \alpha_{2k}x_j + \beta_{2k}y_j + \gamma_{2k}z_j \end{aligned}\right\} (j = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, n+1)$$

koordinátákkal bir. Ilymódon, ha ezek a vetületek meg vannak adva, úgy ismeretesek az

$$\frac{\alpha_{2k}u_{jk} - \alpha_{1k}v_{jk}}{\beta_{1k}\alpha_{2k} - \beta_{2k}\alpha_{1k}} = y_j + \lambda_k z_j$$

számok, ahol

$$\lambda_k = \frac{\gamma_{1k}\alpha_{2k} - \gamma_{2k}\alpha_{1k}}{\beta_{1k}\alpha_{2k} - \beta_{2k}\alpha_{1k}}.$$

Minthogy $\gamma_{1k}\alpha_{2k} - \gamma_{2k}\alpha_{1k}$ és $\beta_{1k}\alpha_{2k} - \beta_{2k}\alpha_{1k}$ az A_k síkra húzott merőleges két iránycosinusa, mely sík nem megy át a z tengelyen, ezek közül a második 0-tól különböző és minthogy az A_k és $A_{k'}$ $(k' \neq k)$ síkok metszésvonala nem fekszik az (y, z) síkban, a λ_k hányados k különböző értékeire különböző. Így tehát az $y_j + \lambda z_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ számok összességükben ismeretesek λ-nak $n+1$ különböző értékére. Ilyen módon e számoknak valamennyi elemi szimmetrikus függvénye, vagyis az

$$S_1(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}(y_j+\lambda z_j)$$
$$S_2(\lambda)=\sum_{1\leqq i<j<n}(y_i+\lambda z_i)(y_j+\lambda z_j)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n(\lambda)=\prod_{j=1}^{n}(y_j+\lambda z_j)$$

függvények λ-nak $n+1$ különböző értékére ismeretesek. Minthogy $S_1(\lambda)$, $S_2(\lambda),\ldots,S_n(\lambda)$ λ-ban n-nél nem nagyobb fokú polinomok, következik, hogy ezek a polinomok teljes mértékben meg vannak határozva és ennélfogva értékeik $\lambda=i$ esetére kiszámíthatók (pl. a Lagrange-féle interpolációs formula segítségével). Ebből megkaphatjuk $S_1(i), S_2(i),\ldots, S_n$ (i)értékeit, tehát az y_j+iz_j komplex számok elemi szimmetrikus függvényeinek értékeit. Következik, hogy az y_j+iz_j komplex számok meghatározhatók, mint a

$$w^n-S_1(i)\,w^{n-1}+S_2(i)\,w^{n-2}-\cdots+(-1)^n S_n(i)=0$$

egyenlet gyökei és ilymódon az (y_j, z_j) számpárok megkaphatók. Ilymódon a szóbanforgó tömegeloszlásnak az $A_1, A_2,\ldots, A_{n+1}$ síkokra való vetületeiből kiindulva meghatározhatjuk ugyanannak a tömegeloszlásnak az (y, z) síkra való vetületeit. Minthogy az (x, y, z) koordinátarendszer helyzete tetszőleges, (csak arra kell ügyelnünk, hogy egyetlen A_k sík se haladjon át a z-tengelyen és két ilyen sík metszésvonala ne feküdjék az (y, z) síkban) következik, hogy a vizsgált eloszlás vetülete *minden* ilyen síkra megkapható. A kivételes síkokon a vetületet határátmenettel határozhatjuk meg; ennek következtében az eloszlás vetületét minden síkra ismerjük és így az a CW' tétel értelmében teljesen meg van határozva; ezzel a 4. tételt bebizonyítottuk.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM:

[1] *J. Radon,* Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. Ber. Math.—Phys. Kl. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, *59* (1917), 262—277.

[2] Lásd a Colloquium Mathematicum 1951. 161. oldalát, ahol *H. Steinhaus* "Sur un problem de G. Hajós" c. előadásának rövid összefoglalása található.

[3] *A. Tarski,* Uwagi o stopniu rownowaznosci wielekatov, Parametr, *2* (1932).

[4] *Th. Bang,* On covering by parallel strips, Math. Tidskrift, 1951.

[5] *Th. Bang,* A solution of the "plank problem". Proc. Amer. Math. Soc. *2* (1951) 990—992.

[6] *I. Szarszki* és *T. Wazewski,* Sur un probleme roentgenographique de M. S. Majerek, Ann. Sol. Polonaise de Math. *20* (1947), 389—390.

[7] *H. Cramér* és *H. Wold,* Some theorems on distribution functions. Journal London Math. Soc. *11* (1936), 290—294.

[8] Lásd pl. *H. Cramér,* Mathematical methods of statistics 101.