A RAKTÁRKÉSZLET PÓTLÁSÁRÓL I.

A TÖRZSKÉSZLET

PALÁSTI ILONA, RÉNYI ALFRÉD, SZENTMÁRTONY TIBOR és TAKÁCS LAJOS

Összefoglalás

A dolgozat meghatározza, hogy egy bizonyos alkatrészből mekkora raktárkészletet kell tartalékolni, hogy az üzem folyamatos működése biztosítva legyen, vagyis meghatározza azt a legkisebb mennyiséget, amire, ha a raktárkészlet leapad, új alkatrészeket kell rendelni. A tárgyalás figyelembe veszi hogy az egyes gépek nem folyamatosan működnek, hanem véletlen működési szünetek lépnek fel. Meghatározza tetszőleges $L(x)$ működési-szakasz-eloszlás tetszőleges $H(x)$ szüneteloszlás és tetszőleges $G(x)$ valódi élettartam-eloszlás mellett az alkatrészcserék számának az eloszlását. Ennek segítségével meghatározza, hogy előírt kockázat mellett hogyan kell a törzskészletet meghatározni.

Bevezetés

Vizsgálataink a következő problémával kapcsolatosak: tekintsünk egy üzemet, amelyben ugyanazon típusú gépalkatrészek, vagy felszerelési tárgyak egy-időben több példányban vannak igénybevéve. Ezek az alkatrészek az igénybevétel következtében előbb-utóbb véletlenszerűen eltörnek vagy elkopnak. A tönkrement alkatrészeket, hogy az üzem termelésében kiesés ne történjék, azonnal ki kell cserélni. Ez csak úgy lehetséges, ha a különböző alkatrészekből egy bizonyos mennyiséget tartalékolunk és utánrendeléssel folyamatosan gondoskodunk arról, hogy a raktárkészlet ne merüljön ki. A pótlás ideje alatt természetesen újabb cserékre is sor kerülhet. A termelés folyamatosságának biztosítása megköveteli, hogy a raktárkészletből a pótlás ideje alatt az esetleg tönkrement alkatrészeket ki tudjuk cserélni, azaz (nagy valószínűséggel) ne fogyjon ki az illető alkatrészfajta raktárkészlete. A raktárkészlet utánpótlása többféleképen történhet. Tárgyalásunkban a következő esetre szorítkozunk: feltesszük, hogy ha a raktárkészlet egy bizonyos, később megállapítandó szintre — melyet a következőkben törzskészletnek nevezünk — leapad, akkor új alkatrészeket rendelünk.

A fentiekkel kapcsolatban két probléma merül fel:

I. *Mekkora törzskészletet kell egy üzemben tartalékolni egy bizonyos alkatrészfajtából, hogy a termelés folyamatossága nagy valószínűséggel biztosítva legyen, és ugyanakkor elkerüljük a felesleges tartalékolást.*

A törzskészlet nagyságának helyes megállapítása az üzem számára nagyösszegű megtakarítást jelent, népgazdasági szempontból pedig biztosítja, hogy nem vonunk el más üzemektől azok számára fontos alkatrészeket.

II. *A másik kérdés az, hogy a készletpótló rendelés nagysága* mekkora legyen. Ezzel a kérdéssel foglalkozik *L. Ziermann Margit* ebben a kötetben lévő dolgozata ; jelen dolgozatban erre a kérdésre nem térünk ki.

Rényi Alfréd és *Szentmártony Tibor* korábbi [1] dolgozatukban foglalkoztak az első kérdéssel és arra az eredményre jutottak, hogy ha az alkatrész élettartamának, vagyis a beállítás pillanatától a törésig eltelt időnek az eloszlása exponenciális T átlaggal, továbbá ha a pótlási idő (ami alatt a megrendelés pillanatától a szállításig eltelt időt értjük) p átlagú és s szórású gammaeloszlást mutat,* akkor a törzskészlet értéke :

$$k = \frac{p}{T} + \nu \sqrt{\frac{p}{T} + \frac{s^2}{T^2}} \cdot$$

Itt $\nu = 2$, illetve 3 esetén 2,28, illetve 0,14%-os a kockázat. Ezalatt azt értjük, hogy 0,0228, illetve 0,0014 annak a valószínűsége, hogy a pótlási idő alatt a raktár ebből az alkatrészfajtából kimerül.

A probléma eddigi irodalmából kiemeljük *K. I. Arrow, Th. Harris* és *I. Marschak* [2], továbbá *A. Dworetzky, I. Kiefer* és J. *Wolfowitz* [3] dolgozatait. Az utóbbi dolgozatok közlik a kérdés bibliografiáját is. Ezek a dolgozatok egész más úton haladnak, mint a mi vizsgálataink. Az alapvető különbségek a következők :

1. Az említett szerzők a folyamatot csak diszkrét időpontokban vizsgálják, ezzel szemben mi az időt folytonos változónak tekintjük.

2. Az említett szerzők a raktárkészlettel szemben fellépő igények jellegét nem specializálják elhasználódás folytán szükségessé váló csere következtében fellépő igényekre ; ezáltal tárgyalásuk általánosabb (pl. így kereskedelmi problémákra is alkalmazható, erre a kérdésre mi is vissza kívánunk más alkalommal térni), ugyanakkor azonban a szóbanforgó konkrét problémára nézve kevesebbet mond, mivel az alkatrészcserék által alkotott sztochasztikus folyamatot ők közelebbről nem is vizsgálják.

3. Az említett szerzők a probléma tárgyalását a kereslet-függvény és a kockázat-függvény ismeretére építik. Ezeket a függvényeket az illető gazdasági rendszer piackutatása alapján lehet meghatározni. Mondani sem kell, hogy a kockázat megállapításánál nagy szerepet játszanak különböző spekulációs elgondolások és kizárólag az érdekelt vállalat érdekeit tartják

* Egy τ valószínűségi változó T átlagú exponenciális eloszlású, ha eloszlásfüggvénye pozitív t-kre

$$P(\tau < t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \text{ ha } t > 0,$$

és p átlagú s szórású gamma eloszlású, ha $P(\tau < t) = \frac{a^m}{\Gamma(m)} t^{m-1} e^{-at}$, ahol $a = p^2/s^4$, $m = p^2/s^2$ és $\Gamma(m) = \int\limits_0^\infty x^{m-1} e^{-x} dx$ a gamma-függvényt jelöli.

szemelőtt. Ezzel szemben mi az egész népgazdaság érdekeiből indulunk ki és ennek megfelelően ítéljük meg a felesleges tartalékolást, amellyel más üzemek elől vonnánk el fontos alkatrészeket és hasonlóan ítéljük meg a termelés kiesését is, amellyel a tervszerű termelésnek okoznánk károkat.

4. Mi egy speciális tartalékolási rendszerből indulunk ki, amelynél mindig akkor történik utánrendelés, amikor a raktárkészlet egy bizonyos kritikus szintre leapad, ezzel szemben *Dworetzky*, *Kiefer* és *Wolfowitz* egy adott »kockázat-függvény«-hez keresik az optimális utánrendelési »stratégiát«. Ezen a ponton megmutatkoznak annak hátrányai, hogy utánrendelés csak bizonyos, előre meghatározott időpontokban lehetséges. Ezen feltevés mellett ugyanis az az utánrendelési módszer (stratégia), amelyet mi alapul vettünk, általában nem valósítható meg (bár az említett szerzők vizsgálataiból is kitűnik, hogy elég általános feltételek mellett valóban ez a legelőnyösebb módszer), hiszen ha a raktárkészlet két utánrendelési időpont között apad le a kritikus szintre, akkor a következő időpontig, amikor rendelés leadása lehetséges, a raktárkészlet már lényegesen a kritikus szint alá süllyedhet. Ez meglehetősen illuzórikussá teszi az optimális »stratégia« kérdését, hiszen az általunk alapul vett utánrendelési rendszer, amely sok esetben valóban optimális, az említett szerzők tárgyalásmódja mellett eleve ki van rekesztve.

A következőkben az [1] dolgozat meggondolásait annyiban általánosítjuk, hogy tekintetbe vesszük azt, hogy az egyes gépek az üzemidő alatt nem folyamatosan működnek, hanem véletlen működési szünetek lépnek fel, amelyek hozzájárulnak a kiválasztott alkatrész üzemidőben mért élettartamának megnöveléséhez. Ezúton mondunk köszönetet *Faludi Zoltánnak*, a Gépipari Minisztérium Normaintézete osztályvezetőjének az [1] dolgozat eredményeinek megbeszélése során a probléma gyakorlati vonatkozásait illető értékes útmutatásaiért.

1. §. A probléma általános tárgyalása

A véletlen szünetek keletkezésének több oka lehet. Előfordulhat, hogy a gépek nem folyamatosan, hanem kisebb-nagyobb megszakításokkal működnek a munka természetének következtében, vagy sok alkatrésszel működő gépek esetén ha egy alkatrész tönkremegy, a javítási idő működési szünetet okoz a többi alkatrésznél is.

Így tehát mindenegyes alkatrésznél kétféle élettartamról beszélhetünk:

1. *üzemi élettartam*, amely alatt a beállítás pillanatától a tönkremenésig eltelt üzemidőt értjük (beleértve a véletlen szüneteket is).

2. *valódi élettartam*, vagy az alkatrész futási ideje, az az idő, amely alatt az alkatrész ténylegesen működik (kihagyva a szüneteket).

Megjegyezzük, hogy az üzemidő megegyezhet a naptári idővel, vagy különbözhet attól. Folyamatosan működő üzemnél a kettő megegyzik, míg szakaszosan működő üzemnél az üzemidő a naptári időnél kisebb. A rendszeres üzemszünetek nyilvánvalóan a 24 óra és az erre eső rendszeres átlagos üzemidő arányában — például 8 órás munkaidő esetén háromszorosára — növelik az alkatrész élettartamát.

Feladatunk : a folyamatos termelést bizonyos, kicsiny kockázattal biztosító, minimális törzskészlet meghatározása. Mint említettük, a folyamatosságot úgy kívánjuk biztosítani, hogy ha a raktárkészlet egy előírt minimális törzskészletre apad le, készletpótló alkatrészeket rendelünk. A minimális törzskészletet úgy kell megállapítani, hogy igen kicsiny legyen a valószínűsége annak, hogy a pótlási idő alatt több alkatrész menjen tönkre, mint amennyit a meglévő készletből fedezni tudnánk, azaz pótalkatrész hiánya következtében létrejött termeléskiesés kockázata kicsiny legyen.

A pótlási idő alatt a rendelés pillanatától a megrendelt alkatrészek beérkezéséig eltelt időt értjük. Ezt az időtartamot is üzemidőben mérjük. Általában a pótlási idő is valószínűségi változó. Jelöljük ennek átlagát T-vel és szórásnégyzetét σ_T^2-vel.

Minket most az érdekel közelebbről, hogy a pótlási idő alatt hány alkatrész törésére lehet számítani bizonyos kockázat mellett. Ha kiszámítjuk a pótlási idő alatti törések várható számát és szórásnégyzetét, úgy ez már nagy segítséget jelent. Ugyanis ekkor *Csebisev* ismert egyenlőtlensége szerint már becslést tudunk adni a kockázatra. Mint látni fogjuk azonban a legtöbb esetben a pótlási idő alatti cserék száma közel normális eloszlást követ és így ilyen esetekben a kockázat pontosabban meghatározható. Ilyen módon a várható érték és a szórásnégyzet meghatározására szorítkozhatunk.

Tegyük fel, hogy a pótlási idő hossza üzemidőben mérve t, jelentse $m(t)$ a pótlási idő alatti cserék várható számát, $\sigma^2(t)$ pedig a csereszám szórásnégyzetét. $m(t)$ és $\sigma^2(t)$ ismeretében könnyen meghatározható a pótlási idő alatti cserék számának (feltétel nélküli) várható értéke és szórásnégyzete. Jelöljék ezeket M és D^2. A feltételes várhatóértékre és feltételes szórásnégyzetre vonatkozó ismert tétel szerint fennáll, hogy

$$M = \int_0^\infty m(t)\, dP(t) \tag{1}$$

és

$$D^2 = \int_0^\infty \sigma^2(t)\, dP(t) + \int_0^\infty [m(t) - M]^2\, dP(t). \tag{2}$$

Itt $P(t)$ a pótlási idő eloszlásfüggvényét jelenti.

Az első egyenlet a feltételes várható érték definíciójából következik, a második pedig abból, hogy a D^2 szórásnégyzet egyenlő a feltételes szórásnégyzet várható értékének és a feltételes várható érték szórásnégyzetének összegével [4].

Így lényegében $m(t)$ és $\sigma^2(t)$ meghatározása marad hátra. Ezzel kapcsolatban még néhány szót kell szólnunk. $m(t)$ és $\sigma^2(t)$ jelentik a t idő alatti cserék számának várható értékét és szórásnégyzetét. Ezek a kifejezések azonban függnek attól, hogy honnan számítjuk ezt a t időtartamot. Fel fogjuk tenni, hogy az alkatrészeket $t = 0$ időpontban állítottuk be. Ekkor valamennyi alkatrész működési ideje még 0. A valóságban persze az a helyzet, hogy a már régóta működésben lévő üzemben vagyunk kíváncsiak a pótlási idő alatti cserék számára. Ha a pótlási idő sokszorosa egy alkatrész élettartamának, akkor a kétféle számítás nem tér el lényegesen egymástól. Viszont, ha a pótlási idő igen rövid, úgyhogy ezalatt nem kell cserére számítani, akkor a törzskészlet meghatározásának a problémája nem jelentős.

A következőkben először egyetlen alkatrészt vizsgálunk és arra állapítjuk meg, hogy a pótlási idő alatt hányszor kell újjal helyettesíteni a tönkrement alkatrészt. Ha ezt egyetlen alkatrészre ismerjük, az eredmény akárhány alkatrészre egyszerűen kiterjeszthető.

Tekintsünk tehát egyetlen alkatrészt, amelyet a $t = 0$ időpontban állítottunk üzembe. Tegyük fel, hogy ha az alkatrész tönkremegy, abban a pillanatban újjal helyettesítjük. Kérdés, mi a valószínűsége annak, hogy t idő alatt legfeljebb n csere váljék szükségessé. Jelöljük ezt a valószínűséget $W(t, n)$-nel $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

Ennek a valószínűségnek a meghatározására ismernünk kell, hogy az illető gépnél a működési szakaszok és szünetek váltakozása milyen törvényszerűséget követ, továbbá az alkatrész valódi élettartamának eloszlását. Az időt mindig üzemidővel mérjük.

Feltesszük, hogy egy gépnél az egymást követő működési szakaszok és szünetek időtartamai egyforma eloszlást mutató független valószínűségi változók, mégpedig a működési szakaszok eloszlásfüggvénye $L(x)$ és a szüneteké $H(x)$. Tegyük fel továbbá, hogy az egymás után üzembehelyezett alkatrészek valódi élettartamai szintén egyforma eloszlású független valószínűségi változók, amelyek közös eloszlásfüggvényét jelölje $G(x)$.

Szükségünk lesz ezeknek az eloszlásoknak várható értékeire, szórásnégyzeteire és Laplace—Stieltjes transzformáltjaira. Ezekre a következő jelöléseket vezetjük be:

	Eloszlás-függvény	Várható-érték	Szórás	Laplace—Stieltjes-transzformált
Működési szakaszok	$L(x)$	l	σ_L	$\lambda(s)$
Szünetek	$H(x)$	h	σ_H	$\chi(s)$
Valódi élettartam ..	$G(x)$	g	σ_G	$\gamma(s)$

Előrebocsátjuk, hogy egy eloszlásfüggvénynek önmagával való n-szeres kompozícióját n indexszel jelöljük. Tehát pl. $G_n(x)$ jelenti $G(x)$-nek önmagával való n-szeres kompozícióját. Igy $G_0(x) = 0$, ha $x < 0$ és $G_0(x) = 1$, ha $x \geq 0$, és $G_1(x) = G(x)$, és $G_n(x)$ $(n = 2, 3, \dots)$ a következő rekurzív formula segítségével határozható meg:

$$G_n(x) = \int_0^x G_{n-1}(x-y)\, dG(y). \tag{3}$$

Ezekután rátérünk $W(t, n)$ meghatározására. Könnyen belátható, hogy

$$W(t, n) = 1 - \int_0^t \Omega(t, z)\, dG_{n+1}(z), \tag{4}$$

ahol $\Omega(t, z)$ annak a feltételes valószínűségét jelenti, hogy ha egy adott időpontban törés történt, és azt megelőzően az összes működési idő pontosan z volt, akkor ilyen feltételek mellett az üzemidő legfeljebb t legyen.

A felírt formula annak a valószínűségét jelenti, hogy az $n+1$-edik törés pillanata a $(0, t)$ intervallumon kívül esik és ez éppen annak a valószínűsége, hogy $(0, t)$ intervallumban legfeljebb n törés történik.

Másrészt

$$\Omega(t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} [L_{k-1}(z) - L_k(z)]\, H_{k-1}(t-z). \tag{5}$$

Ugyanis ha egy adott pillanatban törés történt és addig az összes működési idő z, akkor annak a valószínűsége, hogy addig pontosan k $(k \geq 1)$ működési szakasz fordult elő : $L_{k-1}(z) - L_k(z)$. Ha k működési szakasz fordult elő, akkor az is nyilvánvaló, hogy eközben $k-1$ szünet fordult elő, ugyanis a $t = 0$ időpontban működési szakasszal kezdődött a folyamat. Viszont a törés pillanatáig eltelt üzemidő akkor lesz $\leq t$, ha a szünetek összhossza $\leq t - z$, aminek a valószínűsége $H_{k-1}(t-z)$. Ebből (5) a teljes valószínűség tétele alapján adódik.

$W(t, n)$ ismeretében most már könnyen meghatározhatjuk a t idő alatti csereszám átlagát és szórásnégyzetét. Ezekre fennáll, hogy

$$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - W(t, n)] \tag{6}$$

és

$$\sigma^2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)[1 - W(t, n)] - [m(t)]^2. \tag{7}$$

2. §. *Speciális esetek*

Az általános esetben a számítás ezen képletek alapján meglehetősen bonyolult. Jelentős egyszerűsítés érhető el abban az esetben, ha a működési szakaszok exponenciális eloszlásúak, azaz ha $L(x) = 1 - e^{-\frac{x}{l}}$. Ekkor ugyanis fennáll, hogy az egyes alkatrészek üzemidőben mért élettartamai egyforma eloszlású független valószínűségi változók, mégpedig jelölje ezt a közös eloszlásfüggvényt $F(x)$, ennek átlagát f, szórásnégyzetét σ_F^2 és Laplace—Stieltjes-transzformáltját $\varphi(s)$. Megjegyezzük, hogy ez csakis exponenciális eloszlású működési idő esetén van így. Ekkor ugyanis egy alkatrész kicserélésének pillanatában ugyanaz a helyzet, mint a beállításának pillanatában, azaz a cserék időpontjai a folyamat Markov-pontjait alkotják. Ugyanis annak a valószínűsége, hogy a beállítás után az első szünet legfeljebb x idő múlva következik be azon feltétel mellett, hogy az előző szünet óta u idő telt el, exponenciális eloszlás esetén :

$$\frac{L(u+x) - L(u)}{1 - L(u)} = L(x),$$

tehát u-tól független és egyenlő $L(x)$-szel. Tehát pontosan ugyanaz a helyzet, mint $t = 0$ időpontban az első alkatrész beállításának időpontjában.

Viszont ha $1 - L(u)$ helyébe $\Lambda(u)$-t írunk, úgy

$$\Lambda(u+x) = \Lambda(u)\Lambda(x)$$

és ennek a Cauchy-féle függvényegyenletnek pedig monoton megoldása csak az exponenciális függvény.

Ez utóbbi esetben könnyen adódik, hogy

$$W(t, n) = 1 - F_{n+1}(t). \tag{8}$$

$W(t, n)$-et most Laplace-transzformáció segítségével határozzuk meg. Legyen $F(t)$ Laplace—Stieltjes-transzformáltja

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dF(t), \tag{9}$$

akkor

$$\int_0^\infty e^{-st}\, W(t, n)\, dt = \frac{1 - [\varphi(s)]^{n+1}}{s} \tag{10}$$

ugyanis $F_{n+1}(t)$ Laplace—Stieltjes-transzformáltja $[\varphi(s)]^{n+1}$.

Hátra van tehát $F(t)$ meghatározása. Mivel

$$L_{k-1}(z) - L_k(z) = e^{-\frac{z}{l}} \frac{\left(\frac{z}{l}\right)^{k-1}}{(k-1)!} \tag{11}$$

és így

$$\Omega(t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{z}{l}} \frac{\left(\frac{z}{l}\right)^{k-1}}{(k-1)!} H_{k-1}(t-z), \tag{12}$$

tehát $F(t)$ a következőképen állítható elő:

$$F(t) = \int_0^t \Omega(t, z)\, dG(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t e^{-\frac{z}{l}} \frac{\left(\frac{z}{l}\right)^k}{k!} H_k(t-z)\, dG(z). \tag{13}$$

Térjünk át a Laplace—Stieltjes-transzformáltakra, azt nyerjük, hogy

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dF(t) = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{z}{l}} \frac{\left(\frac{z}{l}\right)^k}{k!} e^{sz} [\chi(s)]^k\, dG(z) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\frac{z}{l} + \frac{z}{l}\chi(s) + s(z)}\, dG(z) = \gamma\left(s - \frac{1}{l} + \frac{\chi(s)}{l}\right).$$

Tehát így megkaptuk $F(t)$ Laplace—Stieltjes-transzformáltját :

$$\varphi(s) = \gamma\left(s - \frac{1-\chi(s)}{l}\right). \tag{14}$$

Ebből $F(x)$ átlagát :

$$f = \int_0^\infty x dF(x) = -\varphi'(0) = g + \frac{hg}{l} \tag{15}$$

és szórásnégyzetét :

$$\sigma_F^2 = \int_0^\infty (x-f)^2 dF(x) = \varphi''(0) - [\varphi'(0)]^2 = \tag{16}$$

$$= \frac{\sigma_G^2}{g^2}\left(g + \frac{hg}{l}\right)^2 + \left(1 + \frac{\sigma_H^2}{h^2}\right)\frac{h^2 g}{l}$$

szolgáltatja.

A csereszám várható értéke

$$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - W(t,n)] = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}(t). \tag{17}$$

Ennek Laplace-transzformáltja :

$$\int_0^\infty e^{-st} m(t)\, dt = \frac{1}{s}\,\frac{\varphi(s)}{1-\varphi(s)}.$$

Innen $m(t)$-re a következő aszimptotikus előállítást nyerjük :

$$m(t) \sim \frac{t}{f} \tag{18}$$

és a szórásnégyzetre a

$$\sigma^2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) F_{n+1}(t) - [m(t)]^2 \tag{19}$$

előállításból a

$$\sigma^2(t) \sim \frac{\sigma_F^2}{f^3}\, t \tag{20}$$

aszimptotikus képletet kapjuk.

Ha most speciálisan $G(t)$-ről is feltesszük, hogy exponenciális, akkor

$$\gamma(s) = \frac{1}{1+gs} \tag{21}$$

és így

$$(22) \qquad \varphi(s) = \frac{1}{1 + gs + \frac{g}{l}\left[1 - \chi(s)\right]}.$$

Ha még $H(t)$ is exponenciális eloszlás, $H(t) = 1 - e^{-\frac{t}{h}}$

akkor
$$\chi(s) = \frac{1}{1 + sh}$$

és így

$$(23) \qquad \varphi(s) = \frac{s + \frac{1}{h}}{gs^2 + \left(1 + \frac{g}{h} + \frac{g}{l}\right)s + \frac{1}{h}}.$$

Innen visszatranszformálással kapjuk, hogy

$$(24) \qquad F(t) = 1 + \frac{\left(\frac{1}{h} + \omega_1\right)}{g(\omega_1 - \omega_2)}\frac{e^{\omega_1 t}}{\omega_1} - \frac{\left(\frac{1}{h} + \omega_2\right)}{g(\omega_1 - \omega_2)}\frac{e^{\omega_2 t}}{\omega_2},$$

ahol

$$\left.\begin{matrix}\omega_1\\ \omega_2\end{matrix}\right\} = \frac{-\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{g} + \frac{1}{l}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{g} + \frac{1}{l}\right)^2 - \frac{4}{gh}}}{2}.$$

Ebben az esetben $m(t)$ és $\sigma^2(t)$ explicit alakban kiszámítható és azt nyerjük, hogy

$$(25 \qquad m(t) = \frac{l}{g(h+l)}t + \frac{l}{g}\left(\frac{h}{h+l}\right)^2\left|1 - e^{-\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{l}\right)t}\right|$$

és

$$\sigma^2(t) = \left[\frac{l}{g(h+l)} + 2\frac{h^2l^2}{g^2(h+l)^3}\right]t +$$

$$+\left[\frac{l}{g}\left(\frac{h}{h+l}\right)^2 + \frac{l^2}{g^2}\left(\frac{h}{h+l}\right)^4 - 4\frac{h^3l^3}{g^2(h+l)^4}\right] +$$

$$+\left[2\frac{h^2l^2}{g^2(h+l)^3} - 2\frac{lh^3}{g^2(h+l)^3}\right]t\, e^{-\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{l}\right)t} +$$

$$+\left[4\frac{h^3l^3}{g^2(h+l)^4}-2\frac{l^2}{g^2}\left(\frac{h}{h+l}\right)^4-\frac{l}{g}\left(\frac{h}{h+l}\right)^2+2\frac{l}{g}\left(\frac{h}{h+l}\right)^2\right]e^{-\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{l}\right)t}+$$

$$+\frac{l^2}{g^2}\left(\frac{h}{h+l}\right)^4 e^{-2\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{l}\right)t}.$$

Abban az esetben, ha $L(x)$, $G(x)$ és $H(x)$ mind exponenciális eloszlásfüggvények, a folyamat Markov-típusú és ezért célhoz vezet a következő egyszerű számítás $F(x)$ meghatározására.

Legyen $L(x) = 1 - e^{-\frac{x}{l}}$; $H(x) = 1 - e^{-\frac{x}{h}}$ és $G(x) = 1 - e^{-\frac{x}{g}}$; ebben az esetben, ha az alkatrész t időpontban működik, annak a feltételes valószínűsége, hogy $(t, t + \Delta t)$ időközben szünet kezdődjék a következő:

$$\frac{L(t+\Delta t) - L(t)}{1 - L(t)} = L(\Delta t) = 1 - e^{-\frac{\Delta t}{l}} = \frac{\Delta t}{l} + o(\Delta t).$$

Hasonlóan adódik, hogy annak a valószínűsége, hogy az alkatrész $(t, t + \Delta t)$ időközben tönkremegy: $\frac{\Delta t}{g} + o(\Delta t)$ és annak valószínűsége, hogy $(t, t + \Delta t)$ időközben a működési szünet befejeződik: $\frac{\Delta t}{h} + o(\Delta t)$.

Most, mivel mindenegyes alkatrész működési időtartama független valószínűségi változó ugyanazon $F(t)$ eloszlásfüggvénnyel, elég az első alkatrész eloszlásfüggvényét meghatározni. Legyen a rendszer A állapotban, ha az alkatrész működik, B állapotban, ha nem működik és C állapotban, ha az első alkatrész tönkrement. Legyenek a megfelelő valószínűségek: $P_A(t)$, $P_B(t)$, $P_C(t)$. Ekkor nyilvánvalóan:

$$F(t) = P_C(t). \tag{27}$$

Meghatározandó tehát $P_C(t)$. Nyilvánvalóan $P_A(t) + P_B(t) + P_C(t) = 1$ és a kezdeti feltételek $P_A(0) = 1$, $P_B(0) = P_C(0) = 0$. Annak a valószínűsége, hogy az alkatrész a $t + \Delta t$ időpontban működik, vagy úgy jön létre, hogy az alkatrész a t időpontban működött és a Δt idő alatt nem tört el és szünet sem kezdődött, vagy pedig úgy, hogy t időpontban nem működött, de közben a szünet befejeződött: ennélfogva

$$P_A(t+\Delta t) = P_A(t)\left(1 - \frac{\Delta t}{g}\right)\left(1 - \frac{\Delta t}{l}\right) + P_B(t)\frac{\Delta t}{h} + o(\Delta t) \tag{28}$$

és hasonlóképen

$$P_B(t+\Delta t) = P_A(t)\left(1 - \frac{\Delta t}{g}\right)\frac{\Delta t}{l} + P_B(t)\left(1 - \frac{\Delta t}{h}\right) + o(\Delta t),$$

$$P_C(t+\Delta t) = P_A(t)\frac{\Delta t}{g} + o(\Delta t).$$

Δt-vel való osztással és $\Delta t \to 0$ határátmenettel a

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_A(t)}{dt} &= -\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{l}\right) P_A(t) + \frac{1}{h} P_B(t) \\
\frac{dP_B(t)}{dt} &= \frac{1}{l} P_A(t) - \frac{1}{h} P_B(t) \qquad (29) \\
\frac{dP_C(t)}{dt} &= \frac{1}{g} P_A(t)
\end{aligned}
$$

differenciálegyenletrendszert kapjuk. A kezdeti feltételek a következők: $P_A(0) = 1$, $P_B(0) = 0$ és $P_C(0) = 0$. Ha a rendszert vektorok segítségével írjuk fel:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t) \qquad [\mathbf{x}(t) = (P_A(t), P_B(t), P_C(t))]$$

az $\mathbf{A}$ pedig a rendszer együtthatóiból képezett matrix:

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right) & \frac{1}{h} & 0 \\ \frac{1}{l} & \frac{1}{h} & 0 \\ \frac{1}{g} & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

akkor a kezdeti értékeket is magában foglaló megoldás felírható a Lagrange-féle interpolációs polinom és a sajátértékek segítségével [5]:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t;\mathbf{x}_0) = e^{\mathbf{A}t}\,\mathbf{x}_0 &= \frac{e^{\omega_1 t}}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)} (\mathbf{A} - \omega_2 \mathbf{E})(\mathbf{A} - \omega_3 \mathbf{E})\,\mathbf{x}_0 + \\
&+ \frac{e^{\omega_2 t}}{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 - \omega_3)} (\mathbf{A} - \omega_1 \mathbf{E})(\mathbf{A} - \omega_3 \mathbf{E})\,\mathbf{x}_0 + \qquad (30) \\
&+ \frac{e^{\omega_3 t}}{(\omega_3 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)} (\mathbf{A} - \omega_1 \mathbf{E})(\mathbf{A} - \omega_2 \mathbf{E})\,\mathbf{x}_0,
\end{aligned}
$$

ahol $\mathbf{E}$ az egységmatrix és $\mathbf{x}_0 = (1,0,0)$. ebből

$$
\begin{aligned}
P_C(t) = &-\frac{e^{\omega_1 t}}{g(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)} \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{l} + \omega_3 + \omega_2\right) - \\
&- \frac{e^{\omega_2 t}}{g(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 - \omega_3)} \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{l} + \omega_3 + \omega_1\right) - \qquad (31) \\
&- \frac{e^{\omega_3 t}}{g(\omega_3 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)} \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{l} + \omega_2 + \omega_1\right).
\end{aligned}
$$

Figyelembevéve a karakterisztikus egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggéseket, és hogy $\omega_3 = 0$, $F(t)$-t felírhatjuk:

$$F(t) = P_C(t) = 1 + \frac{\left(\frac{1}{h} + \omega_1\right)}{g({}_1\omega - \omega_2)} \frac{e^{\omega_1 t}}{\omega_1} - \frac{\left(\frac{1}{h} + \omega_2\right)}{g(\omega_1 - \omega_2)} \frac{e^{\omega_2 t}}{\omega_2} \qquad (32)$$

alakban is. Természetesen így is ugyanarra az eredményre jutottunk.

Ha $L(x)$, $H(x)$, $G(x)$ tetszőlegesek, ebben az esetben a várható értéket és a szórást a (6), illetve (7) formulák segítségével határozhatjuk meg.

Anélkül, hogy a számítás részletezésébe bocsátkoznánk, csupán azt említjük meg, hogy a várható értékre és a szórásra a következő aszimptotikus kifejezéseket kapjuk:

$$m(t) \sim \frac{l}{g(h+l)}\, t \tag{33}$$

és

$$\sigma^2(t) \sim \left[\frac{l\sigma_G^2}{g^3(h+l)} + \frac{l^2\sigma_H^2}{g^2(h+l)^3} + \frac{h^2\sigma_F^2}{g^2(h+l)^3}\right] t. \tag{34}$$

Ezután felmerül az a kérdés, amelynek megválaszolása dolgozatunk főcélja: előírt kockázat mellett a pótlási idő alatt hány alkatrészcserére kell számítani. A pótlási idő alatti csereszámot ξ-vel jelölve, legyen

$$\mathbf{M}(\xi) = M \quad \text{és} \quad \mathbf{D}(\xi) = D. \tag{35}$$

(35)-ben (1) és (2) alapján M és D aszimptotikus kifejezései

$$M \sim \frac{T}{f} \quad \text{és} \quad D^2 \sim \frac{\sigma^2}{f^2}\, T + \frac{\sigma_T^2}{f^2} \tag{36}$$

lesznek.

Ha a pótlási idő állandó T, úgy

$$M \sim \frac{T}{f} \quad \text{és} \quad D^2 \sim \frac{\sigma^2}{f^2}\, T. \tag{37}$$

Ha a pótlási idő állandó és igen hosszú az alkatrészek átlagos élettartamához képest, akkor már egy gépnél is közel normális eloszlású a pótlási idő alatti csereszám. Mivel ez általános esetben nem érvényes, mert a pótlási idő nem mindig igen nagy az alkatrészek élettartamához képest, ennek bizonyítására nem térünk ki. Ha egy üzemben ugyanolyan típusú alkatrészből többet használnak egyidejűleg (a gyakorlatban ez az eset az érdekes), úgy mindegyikre külön meg kell állapítani a pótlási idő alatti ξ_k csereszám M_k várható értékét és D_k^2 szórásnégyzetét.

Ha a pótlási idő állandó, akkor a ξ_k ($k = 1, 2, \ldots N$) valószínűségi változók függetlenek egymástól, és ezért (ha teljesülnek ezen változókra a valószínűségszámítás centrális határeloszlástételének feltételei, amit feltehetünk) összegük közelítőleg normális eloszlású és így a törzskészletet

$$(M_1 + M_2 + \cdots + M_N) + \nu\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_N^2} \tag{38}$$

szolgáltatja, ahol ν értéket a megengedhető kockázatnak megfelelően kell megválasztani; pl. $\nu = 3$ $0{,}14\%$ kockázatnak felel meg. Ha az alkatrészek egyforma gépekben és egyforma körülmények között kerülnek felhasználásra, akkor az M_k és D_k értékek nem függnek k-tól, és így a törzskészletet

$$NM + \nu D \sqrt{N}\,. \tag{39}$$

adja meg.

Más azonban a helyzet, ha a pótlási idő nem állandó ; ez esetben ugyanis a ξ_k változók nem függetlenek egymástól.* Ebben az esetben, ha $m_k(t)$, ill. $\sigma_k(t)$ jelenti a k-adik alkatrész t idő alatti cseréinek átlagos számát és szórását, és $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = \zeta$ akkor

$$\mathbf{M}(\zeta) = \sum_{k=1}^{N} M_k$$

és

$$\mathbf{D}(\zeta) = \sum_{k=1}^{N} \int_0^\infty \sigma_k^2(t)\, d\,P(t) + \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^{N} m\,(t) - \sum_{k=1}^{N} M_k \right)^2 dP(t)$$

és így általában $D^2(\zeta)$ nem egyenlő $\sum\limits_{k=1}^{N} D_k^2$-tel. Abban a speciális esetben, amikor $m_k(t) = m(t)$ és $\sigma_k(t) = \sigma(t)$ nem függnek k-tól, $(k = 1,\ 2 \ldots N)$, $M(\xi) = NM$ és

$$\mathbf{D}^2(\zeta) = N \int_9^\infty \sigma^2(t)\, dP(t) + N^2 \int_0^\infty (m(t) - M)^2\, dP(t).$$

Nyilvánvaló, hogy ez esetben

$$\mathbf{D}^2(\zeta) - ND^2 = N\,(N-1) \int_0^\infty (m(t) - M)^2\, dP(t).$$

Ha $m(t)$ helyett annak közelítő értékét, $\dfrac{t}{f}$-et vesszük, úgy $\mathbf{D}^2(\zeta) - ND^2 = \dfrac{N\,(N-1)}{f^2} \sigma_T^2$ és így, mivel $D^2 = \dfrac{\sigma^2}{f^2} T + \dfrac{\sigma_T^2}{f^2}$ tehát $D^2\,(\xi) =$

*Ezt az [1] dolgozat nem vette figyelembe, ezért annak képletei közül (15) és (17) módosításra szorulnak, amint arra figyelmünket Otto Han (Prága) volt szíves felhívni Felhasználjuk az alkalmat a helyesbítésre« a (15) és (17) képletek helyes alakja a következő :

$$k = \frac{p}{T_*^2} + v \sqrt{\frac{p}{T_*} + \frac{s^2}{T_*^2}}$$

T_{**} bevezetésére ennek megfelelően nincs szükség. A (16) képlet és a 138. oldalon közölt számpélda ennek megfelelően módosulnak. Tanulságosabb a példa, ha abban, $p = 20$ helyett $p = 60$, a többi adat változatlanul tartása mellett. Ez esetben 260 alkatrészt kell tartalékolni, míg a gyakorlatban eddig használt képlet szerint 400 alkatrészt kellene tartalékolni.

$= \frac{N\sigma^2 T}{f^2} + \frac{N^2\ \sigma_T^2}{f^2}$ és így a törzskészlet meghatározására a következő képlet szolgál :

$$NM + \nu \sqrt{\frac{N\sigma^2\ T}{f^2} + \frac{N^2\sigma_T^2}{f^2}},$$

ahol T a pótlás átlagos időtartama, σ_T^2 a szórása, és $M \sim \frac{T}{f}$ ahol

$$= \frac{g\,(h+l)}{l}$$

és

$$\frac{\sigma^2}{f^3} = \frac{l\sigma_G^2}{g^3\,(h+l)} + \frac{l^2\sigma_H^2}{g^2\,(h+l)^3} + \frac{h^2\sigma_L^3}{g^2\,(h+l)^3}\,.$$

Itt l, g, h jelentik rendre az illető alkatrésznél a működési szakaszok, szünetek és valódi élettartamok átlagait és σ_G^2, σ_H^2, σ_L^2 a megfelelő szórásnégyzeteket.

Nem állandó pótlási idő esetében azonban az összcsereszám, k még nagy N esetében sem lesz közelítőleg normális eloszlású, és így adott ν értéke mellett a kockázat más és más lehet. Mindenesetre a Csebisev egyenlőtlenség értelmében adott ν mellett a kockázat $1/\nu^2$-nél kisebb.

IRODALOM

[1] *Rényi A.* és *Szentmártony T.:* Gépalkatrészek és felszerelési tárgyak törzskészletének valószínűségszámítási meghatározása. (Mat. Lapok III. 1952. 129—139. o.)

[2] *K. I. Arrow Th. Harris* és *J. Marschak:* Optimal inventory policy. (Econometrica. 19. (1951) 250—272. o.)

[3] *A. Dworetzky, I. Kiefer* és *J. Wolfowitz:* The inventory problem. I. Case of known distributions of demand. (Econometrica 20 (1952/186—222) és II. Case of unknown distributions of demand (ibid 20/1952/450—466).

[4] *Rényi A.:* Valószínűségszámítás. Egyetemi tankönyv. (Sajtó alatt).

[5] *Egerváry J.:* Matrix-függvények kanonikus előállításáról és ennek néhány alkalmazásáról. (Magyar Tud. Akadémia III. Osztályának Közleménye 1953/ III. kötet 4. szám 471. o.)

О ПОПОЛНЕНИИ ЗАПАСА ДЕТАЛЕЙ НА СКЛАДЕ I.

И. Палашти, А. Реньи, Т. Сентмартони и Л. Такач

Резюме

Работа имеет своей целью определить количество запаса некоторых деталей на складе, необходимое для обеспечения непрерывности работы завода, т. е. дать определение того минимального количества запаса при достижении которого необходим заказ новых деталей. Принимается во внимание и то обстоятельство, что некоторые станки не работают непрерывно, а бывают случайные бездействия. При произвольном распределении периода действия $L\,(x)$, произвольном распределении периода бездействия — $H\,(x)$ и произвольном распределении срока годности деталей — $G\,(x)$, определяется распределение числа обменов деталей: и необходимое количество запаса.

ERGÄNZUNG DES LAGERVORRATES I

I. PALÁSTI, A. RÉNYI, T. SZENTMÁRTONY UND L. TAKÁCS

Zusammenfassung

Die Abhandlung bezweckt die Bestimmung der minimalen Lagerhöhe irgendeines Bestandteiles, bei welcher Betriebsunterbrechungen ferngehalten werden können, also die Bestimmung des Mindestlagerbestandes, bei dem, wenn er erreicht wird, nachbestellt werden muss. Hierbei wird berücksichtigt, dass die Maschinen nicht beständig arbeiten, sondern in ihrem Betriebe zufällige Stillstände auftreten.

Im Aufsatz wird bei beliebiger Arbeitsperiodenverteilung $L(x)$, beliebiger Stillstandsverteilung $G(x)$ und beliebiger Lebensdauerverteilung die Verteilung der Anzahl von Ersatzteilauswechslungen bestimmt. Daraus kann man die nötige minimale Lagerhöhe bestimmen.