láról, akik nem ismerik kellőképpen az élőanyagnak az élettelenből történő fejlődésének elméletét, azoknak az oldaláról, akik örömest vennék, hogy ha a két ideológiailag rendkívül jelentős elmélet valójában ellentétben állana egymással. Megnyugtathatom mindazokat, akiknek a számára ez kérdéses volt hogy a két elmélet között lényeget érintő ellentét nincs.

RÉNYI ALFRÉD lev. tag:

Néhány megjegyzést kívánok tenni a Smidt-féle elmélet matematikai megalapozását illetőleg, különösen a bolygótávolságok Smidt-féle törvényével kapcsolatban.

A bevezető előadás rámutatott, hogy *O. J. Smidt* akadémikus nagyszabású kozmogóniai elmélete két alapvető tézisen nyugszik. Az első szerint a nap egy galaktikai ködön áthaladva magával ragadta annak egy részét, így alakult ki egy körülötte keringő raj — ezt nevezzük a rövidség kedvéért *kaptáció-elméletnek,* — a második tézis szerint e raj részecskéinek összetömörülése folytán jöttek létre a bolygók — ezt nevezzük a rövidség kedvéért a *kondenzáció-elméletnek.*

Mind a kaptáció-elmélet, mind a kondenzáció-elmélet megalapozásához *O. J. Smidt* mélyenjáró matematikai módszereket használ fel. Elméletének fölénye más elméletekkel szemben nem utolsó sorban abban is megmutatkozik, hogy azoknál sokkal nagyobb mértékben támaszkodik szabatos matematikai módszerekre és így nemcsak kvalitatív, hanem kvantitatív következtetésekhez is el tud jutni, amelyek a tényleges adatokkal egyes pontokon igen jó megegyezést mutatnak: így például a bolygótávolságok kérdésében, amelyre a továbbiakban részletesen ki fogok térni. A kaptáció-elmélet klasszikus mechanikai meggondolásokat alkalmaz és a felhasznált matematikai módszereket lényegében a differenciálegyenletek kvalitatív elmélete szolgáltatja. Ezzel szemben a kondenzáció-elmélet statisztikus mechanikai meggondolásokkal operál és a felhasznált matematikai módszerek a valószínűségszámítás körébe tartoznak. *O. J. Smidt* elmélete a valószínűségszámítás csillagászati alkalmazásai terén is új fejezetet nyitott meg. Meg vagyok győződve, hogy elmélete mélyebb matematikai módszerek alkalmazásán nyugvó pontjainak részletesebb kidolgozása nemcsak a kozmogóniát fogja előbbrevinni, de a matematikát is újabb problémák elé fogja állítani és ezzel annak fejlődését is elő fogja segíteni.

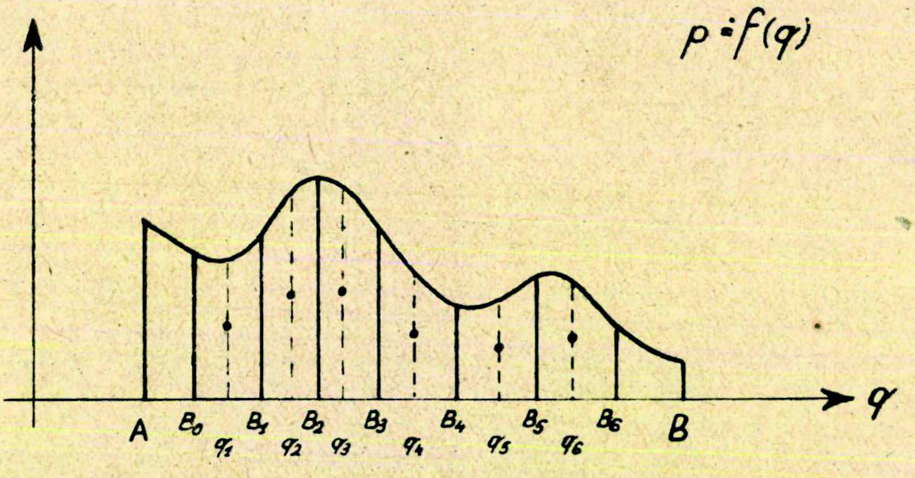
Röviden szeretnék egy matematikai problémára rámutatni, amely a bolygótávolságok törvényének Smidt-féle levezetésével kapcsolatban azonnal szemünkbe tűnik, ha azt közelebbről elemezzük.* Ezt a problémát Smidt könyvének olvasásakor fogalmaztam meg, teljes megoldását eddig nem ismerem. *Smidt* felteszi, hogy a raj a q fajlagos impulzusnyomaték szerint $f(q)$ sűrűségfüggvényű eloszlással bír, és azt írja, hogy „minden egyes eloszlási törvénynek, azaz minden $f(q)$ függvénynek megfelel a bolygótávolságoknak egy törvénye.“ Ez valóban így is van, amint azt alábbiakban be is fogjuk bizonyítani, azonban ezt a megállapítást ki kell egészíteni azzal a megjegyzéssel, hogy vannak olyan $f(q)$ sűrűségfüggvények, amelyeknek a bolygótávolságoknak nem egy, hanem több különböző törvénye felel meg. *Smidt* felteszi, hogy $f(q) = Cq^{\lambda}$, majd később csak a $\lambda = 0$ esetet vizsgálja, tehát azt, amikor $f(q)$ egy (A, B) intervallumban egy pozitív állan-

* A következők *O. J. Smidt* „Négy előadás a föld keletkezésének elméletéről“ c. könyvének (Akadémiai Kiadó 1952) 44—50. oldalain elmondottakhoz kapcsolódnak.

dóval, és azon kívül 0-val egyenlő. Ebben az esetben az (A, B) intervallum és a bolygók száma, N, a bolygótávolságokat egyértelműen meghatározza. A bolygók pályájának (közel) köralakú volta miatt, ha R_n az n-ik bolygó pályasugara és q_n a fajlagos impulzusnyomatéka, fennáll a $q_n = \gamma\sqrt{R_n}$ összefüggés, ahol γ n-től független állandó ($\gamma = K\sqrt{M}$ ahol M a nap tömege és K a gravitáció állandója), tehát az R_n pályasugarakat megkapjuk, ha a q_n fajlagos impulzusnyomatékokat meghatározzuk. Ezekre vonatkozólag *Smidt* szerint fennállnak a

$$q_n = \frac{\int_{\beta_{n-1}}^{\beta_n} q f(q)\,dq}{\int_{\beta_{n-1}}^{\beta_n} f(q)\,dq} \qquad (n = 1, 2, \ldots N) \qquad (1)$$

összefüggések, ahol $\beta_0 = \frac{A+q_1}{2}$, $\beta_n = \frac{q_n+q_{n+1}}{2}$ ha $n = 1, 2, \ldots N-1$ és $\beta_N = \frac{q_N+B}{2}$. Az (1) egyenletrendszerből kell a q_n állandókat adott $f(q), A, B$ és N mellett meghatározni.



1. ábra

Geometriailag az (1) összefüggés azt jelenti, hogy ha felrajzoljuk a $p = f(q)$ függvény görbéjét, úgy q_n nem más, mint az ezen görbe, a q-tengely, a $q = \beta_{n-1}$ és $q = \beta_n$ egyenesek által bezárt tartomány súlypontja vetületének koordinátája a q-tengelyen. Az (1) egyenletrendszer felállításánál az egyszerűség kedvéért fel van téve, hogy a rajban a fajlagos impulzusnyomaték korlátos, tehát $f(q) = 0$ ha $q < A$ vagy $B < q$. Ilyen módon a $q_1, q_2, \ldots q_N$ számok a következő feltételeknek kell, hogy eleget tegyenek: *Ha az (A, B) intervallumot a $q_1, q_2, \ldots q_N$ osztópontokkal $N+1$ szakaszra bontjuk, a q_n abszcisszájú pontokban ($n = 1, 2, \ldots N$) a q-tengelyre merőleges e_n egyeneseket emelünk és a $\beta_0 = \frac{A+q_1}{2}$, $\beta_n = \frac{q_n+q_{n+1}}{2}$ ($n = 1, 2, \ldots N-1$) és $\beta_N = \frac{q_N+B}{2}$ pontokban meghúzzuk a q-tengelyre merőleges E_n egyeneseket*

$(n=0,1,2,\ldots,N)$ *úgy a* $p=f(q)$ *görbe, a* q*-tengely, valamint az* E_{n-1} *és* E_n *egyenesek által határolt tartomány súlypontja rá kell, hogy essék az* e_n *egyenesre* (lásd az 1. ábrát, amelyen az E_n egyenesek kihúzott vonallal, az e_n egyenesek szaggatott vonallal vannak jelölve, az egyes sávok súlypontjai be vannak karikázva és $N=6$).

Azt állítjuk, hogy legalább egy ilyen tulajdonságú $q_1, q_2, \ldots, q_N$ értékrendszer mindig található. Ez a következőképpen látható be: legyen először $N=1$ és q egy tetszőleges érték az (A, B) intervallumban, $Q=Q(q)$ pedig a $\beta_0=\frac{A+q}{2}$ és $\beta_1=\frac{q+B}{2}$ abszcisszájú pontokban húzott E_0, ill. E_1 egyenesek között és á $p=f(q)$ görbe alatti terület súlypontjának abszcisszája. Könnyen belátható, hogy $Q(q)$ q-nak folytonos függvénye, ha $f(q)$ integrálható és $\int\limits_{\beta_0}^{\beta_1} f(t)dt$ q minden értékére pozitív $(A \leqq q \leqq B)$. (Ez a feltétel természetes, hiszen ha ez nem teljesül, úgy $Q(q)$ nincs is definiálva minden q-ra). Mivel nyilvánvalóan $Q(A)>A$ és $Q(B)<B$ vagyis $Q(q)-q$ pozitív, ha $q=A$ és negatív, ha $q=B$ tehát, kell, hogy az (A, B) intervallumban legyen legalább egy olyan q_1 érték, melyre $Q(q_1)-q_1=0$, vagyis $Q(q_1)=q_1$. Ezzel állításunkat $N=1$-re bebizonyítottuk; ebből az állítás minden N-re teljes indukcióval következik; ugyanis tegyük fel, hogy az állítás $(N-1)$-re már be van bizonyítva, $(N \geqq 2)$ legyen $q>A$ tetszőleges és alkalmazzuk ezt az állítást az (A, q) intervallumra, úgy tehát találhatók olyan $q_1(q), q_2(q), \ldots, q_{N-1}(q)$ számok, amelyekre fennállnak az

$$\frac{\int\limits_{\beta_{n-1}(q)}^{\beta_n(q)} tf(t)dt}{\int\limits_{\beta_{n-1}(q)}^{\beta_n(q)} f(t)dt}=q_n(q) \tag{2}$$

összefüggések, ahol

$$\beta_0(q)=\frac{A+q_1(q)}{2},\ \beta_n(q)=\frac{q_n(q)+q_{n+1}(q)}{2}\ (n=1,2,\ldots,N-2)$$

és $\beta_{N-1}(q)=\frac{q_{N-1}(q)+q}{2}$. Legyen továbbá $Q(q)$ a $p=f(q)$ görbe, a q— tengely továbbá a $\beta_{N-1}(q)$ és a $\frac{q+B}{2}$ abszcisszájú pontokban húzott, a q-tengelyre merőleges egyenesek által határolt tartomány súlypontjának abszciszszája. Mivel nyilvánvalóan

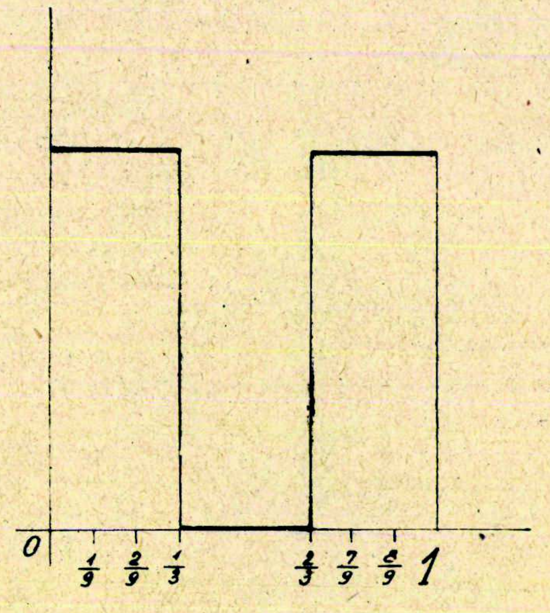
$$\lim_{q \to A} Q(q)>A \quad \text{és} \quad Q(B)<B$$

tehát kell, hogy legyen olyan $q=q_N$ érték, amelyre $Q(q_N)=q_N$ ekkor azonban a $q_1(q_N), q_2(q_N), \ldots, q_{N-1}(q_N)$ és q_N számok eleget tesznek a követelményeinknek. Igy tehát állításunk $N-1$-ről N-re következik, vagyis minden pozitív egész N-re igaz.

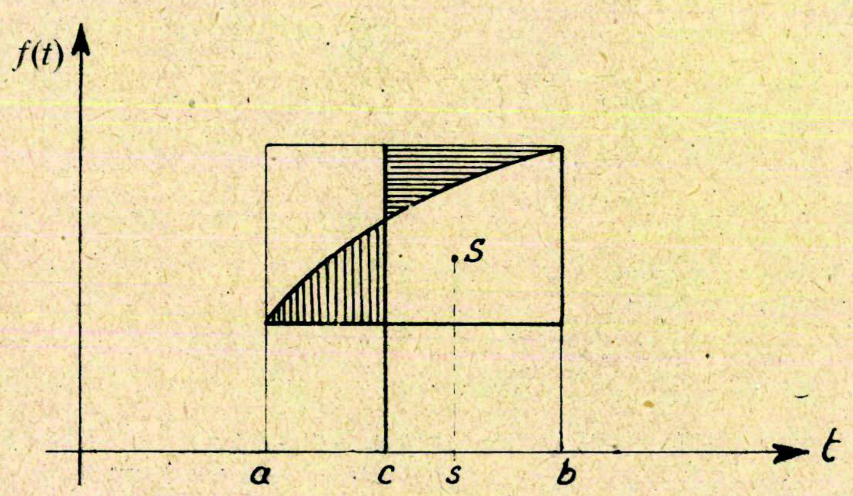
Mutassuk most meg, hogy a q_n $(n=1,2,\ldots,N)$ számok nem minden $f(q)$ mellett vannak egyértelműen meghatározva; legyen $N=1$, $A=0$, $B=1$, legyen továbbá (l. 2. ábra)

$$f(q)=\begin{cases}\frac{3}{2} & \text{ha } 0 \leqq q \leqq \frac{1}{3} \\ 0 & \text{ha } \frac{1}{3} < q < \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & \text{ha } \frac{2}{3} \leqq q \leqq 1,\end{cases}$$

akkor a következő három q_1-érték felel meg a követelményeknek: $q_1 = \frac{1}{2}$,



2. ábra



3. ábra

$q_1 = \frac{2}{9}$ és $q_1 = \frac{7}{9}$, vagyis három különböző megoldás van. Hogy $q_1 = \frac{1}{2}$ megfelel, az szimmetria-okokból nyilvánvaló; ha $q_1 = \frac{2}{9}$ úgy $\beta_0 = \frac{1}{9}$ és $\beta_1 = \frac{11}{18} < \frac{2}{3}$ tehát

$$\frac{\int\limits_{\beta_0}^{\beta_1} tf(t)dt}{\int\limits_{\beta_0}^{\beta_1} f(t)dt} = \frac{\frac{3}{2}\int\limits_{1/9}^{1/3} tdt}{\frac{3}{2}\int\limits_{1/9}^{1/3} dt} = \frac{2}{9} = q_1,$$

vagyis $q_1 = \frac{2}{9}$ is kielégíti az (1) feltételt, tehát szimmetria-okokból $q_1 = \frac{7}{9}$ is.

Könnyen belátható, hogy ha

$$D(q) = Q(q) - q = \frac{\int\limits_{\frac{A+q}{2}}^{\frac{q+B}{2}} tf(t)dt}{\int\limits_{\frac{A+q}{2}}^{\frac{q+B}{2}} f(t)dt} - q \tag{3}$$

q-nak monoton csökkenő függvénye, ha $A \leq q \leq B$ úgy a $q_1, q_2, \ldots, q_N$ számok egyértelműen meg vannak határozva; ez a feltétel teljesül, ha a és $b > a$ minden értékére fennáll az

$$\int\limits_a^b \frac{f(b)-f(t)}{f(b)-f(a)}\,dt < \frac{\int\limits_a^b (t-a)f(t)dt}{\int\limits_a^b f(t)dt} \tag{4}$$

egyenlőtlenség, ami teljesül például ha $f(t) = ct^{\alpha}$ ahol $\alpha > 0$, továbbá, ha $f(t)$ monoton növekvő és konkáv függvény*. Ezzel szemben van olyan monoton növekvő konvex $f(t)$, amelyre (4) nem teljesül. Ilyen például $a = 0$, $b = 1$, $f(t) = \frac{t}{2}$, ha $0 \leq t \leq x$ és $f(t) = \frac{x}{2} + \frac{1-\frac{x}{2}}{1-x}(t-x)$ ha $x \leqq t \leqq 1$; $f(t)$ mo-

* *Vincze István* felhívta a figyelmemet arra, hogy a (4) egyenlőtlenség monoton növekvő $f(t)$ esetében a következő alakra hozható:

$$\sigma < b - m \text{ ahol } m = \frac{\int\limits_a^b t\,df(t)}{f(b)-f(a)} \text{ az } \frac{f(t)-f(a)}{f(b)-f(a)}\,(a \leqq t \leqq b)$$

eloszlásfüggvényű valószínűségi változó várható értéke, és

$$\sigma^2 = \frac{\int\limits_a^b (t-m)^2 df(t)}{f(b)-f(a)}$$

ugyanezen változó szórásnégyzete.

noton növekvő és konvex, azonban, ha $2(\sqrt{2}-1)=0,8284\ldots<x<1$ úgy (4) nem teljesül. A (4) egyenlőtlenség geometriailag azt jelenti, hogy ha $f(t)$ monoton növekvő függvény és c az az érték, melyre

$$\int_a^c (f(t)-f(a))dt=\int_c^b (f(b)-f(t))dt,$$

vagyis amelyre a 3. ábrán látható két vonalkázott terület egyenlő, akkor az $y=f(t)$ görbe alatti és a és b közötti tartomány S súlypontjának s abszcisszája nagyobb c-nél.

Megjegyzendő egyébként, hogy c nem más, mint az

$$y'=\frac{f'(t)}{f(b)-f(a)}$$

görbe alatti, a és b közötti terület súlypontjának abszcisszája.

Megoldatlan a következő probléma: mi annak szükséges és elégséges feltétele, az $f(q)$ függvényre nézve, hogy a $q_1, q_2, \ldots, q_N$ számok egyértelműen meg legyenek határozva? Ennek az elemi matematikai kérdésnek a megoldása a bolygótávolságok törvényének kérdése szempontjából az elmondottak alapján nyilvánvaló jelentőséggel bír.

FÖLDES ISTVÁN:

Az elhangzott hozzászólásokból világosan kitűnt, hogy melyek a Smidt-elméletnek további diszkussziót kívánó kérdései, melyeknek irányában az elmélet további kifejlesztése várható, azonkívül meggyőződtünk arról, hogy ez a csillagászati oldalról jól megalapozott elmélet a geológia modern megállapításaival is összhangban van.

Detre és *Herczeg* kartársak rámutattak a *Smidt*-elmélettel kapcsolatos következő csillagászati kérdések vizsgálatának fontosságára:

1. Egy meteorrészecske a Nap által való kaptációjánál az egész felhő mennyiben tudja betölteni a kaptációt lehetővé tevő harmadik test szerepét.

2. A kaptált rajban a fajlagos impulzusnyomaték eloszlástörvényét, melyből *Smidt* a bolygótávolságok törvényét levezeti, kívánatos volna nemcsak kozmogóniai következményei által igazolni, hanem ezektől függetlenül, valamely ismert fizikai hatótényezőre való hivatkozással direkt úton is levezetni; egyébként *Rényi* Alfréd lev. tag megvilágította a bolygótávolságok valamely adott törvényével a *Smidt* elmélet értelmében összeegyeztethető összes impulzusnyomatékeloszlások kérdését.

3. A Nap forgástengelyének a bolygók pályasíkjaira való közelítő merőlegessége nem nyert még eddig kielégítő magyarázatot a Smidt-elméletben.

4. Kívánatos volna a dagályevolúció elméletét változó tömegek esetére is kidolgozni.

5. Újra megvizsgálandó a hazai meteoritkészlet a meteoritok korának szempontjából; pontosan ellenőrizendő a jelenleg naponta a Földre hulló meteoritok összes tömegének értéke és tisztázandó a meteoritok és üstökösök eredetének kérdése.

6. Kidolgozandó a planetáris és a sztelláris kozmogónia modern elméleteinek szintézise.

Csada kartárs az elektromágnesesség jelenségei figyelembevételének fontosságára mutatott rá, utalva *Alfvén* elméletére.