

AZ ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZET MUNKÁJA A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS IPARI ALKALMAZÁSAI TERÉN

RÉNYI ALFRÉD lev. tag

Előadta az 1953. május 28-án tartott nyilvános osztályülésen

Előadásomnak nem lehet célja, hogy az Alkalmazott Matematikai Intézet valószínűségszámítási osztályának a valószínűségszámítás ipari alkalmazásai terén végzett munkájáról részletesen beszámoljak, erre a rendelkezésre álló idő nem elegendő. Csak néhány elvi kérdésről, továbbá gyakorlati tapasztalatainkról fogok beszélni, a részleteket illetőleg pedig utalok az Osztály munkatársainak már megjelent, illetve a közeljövőben megjelenő dolgozataira.* Előadásom első részében a valószínűségszámítás ipari alkalmazásairól, a második részben azokról a matematikai problémákról fogok beszélni, amelyek ezzel kapcsolatban felvetődtek.

1. A valószínűségszámítási módszerek alkalmazása nem korlátozódik az iparnak semilyen részterületére, hanem szinte az ipar minden ágában jelentőséggel bír. Ennek oka, hogy a valószínűségszámítás véletlen tömegjelenségekkel foglalkozik és véletlen tömegjelenségekkel az ipari tömeggyártás bármely vonalán találkozunk. Az iparban bármilyen árucikknek a méretére, minőségére vonatkozó előírások a gyakorlat által megkívánt közelítő betartása komoly problémát jelent. Annak oka, hogy nem lehet tökéletesen egyforma darabokat gyártani, a tömeggyártás természetében rejlik. A nyersanyag tökéletes homogenitása nem biztosítható, a megmunkáló berendezés is állandóan változik (pl. a gép bizonyos alkatrészei kopnak) a munkás figyelme, koncentrációja is kisebb ingadozásokat mutat. Olyan tényezőket, mint pl. a hőmérséklet, a leg-tökéletesebb berendezéssel is csak megközelítőleg lehet állandóvá tenni. A statisztikus ingadozások nem küszöbölhetők ki teljesen a gyártási folyamatból, csak arra szorítkozhatunk, hogy ezeket az ingadozásokat a műszakilag megengedett tűrési határok közé szorítsuk. Ezt viszont feltétlenül el kell érünk. Egy másik terület, ahol ilyen ingadozások kiküszöbölhetetlenek, az energiafogyasztás kérdése. A világítási áramfogyasztás pl. állandó ingadozást mutat, de vonatkozik ez egy-egy üzem gépeinek energiafogyasztására is. A harmadik terület, ahol a véletlen ingadozások szükségképpen fellépnek: kopásnak, törésnek, vagy más módon való elhasználódásnak kitett gépalkatrészek ill. egyéb felszerelési tárgyak élettartamának, továbbá erőművek meghibásodásának kérdése.

* Lásd az előadáshoz csatlakozó dolgozatjegyzéket, amely az Osztály munkatársainak azokat a dolgozatait tartalmazza, amelyek a valószínűségszámítás ipari alkalmazásaival kapcsolatosak.

Ezeknek a véletlen ingadozásoknak a vizsgálata a valószínűségszámítás módszereinek alkalmazását kívánja meg. Milyen eredménnyel jár ezeknek a módszereknek az alkalmazása? Általában azt állapíthatjuk meg, hogy a valószínűségszámítási módszerek ipari alkalmazása segítséget nyújt olyan célkitűzések megvalósításában, amelyek ma iparunknak elsődrendű, égető feladatai. Gondolok itt az anyagtakarékosság, a meglévő kapacitás kihasználása, a selejt elleni harc kérdéseire. *Gerő Ernő* az MDP II. kongresszusán elmondott beszédében ezekről a kérdésekről a következőket mondta: „... ideje, hogy komolyan elkezdjünk foglalkozni a technológia, a gyártási előírások kérdéseivel, mert ezeknek a kérdéseknek elhanyagolása azzal jár, hogy gazdaságtalanul használjuk ki a rendelkezésünkre álló korszerű munkagépeket és ipari felszerelést, pocsékoljuk a nyersanyagot, magas a selejt százaléka, gyártmányaink nem eléggé szabványosítottak s mindez természetesen kedvezőtlenül hat ki a termelésre, a termelékenységre és az önköltségre.“* Egy másik beszédében *Gerő Ernő* a döntő tervév teljesítésének feltételeivel kapcsolatban ezt mondta: „Az első kérdés: a rendelkezésre álló termelési eszközök, ipari felszerelés, gépek, berendezések, épületek, nyersanyag jobb kihasználása és persze, ezzel együtt a munkaerő helyesebb, rendszeresebb, tervszerűbb felhasználása.“** — Annak ellenére, hogy ezen a téren a Szovjetunióban már jóval előbbre vannak, mint nálunk, *G. M. Malenkov* és *M. Z. Szaburov* a Szovjetunió Kommunista Pártjának XIX. kongresszusán mondott beszédeiből kitűnik, hogy a termelési kapacitás teljes kihasználása ott is aktuális kérdés. „Sok vállalatnál — mondta *G. M. Malenkov* — nagy veszteségeket okoz a rossz gazdálkodás, valamint az anyagok, a nyersanyag, a fűtőanyag, a villamosenergia, a szerszámok és más anyagi értékek nem-gazdaságos felhasználása... A termelési kapacitások elégtelen kihasználása és a rossz gazdálkodásból származó nagy veszteségek következtében sok iparvállalat nem teljesíti feladatait a termelés önköltségének csökkentése terén és óriási többletkiadásokat enged meg magának.“*** Ugyanerről a kérdéstről beszélt *M. Z. Szaburov* is: „Most az a lényeg — mondta — hogy a népgazdaság fellendülésének hatalmas forrásává változtassuk a ki nem használt termelési tartalékokat... Az egyes vállalatoknál észlelhető s a berendezés teljes kihasználását akadályozó szűk keresztmetszetek leggyorsabb felszámolásával a legteljesebben kihasználjuk a termelési kapacitást. Országunk hatalmas termelési apparátussal rendelkezik, amelyet a sztálini ötéves tervek éveiben hoztunk létre és amelyet élenjáró technikával, valamint nagyszámú, gazdag munkatapasztalattal rendelkező szakképzett munkással, mérnökkel és technikussal láttunk el. Ez nagy lehetőségeket nyújt arra, hogy rendszeresen növeljük a termelést a meglévő termelési kapacitás jobb kihasz-

* *Gerő Ernő*: Beszámoló az MDP II. kongresszusán, 1951. II. 28-án.

** *Gerő Ernő*: A döntő tervév teljesítésének feltételei. MDP KV által összehívott országos aktívaértekezleten tartott beszéd. 1952. I. 13.

*** *G. M. Malenkov*: Beszéd a SzKP XIX. kongresszusán.

nálása útján.* Ezeknek a kérdéseknek a megoldásához jelentős segítséget nyújthat a valószínűségszámítás módszereinek felhasználása.

A következőkben néhány konkrét ipari problémát sorolok fel, amelyekkel már behatóbban foglalkoztunk, ill. foglalkozunk:

a) *A szükségleti tényező meghatározása.* Ezzel kapcsolatban az Intézet Közleményeiben egy dolgozatot közöltünk *Szentmártony Tiborral* együtt „Gépipari üzemek egyidejűségi tényezőjének valószínűségszámítási vizsgálata” címen. A dolgozat azzal a problémával foglalkozik, hogy ha egy üzem gépei, amelyeket ugyanaz az energiaforrás táplál villamosenergiával, nem állandóan működnek, akkor egy tetszőleges pillanatban általában az üzem gépeinek csak egy része működik, tehát a pillanatnyi energiafogyasztás nem azonos a beépített kapacitással, annak csak egy tört része. Ennek a tört résznek az átlagos nagyságát megadja a kihasználási tényező, a tényleges fogyasztás azonban az átlagos érték körül ingadozik; minket elsősorban az ingadozások felső határa érdekel. Hogy ezek az ingadozások ne okozzanak a termelésben fennakadást, meg kell határozni azt a határt, amely fölé az energiafogyasztás csak rendkívül ritkán emelkedik. Ennek a gyakorlatilag maximális energiafogyasztásnak és a beépített kapacitásnak a hányadosát nevezzük szükségleti tényezőnek. Abban az esetben, amikor teljesen egyforma gépegységekről van szó, ez az egyidejűségi tényezőre redukálódik. — Erre a problémára *Knizsek Ferenc* főmérnök hívta fel a figyelmünket és megadta azokat a szempontokat, amelyeknek figyelembevétele feltétlenül szükségesnek látszott. A problémát ezen általános feltételek mellett tárgyaltuk. Feltettük, hogy a gépek különbözőek, és figyelembevettük, hogy az egyes gépek fogyasztása időközben ingadozhat. A kérdés elméleti megoldása a közölt dolgozatban megtörtént. A gyakorlati felhasználás kérdésével az Intézet és több illetékes intézmény még foglalkozik. Igyekeztünk a végeredményeket olyan formába önteni, hogy minél kevesebb tapasztalati adathból lehessen kiszámítani a szükségleti tényezőt. Lassítja a munkát, hogy nehéz megbízható számadatokat szerezni egyes gépek kihasználására és igénybevételeire vonatkozólag, mert üzemeink ilyen megfigyelésekre nincsenek berendezve. Tapasztalatunk szerint az Intézet az ilyen üzemi adatfelvételek terén a legmegbízhatóbb eredményt akkor éri el, ha saját munkatársai végzik a méréseket.

b) *Kompresszorok méretezése sűrített levegővel működő gépek ellátására.* Ezt a problémát *Sors László*, a Gépipari Tervező Iroda mérnöke vetette fel, megoldását Intézetünk Közleményeiben közöltük. Itt csak annyit jegyzek meg, hogy ezzel kapcsolatban egészen speciális matematikai problémák adódtak. Nemcsak a kompresszorok méretezéséről volt szó, hanem a légtartály méretezéséről is, ahonnan a sűrített levegővel dolgozó gépek a levegőt kapják. Probléma volt továbbá a részleges automatizálás, amely abban áll, hogy ha a nyomás a tartályban egy bizonyos határt meghalad, a kompresszor automa-

* *M. Z. Szaburov*: Beszéd a SzKP XIX. kongresszusán.

tikusan kikapcsol és csak akkor kapcsol újra be, amikor a nyomás egy bizonyos határ alá csökken. Mindezek a körülmények bonyolulttá tették a problémát, úgy, hogy itt nem volt elégséges a közönséges Markov-láncok elmélete, csak magasabbrendű Markov-láncok segítségével lehetett megoldani a feladatot. A kompresszor méretezésére vonatkozólag a végeredményt diagrammok formájában készítettük el.

c) *Aprítási folyamatok.* Ilyen kérdésekkel az Intézet már régebben foglalkozik, ezeknek elsősorban a kőbányászatban van jelentősége. A. N. Kolmogorov a zúzásnál előálló kötőmelék eloszlásának logaritmikusan normális voltára vonatkozó eredményeinek egyszerűsítésével foglalkozik az első, ezzel a kérdéssel kapcsolatos, az Intézetben készült dolgozat. Ennek folytatásaként az Intézet Közleményeiben Székely Gábor egy dolgozata foglalkozik azzal, hogy hogyan lehet egy megadott finomságú zúzott anyag zúzásához szükséges energiamennyiséget meghatározni. A szükséges energia a Rittinger-féle elv szerint arányos a zúzásnál létrehozott új felülettel. Sikerült a két fázisban történő zúzásnál a pofás-török optimális beállításának problémáját megoldani és a végeredményt szintén diagramm formájában megadni. Az üzemi kísérletek most indulnak meg az uzsai kőbányában. — A legutóbbi hetekben a logaritmikus normális eloszlástörvény egy egészen másfajta és első pillanatra távolesőnek látszó alkalmazása merült fel, a szénportüzeléssel kapcsolatban. A szénpor tüzelésénél az égés a szemcse felületén folyik. Ennek következtében a szénportüzelés határfoka a szénpor szemcséinek nagyságától függ. Minél finomabbra őrlik a szénport, annál gazdaságosabb a tüzelés, azonban annál költségesebb a szénpor őrlése. A feladat mármost az, hogy meghatározzuk a leggazdaságosabb finomságot. Ez jellemző példa arra, hogy látszólag távoleső ipari problémák néha ugyanazzal a matematikai módszerrel oldhatók meg.

d) *Erőművek kooperációja.* Erre vonatkozóan Kovács Károly Pál lev. tag az 1951. évi akadémiai nagygyűlésen tartott előadásában tért ki részletesen. Az utóbbi időben a hőerőművekkel foglalkozó műszaki szakemberek részéről felmerült az a kívánság, hogy ezzel a kérdéssel részletesebben foglalkozzon az Intézet, mégpedig olyan módon, hogy a véletlen meghibásodások folyamatát ne stacionér folyamatnak tételezzük fel, vagyis a jóság számot az idő függvényének tekintjük. Bizonyos kooperációs kérdések szempontjából az erőművek tervszerű karbantartási munkálataival kapcsolatban kívánatos ennek a kérdésnek a megvizsgálása.

e) *Gépalkatrészek tartalékolása.* Ezzel a kérdéssel foglalkozik egy Szentmártony Tiborral együtt írt dolgozatunk, amely a Matematikai Lapokban jelent meg az elmúlt évben. A probléma a következő: gépalkatrészek, vagy más felszerelési tárgyak (tengelyek, fogaskerekek, fúrók, izzólámpák, autógumik, stb.), amelyek egy időben és egyszerre több példányban vannak igénybe véve, előbb-utóbb kicserélésre szorulnak. A valószínűségszámítási módszerek alkalmazásának célja itt annak kiszámítása, hogy egy bizonyos időn belül hány

cserére lesz szükség és ennek megfelelően milyen mennyiségű alkatrészt kell raktáron tartani s milyen ütemben kell ezt a raktárkészletet kiegészíteni. Ez a kérdés az ipar szempontjából igen nagyjelentőségű. A kérdés érdekes abban az értelemben is, hogy másképpen merül fel a szocialista iparban, mint a kapitalista iparban. Ez a kérdés a szocialista ipar sajátos problémája. A szocialista iparban nemcsak az jelent kárt a népgazdaságnak, ha az üzem nem gondoskodik kellő tartalékról és így kiesés következik be a termelésben, hanem az is, ha egy alkatrészből túl nagy tartalékot tárol és így elvonja azt más üzemektől, amelyeknél ennek következtében alkatrészhiány áll elő. Az e kérdés terén elért eredményeinkről itt csak annyit szeretnék említeni, hogy ezekből az eredményekből az derül ki, hogy az iparban eddig alkalmazott előírások sok helyütt lényegesen csökkenthetők s ílymódon rejtett tartalékok szabadíthatók fel. Ennek az elméletnek bizonyos továbbfejlesztése mutatkozott szükségesnek. A probléma megvizsgálásába *Takács Lajos* is bekapcsolódott és úgy látszik, hogy ezt az elméletet sikerül továbbfejlesztünk, figyelembe véve többek között azt, hogy a szóbanforgó felszerelési tárgyak nincsenek állandó igénybevételnek kitéve.

f) *A minőségellenőrzés és a selejt elleni harc kérdései.* Erre a kérdésre *Vincze István* fog bővebben kitérni hozzászólásában. A minőségellenőrzés problémája két részre oszlik: gyártásközbeni ellenőrzésre, amelynek célja a selejt megelőzése és a készáru ellenőrzése az átvételnél, amely már csak konstatálja a selejtet, de megóv a nem megfelelő szállítmány átvételétől. Hangsúlyozni szeretném, hogy ezen a téren igen nagy lehetőségei vannak a matematikai statisztika egy új módszere alkalmazásának, a rendezett minták elméletének. Ez az elmélet csak a legutóbbi években indult fejlődésnek, szovjet matematikusok dolgozták ki és ennek az elméletnek a továbbfejlesztésébe nekünk is sikerült bekapcsolódnunk.

Mindezek a problémák matematikai megoldásának az iparban való alkalmazása folyamatban van. Az elért eredmények gyakorlati felhasználásáról az illetékes állami szervek kell, hogy gondoskodjanak. Ez eddig nem haladt olyan gyors tempóban, mint ahogy szeretnénk. Persze, figyelembe kell venni, hogy nehéz feladatról van itt szó, mert a pontos adatok beszerzése az iparból nem könnyű dolog. Másrészt ezeknek az új módszereknek az iparba való bevezetése terén minden alkalommal bizonyos konzervativizmust is le kell győzni. A magunk részéről arra kell törekednünk, hogy eredményeinket a műszaki szakemberek minél szélesebb köre számára hozzáférhetőbbé tegyük. Eddigi munkánk hiányosságaira vonatkozólag elsősorban azt említeném meg, hogy általában közvetlen kapcsolatban állottunk a műszaki szakemberekkel, de nem mindig álltunk elég szoros kapcsolatban a műszaki tudományok szakembereivel. Nagyon helyesen hangsúlyozta ezt *Gillemot László* lev. tag tegnapi felszólalásában a matematikai fizikával kapcsolatban, ugyanez vonatkozik azonban a valószínűségszámítás ipari alkalmazásaira is.

2. Áttérek ezután azoknak a matematikai problémáknak a vázlatos ismertetésére, amelyek a valószínűségszámítás ipari alkalmazásaival kapcsolatban merültek fel. Általában meg kell állapítanunk, hogy az ipari alkalmazásokkal való foglalkozás a valószínűségszámítás terén végzett elméleti kutatómunkánk számára is rendkívül termékenynek bizonyult. Az elméleti kutatás három főbb területen folyik:

- a) a sztochasztikus folyamatok elmélete,
- b) a valószínűségszámítás határeloszlástételeinek elmélete,
- c) a rendezett minták elmélete.

a) A sztochasztikus folyamatokkal kapcsolatban különösen azt a tapasztalatunkat szeretném kiemelni, ami igen sok problémára vonatkozik, hogy általában a gyakorlati problémák megoldásánál nem elégedhetünk meg a Markov-folyamatok elméletének alkalmazásával. Figyelembe kell vennünk itt azt, hogy a sztochasztikus folyamatok elméletének egyetlen alaposan kidolgozott elmélete éppen a Markov-folyamatok elmélete és így ezt az elméletet éppen a nem-Markov-típusú folyamatok irányában kellett továbbfejlesztenünk. A nem-Markov-típusú folyamatokat bizonyos átalakítással visszavezethetjük Markov-folyamatokra. Ez történt a kompresszor-probléma esetében is és számos más esetben is. Különösen *Takács Lajos* dolgozatait emelem ki ezen a téren, továbbá *Pál Lénárd*, a Szovjetunióban dolgozó fizikus aspiráns két ilyentárgyú dolgozatát, amelyek a nyár folyamán az Intézetben végzett munkájának eredményei. — Hasonló matematikai problémák vetődtek fel a kvantummechanika bizonyos kérdéseivel kapcsolatban is. Ez feltétlenül megerősített abban az elhatározásban, hogy az Intézet valószínűségszámítási osztályának több munkatársával együtt elhatároztuk, hogy egy monográfiát fogunk írni a sztochasztikus folyamatok elméletéről, különös tekintettel a nem-Markov-típusú folyamatoknak Markov-típusú folyamatokra való visszavezetésére.

A. N. Kolmogorov akadémikus nemrégiben Moszkvában tartott előadásában a valószínűségszámítás terén az egyik legfontosabb feladatként jelölte meg egy összefoglaló monográfiának a megírását a sztochasztikus folyamatok elméletéről. Egy ilyen monográfiának a megírására elsősorban szovjet matematikusok volnának hivatottak; mi a magunk részéről a nem-Markov-folyamatok rendszeres tárgyalásával szándékozunk ennek a feladatnak a végrehajtásához hozzájárulni.

b) A második témakörből kiemelek, egy a szükségleti, illetve egyidejűségi tényezővel kapcsolatban végzett vizsgálatok során felmerült feladatot. A valószínűségszámítás központi határeloszlástételei megadják a független valószínűségi változók összegének határeloszlását, ha a változók száma a végtelenhez tart; a gyakorlati problémáknál viszont arra van szükség, hogy becsléssel rendelkezünk véges számú változó esetére. Az ipari alkalmazás során ugyanis az a természetes kérdés merült fel, hogy mekkora gépszámtól kezdve alkalmazhatók a képleteink. Ehhez exakt becslésekre volt szükség,

mégpedig nemcsak a binomiális eloszlásnak a normális eloszlástól való eltérése, hanem sokkal általánosabb esetre vonatkozólag. Erre a célra fel tudtuk használni a Csebisev-féle egyenlőtlenségnek azt az általánosítását, amelynek az alap gondolata Sz. Bernsteintől származik és amelyet egyetemi előadásaimban részletesen kidolgoztam.

c) A harmadik problémakör, amellyel az elméleti vizsgálatok szoros kapcsolatban voltak, a rendezett minták elmélete. A mintavétel elméletének főcélja az, hogy a minta elemeiből megbízható következtetéseket tudjunk levonni az egész statisztikai sokaságra vonatkozólag. A rendezett minták elmélete a legkevesebb számolást igénylő módon biztosítja ezt, mert lehetővé teszi, hogy az empirikus paraméterértékek számítása helyett pusztán a minta-elemek nagyság szerinti elrendezéséből le lehet vonni a kívánt következtetéseket. A minőségellenőrzésnél ez a módszer lehetővé teszi azt, hogy a kontrollkártyára csak a mérések eredményét kell felvezetni és azokból nem kell középértéket, szórást, stb. számítani. Figyelembe véve azt, hogy ezt a munkát nem matematikailag képzett munkaerők végzik, nyilvánvaló, hogy ennek a módszernek a minőségellenőrzésnél nagy lehetőségei vannak.

A rendezett minták elméletének néhány alapvető kérdésével foglalkozik egy *Hajós György* akadémikussal közösen írt dolgozatunk. A rendezett minták elméletében egy új módszert dolgoztam ki, amely eredményesen alkalmazható az elmélet számos problémájára.

A rendezett minták elméletének legfontosabb feladata, hogy a minta elemeinek eloszlásából a teljes sokaság eloszlására, tehát a minta empirikus eloszlásából az elméleti eloszlásra következtessen. Ez a következőképpen történhet: Egy statisztikai sokaságból egy N elemű mintát véve, a minta elemei — a sokaság kiválasztott elemeinek bizonyos vizsgált méretei (átmérő, szakítási szilárdság, stb.) — egymástól független valószínűségi változóknak tekinthetők. A teljes sokaság eloszlásfüggvényéről csak azt tesszük fel, hogy folytonos. Ezután elkészítjük a minta empirikus eloszlásfüggvényét, úgy, hogy a minta elemeit felmérjük az X tengelyre. Ezek a számok a számegyenesre felmérve maguktól nagyság szerint rendeződnek el. Az empirikus eloszlásfüggvény ebből azonnal adódik, hiszen az nem más, mint az a lépcsős függvény, amely minden minta-elemnél 1 N -nel ugrik. Ha a minta elemszámát minden határon túl növeljük, akkor ezek a lépcsős függvények 1 valószínűséggel minden határon túl hozzásimulnak az elméleti eloszlásfüggvényhez. Ez *V. Glivenko* tétele, amely szabatosan a következőképpen szól:

$$P\left(\sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)| \rightarrow 0\right) = 1 \quad (1)$$

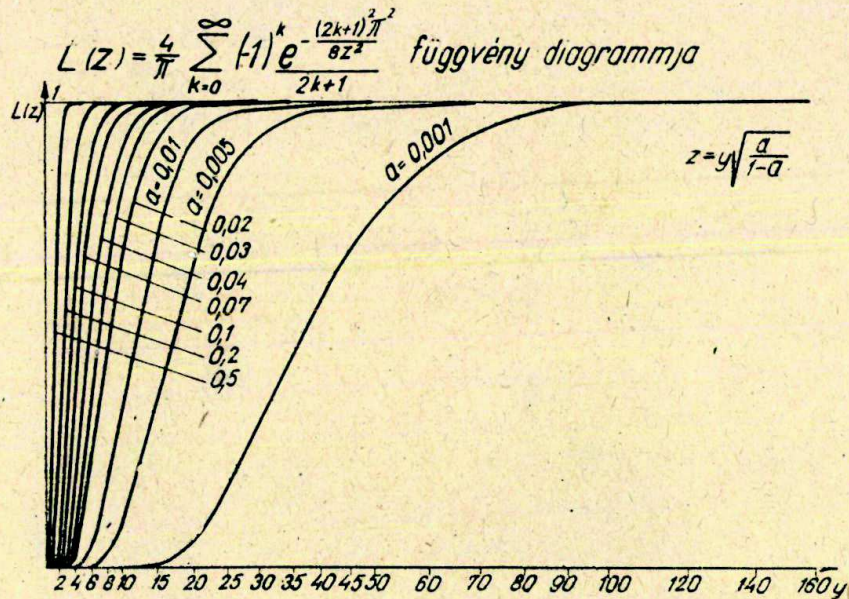
A rendezett minták elméletének legfontosabb eredménye *A. N. Kolmogorov* tétele, amely szerint a $\sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)|$ eltérés általában $\frac{1}{\sqrt{n}}$ nagyságrendű, tehát a minta elemei számának négyzetgyökével fordítottan arányos.

Ha \sqrt{n} -nel beszorozzuk, úgy ez a mennyiség, amely maga is valószínűségi változó (hiszen mintáról mintára más a különbség felső határa), egy nagyságrendű lesz. Kolmogorov tétele szerint létezik a határértéke a

$$\sqrt{n} \sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)| < y$$

esemény valószínűségének, mégpedig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n} \sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)| < y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 y^2} \quad (2)$$



1. ábra

Ennek a tételnek a tanulmányozása közben merült fel az a gondolat, hogy célszerűbb az $|F_n(x) - F(x)|$ „hiba“ helyett a „relatív hibát“, vagyis az $\frac{|F_n(x) - F(x)|}{F(x)}$ mennyiséget vizsgálni. A relatív hibának a vizsgálata ebben a problémában ugyanis bizonyos szempontból többet mond. Éppen ezért igyekeztem a relatív hiba maximumának határeloszlását meghatározni és sikerült is ezt a kérdést az említett új módszer segítségével megoldani. Mivel $F(x)$ 0-vá válik, ha $x \rightarrow \infty$ arra kell szorítkozni, hogy a relatív eltérést egy $a \leq F(x) \leq 1$ ($a > 0$) intervallumon vizsgáljuk. Ez azt jelenti, hogy figyelmen kívül kell hagyni a legszélső elemeket. Gyakran ez gyakorlatilag nem is történhet másképpen. Többek között bebizonyítottam*, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sqrt{n} \sup_{a \leq F(x) \leq 1} \frac{|F_n(x) - F(x)|}{F(x)} < y\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-\frac{2k^2(1-a)}{ay^2}}}{2k+1} \quad (3)$$

A tétel alkalmazásainak elősegítésére a valószínűségszámítási osztály két

* Ezek az eredmények az Osztályközleményekben sajtó alatt vannak, azért azok részletes ismertetésétől itt eltekintünk.

munkatársa, *Palásti Ilona* és *Várnai Péterné* elkészítették a (3) jobboldalán álló függvény értékeinek táblázatát. A

$$G(y, a) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-\frac{2k^2(1-a)}{ay^2}}}{2k+1}$$

függvényt a különböző értékeire az 1. ábra tünteti fel, amely ezen táblázatok alapján készült.

Befejezésül azt említem még meg, hogy annak egyik oka, hogy bizonyos eredményeket sikerült elérnünk, az volt, hogy a valószínűségszámítási osztályon kollektív munkamódszert alakítottuk ki.

A továbbiakban igyekszünk mind az elméleti vizsgálatokat továbbfolytatni, mind pedig az ipari alkalmazások terén is újabb eredményeket elérni. Ezen a téren nemcsak alkalmazott matematikai, hanem szervezési problémák megoldása is vár ránk, amelyeket az ipar szakembereivel együtt kell megoldanunk. Hogy az érdeklődés ezek iránt a kérdések iránt a műszaki szakemberekben megvan, azt bizonyítják az utóbbi időben a Mérnöki Továbbképző Intézetben tartott előadásaink tapasztalatai. Az együttműködés megfelelő módszereinek kialakítása terén azonban még igen sok a teendő. Mi a magunk részéről igyekszünk megbírkózni a ránk háruló feladatokkal, ugyanakkor azonban azt várjuk, hogy a műszaki szakemberek aktívabban bekapcsolódjanak ebbe a munkába.

IRODALOMJEGYZÉK

- Aczél János*: Összetett Poisson-eloszlásokról. III. Acta Mathematica. (Sajtó alatt.)
Hajós György—Rényi Alfréd: A rendezett minták elméletének néhány alapvető kérdéséről. (Sajtó alatt az Osztályközleményekben.)
Jánossy L.—Rényi A.—Aczél J.: Összetett Poisson-eloszlásokról. Osztályközlemények 2, 1951. 315—328.
Prékopa András: Összetett Poisson-eloszlásokról. IV. Acta Mathematica. (Sajtó alatt.)
Rényi Alfréd: A Poisson-eloszlás problémaköréről. Osztályközlemények. I. 1950. 202—212.
Rényi Alfréd: On some problems concerning Poisson-processes. Publicationes Mathematicae. 2. 1951. 66—73.
Rényi Alfréd: Újabb eredmények a valószínűségszámítás terén. Osztályközlemények. 2, 1951. 125.
Rényi Alfréd: Összetett Poisson-eloszlásokról. II. Osztályközlemények. 2, 1951. 329—342.
Rényi Alfréd—Szentmártony Tibor: Gépalkatrészek és felszerelési tárgyak törzskészletének valószínűségszámítási meghatározása. Matematikai Lapok III. 1952. 129—139.
Rényi Alfréd—Szentmártony Tibor: Gépipari üzemek elektromos energiaszükségletének és egyidejűségi, illetőleg szükségleti tényezőjének valószínűségszámítási meghatározása. Alk. Mat. Int. Közleményei I. 1952. 85—104.
Rényi Alfréd: Az aprítás matematikai elméletéről. Építőanyag. 1950. 1—8.
Rényi Alfréd: Kompresszorok és légtartályok racionális méretezése üzemek sűrített levegővel való ellátására. Alk. Mat. Int. Közleményei. I. 1952. 105—138.
Rényi Alfréd: A rendezett minták elméletéről. (Sajtó alatt az Osztályközleményekben.)

- Rényi Alfréd*: О некоторых предельных теоремах теорий вероятностей, és О некоторых новых критериях согласия являющихся аналогичными критериями согласия А. Н. Колмогорова (Megjelennek a Доклады Академий Наук СССР-ben).
- Rényi Alfréd*: Eine neue Methode in der Theorie der geordneten Stichproben. Berlin. Math. Tagung. 1953.
- Rényi Alfréd—Takács Lajos*: Poisson-folyamatok által származtatott történés-folyamatokról és azok technikai és fizikai alkalmazásairól. Alk. Mat. Int. Közleményei. I. 1952. 139—146.
- Székely Gábor*: A kötörés valószínűségszámítási tárgyalásához. Osztályközlemények. I. 245—249.
- Székely Gábor*: Szövegépek optimális fordulatszámának valószínűségszámítási meghatározása többgépes rendszer esetén. Alk. Mat. Int. Közleményei I. 1952. 149—157.
- Székely Gábor*: Kötörés energiaszükségletének minimalizálása az elő- és utántörők legcélszerűbb beállításával. Alk. Mat. Int. Közleményei. I. 1952. 157—165.
- Takács Lajos*: Bekövetkezési és koincidencia jelenségek időtartamban tetszőleges eloszlású történések esetén. Osztályközlemények I. 2. 371.
- Takács Lajos*: Koincidencia jelenségek állandó időtartamú események esetén. I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei. 731—740.
- Takács Lajos*: Időtartamban tetszőleges eloszlású történésekkel kapcsolatos sztochasztikus folyamatokról. Sajtó alatt az Acta Mathematica-ban.
- Takács Lajos*: Poisson-eloszlás által származtatott másodlagos sztochasztikus folyamatokról és azok fizikai alkalmazásáról. (Sajtó alatt az Osztályközleményekben.)
- Takács Lajos*: Gépegyüttállások valószínűségszámítási tárgyalása tekintettel a várakozási időkre. Osztályközlemények, I. 228—234.
- Takács Lajos*: Több gép egyidejű működésének valószínűségszámítási tárgyalása. Magyar Technika, 1950.
- Takács Lajos*: Gépegyüttállások valószínűségszámítási tárgyalása. Magyar Technika, 1950.
- Vincze István*: Az ipari minőségellenőrzés statisztikai módszerei és az Intézet feladatai e módszerek bevezetése terén. Alk. Mat. Int. Közleményei. I. 1952. 239—250.