H. STEINHAUS EGY SEJTÉSÉRŐL

RÉNYI ALFRÉD lev. tag

Előadta az 1951. május 8-án tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Egy 1937-ben tartott előadásában[1] *H. Steinhaus* a következő sejtést mondotta ki: ha valamely

$$\{f_n(x)\} \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{1}$$

véges vagy megszámlálhatóan végtelen számú mérhető egy véges (a,b) intervallumban értelmezett sztochasztikusan független[2] függvényből álló függvényrendszer *függetlenség tekintetében telített*, vagyis ha nem létezik olyan $g(x)$ mérhető függvény, amely nem majdnem mindenütt állandó és amely az (1) rendszerhez hozzá volna csatolható a rendszer függetlenségének csorbítása nélkül, úgy az

$$\{f_1^{m_1}(x)f_2^{m_2}(x)\ldots f_n^{m_n}(x)\} \tag{2}$$

függvényrendszer, ahol $m_1, m_2, \ldots,$ függetlenül futják be az összes nem-negatív egész számokat és $n=1,2,3,\ldots,$ az (a,b) intervallumban *teljes*. *Steinhaus* megemlített néhány gondolkodásra késztető példát, amelyekben a fenti állítás érvényes: pl. ha (1) az

$$R_n(x)=\operatorname{sg}\sin(2^{n-1}\pi x) \qquad (n=1,2,3,\ldots) \tag{3}$$

Rademacher-féle függvények rendszere, úgy (2) a jól ismert *Walsh*-féle rendszer, amelyről tudjuk, hogy teljes. Egy másik példa a következő: egy olyan függvényt, amely függetlenség tekintetében már önmagában telített rendszert alkot, *univerzális* függvénynek fogunk nevezni; világos, hogy $f_1(x)=x$ univerzális függvény; ebben az esetben (2) az $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots,$ rendszer, melyről tudjuk, hogy az teljes.

E megkapó példák ellenére a sejtés általában nem igaz. Vizsgáljuk pl. a

$$h(x)=\begin{cases} x & \text{ha} \quad 0\leqq x\leqq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{ha} \quad \frac{1}{2}<x\leqq 1 \end{cases}$$

függvényt. Minthogy $h(x)$ $\left(0,\frac{1}{2}\right)$-ben monoton és ezen az intervallumon kívül nem veszi fel újból azokat az értékeket, amelyeket a $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ intervallumban felvesz, ennélfogva *G. Ottaviani*[4] tétele értelmében $h(x)$ univerzális függvény. Másrészt könnyű belátni, hogy a $\{h^n(x)\}$ rendszer nem teljes, mivel $h^n(x)$ x minden értékére ortogonális a $g(x)$ függvényre, mely a következőképpen van definiálva:

$$g(x)=\begin{cases} 0 & \text{ha } 0\leqq x\leqq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{ha } \frac{1}{2}<x\leqq \frac{3}{4} \\ -1 & \text{ha } \frac{3}{4}<x\leqq 1. \end{cases}$$

Mindazonáltal *Steinhaus* sejtése a független függvények telített rendszereinek egy igen általános osztályára érvényes.

A jelen értekezés célja az, hogy *Steinhaus* fentemlített sejtését igen általános feltételek mellett bebizonyítsuk. 1950-ben az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadásomban[5] ugyanezt a sejtést erősebb korlátozó feltételek mellett bizonyítottam be; időközben sikerült a feltételek közül némelyeket kiküszöbölni. Az 1. §. egy általános tétel bizonyítását tartalmazza, amely tétel lehetővé teszi a (2) rendszer teljességének megállapítását oly feltétel mellett, amelyben a függetlenség fogalma egyáltalán nem szerepel. Ez a tétel valós függvénytani tétel, mindazonáltal magában foglalja mindazokat az ismert eseteket, amelyekben *Steinhaus* sejtése érvényes. Bevezetjük a *maximális* rendszerek fogalmát; az (a, b) intervallumban értelmezett valós, mérhető függvények (1) rendszerét maximálisnak nevezzük, ha x különböző értékeire az $\{f_n(x)\}$ sorozatok különbözőek (kivéve x értékeinek egy 0 mértékű halmazát). Ily módon az (1) rendszert maximálisnak nevezzük, ha létezik egy olyan 0 mértékű Z halmaz, hogy ha x_1 és x_2 közül egyik sem tartozik Z-hez és $f_n(x_1)=f_n(x_2)$ minden $n=1, 2, 3, \ldots$ értékre, úgy $x_1=x_2$. A tétel állítása az, hogy ha az (1) rendszer maximális, úgy a (2) rendszer teljes. A független függvények (1) rendszereinek valamennyi oly ismert példája, melyekre nézve a (2) rendszer teljes, maximális rendszer.*

Érdekes megjegyezni azt is, hogy független függvények valamely maximális rendszere függetlenség tekintetében mindenkor telített (3. lemma). Maximális rendszer érdekes példája a $\sin x$ és $\cos x$ függvényekből álló rendszer a $(0, 2\pi)$ intervallumban: ebben az esetben a (2) rendszer — a többiektől lineárisan függő függvények elhagyása után — a $\{\cos^n x, \sin x\cdot\cos^n x;\ n=0, 1, 2, \ldots\}$ rendszer amely ekvivalens a $\{\cos nx, \sin(n+1)x;\ n=0, 1, 2, \ldots\}$ rendszerrel, tehát a jól ismert trigonometrikus rendszerrel, melyről tudjuk, hogy az teljes.

* Két függvényrendszert egymással ekvivalensnek nevezünk, ha a két rendszer lineáris kombinációinak összességei azonosak. Világos, hogy ha valamely rendszer teljes, minden vele ekvivalens rendszer szintén teljes.

Továbbá $\cos x$ önmagában véve maximális rendszert alkot $(0, \pi)$-ben és így a $\{\cos^n x\}$ rendszer, vagy ami ugyanaz, a $\{\cos nx\}$ rendszer a $(0, \pi)$-ben teljes. (V. ö. [6])

A $\{\sin x, \cos x\}$ rendszer példája a következőképpen általánosítható: ha $u = f(x)$ és $v = g(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ valamely az (u, v)-síkban fekvő görbe paraméteres egyenletei, amely görbe nem metszi önmagát (vagy amely görbe többszörös pontjainak halmaza x 0 mértékű halmazának felel meg), úgy az $\{f^n(x) g^m(x); n, m = 0, 1, 2, \ldots\}$ rendszer teljes (feltesszük, hogy $f(x)$ és $g(x)$ korlátosak és mérhetők). Az az eset, amelyben az (1) rendszer csak egyetlen függvényből áll szintén nem teljesen triviális: ebben az esetben a tétel azt állítja, hogy ha $y = f(x)$ az (a, b) intervallumot egy az y tengelyen lévő halmazra egyértelműen és kölcsönösen képezi le, úgy az $\{f^n(x)\}$ rendszer teljes: ez a jelen dolgozat 2. lemmája; lemma alakjában közöljük ezt az állítást, bár az tételünknek speciális esete, minthogy az általános eset bizonyítása erre a speciális esetre van alapítva. Oly függvényt, amely önmagában maximális rendszert alkot, maximális függvénynek fogunk nevezni.

A legfontosabb lépés, amely a második lemmától tételünkhöz vezet, *A. N. Kolmogorov* egy gondolatának alkalmazása; *Kolmogorov* ezt a gondolatot egy a feltételes változó értékekre vonatkozó tétel bizonyítására használta fel egy dolgozatában [7] amelyben egy korábbi, a valószínűségszámítás központi határeloszlástételének az alapulvett valószínűségi mérték abszolut folytonos transzformációjára nézve invariáns jellegére vonatkozó tételemet [8] általánosítja. Köszönettel tartozom *Császár Ákos*nak egy értékes megjegyzéséért, amely segítségével a bizonyítást bizonyos mértékben sikerült egyszerűsíteni.

1. §. A teljes rendszerekre vonatkozó tétel bizonyítása

Először bebizonyítjuk a következő

1. lemmát. Jelöljön $f(x)$ egy a $(0, 1)$ *intervallumban értelmezett, mérhető, korlátos függvényt *, melynek értékei ugyanehhez az intervallumhoz tartoznak. Ha $g(x)$ tetszőleges korlátos Baire-féle függvény a* $(0, 1)$ *intervallumban úgy minden pozitív ε-hoz és pozitív A-hoz megadható egy olyan $P(x)$ polinom, amelyre*

$$\int_0^1 |g(f(x)) - P(f(x))|^A \, dx < \varepsilon. \qquad (1.1)$$

Bizonyítás: először bebizonyítjuk (1)-et arra az esetre, amikor $g(x) = 1$, ha $0 \leqq x \leqq u < 1$ és $g(x) = 0$, ha $u < x < 1$.

Tetszőleges pozitív ε-hoz található egy oly $P(x)$ polinom, meiy a következő sajátságokkal rendelkezik:

1. $0 \leqq P(x) \leqq 1$. 2. $|g(x) - P(x)| < \varepsilon$, ha $0 \leqq x \leqq u$

* Az egész dolgozatban a $(0, 1)$ intervallumon értelmezett függvényekről beszélünk, de nyilván valamennyi tételünk bármely véges intervallumra érvényes.

és ha $u+\varepsilon \leqq x \leqq 1$. Így pl. a

$$P(x)=\frac{\int\limits_{-u}^{u+n^{-\frac{1}{3}}}(1-(x-t)^2)^n\,dt}{\int\limits_{-1}^{+1}(1-t^2)^n\,dt} \tag{1.2}$$

polinom, ha n-et elegendően nagynak választjuk, rendelkezik valamennyi megkívánt sajátsággal. Ebből következik, hogy

$$\int\limits_0^1 |g(f(x))-P(f(x))|^A\,dx \leqq \varepsilon^A+|E(\varepsilon)| \tag{1.3}$$

ahol $E(\varepsilon)$ jelöli x azon értékeinek halmazát, melyekre $u<f(x)<u+\varepsilon$ és $|E(\varepsilon)|$ ennek a halmaznak Lebesgue féle mértéke. Minthogy nyilvánvalóan $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}|E(\varepsilon)|=0$ az említett függvényre (1.1) be van bizonyítva. Alkalmazva *H. Minkowski* ismert

$$\left\{\int\limits_0^1 |a(x)+b(x)|^A dx\right\}^{\frac{1}{A}} \leqq \left\{\int\limits_0^1 |a(x)|^A dx\right\}^{\frac{1}{A}}+\left\{\int\limits_0^1 |b(x)|^A dx\right\}^{\frac{1}{A}} \tag{1.4}$$

egyenlőtlenségét, következik, hogy ha az 1. lemma a $g_k(x)$ $(k=1,2,\ldots)$ függvényekre igaz, úgy a $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k g_k(x)$ függvényekre is igaz. Ilymódon az 1. lemma bármilyen lépcsős függvényre igaz. Ugyanezt az egyenlőtlenséget felhasználva, következik, hogy ha az 1. lemma a $g_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ függvényekre igaz és ha

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 |g_n(f(x))-g^*(f(x))|^A\,dx=0 \tag{1.5}$$

úgy a lemma $g^*(x)$-re is igaz. De minthogy minden folytonos függvényre és ennek folytán minden korlátos $g^*(x)$ Baire-féle függvényre nézve megadható a $g_n(x)$ lépcsős függvények oly sorozata, hogy (1.5) igaz, következik, hogy az 1. lemma minden korlátos Baire-féle függvényre igaz.

Most bebizonyítjuk, a

2. lemmát. Ha $f(x)$ mérhető, korlátos és maximális függvény a (0, 1) *intervallumban úgy az*

$$\{f^n(x)\} \tag{1.6}$$

függvénysorozat az L^2 térben zárt.

Bizonyítás: tegyük fel először, hogy $f(x)$ Baire-féle függvény. Jelöljön $G(x)$ bármely, a (0, 1) intervallumban korlátos Baire-féle függvényt. Tekintetbe véve, hogy $f(x)$ *maximális*, következik, hogy $f^{-1}(y)$* és így $G(f^{-1}(y))=g(y)$

* y azon értékeire, amelyek nem tartoznak $f(x)$ értékkészletéhez, legyen definíciószerűen $f^{-1}(y)=0$.

szintén korlátos Baire-féle függvények és alkalmazva az 1. lemmát $A=2$-vel $g(x)$-re és tekintetbe véve, hogy $g(f(x))=G(x)$, azt kapjuk, hogy minden pozitív ε-hoz található egy olyan $P(x)$ polinom, hogy fennáljon, hogy

$$\int_0^1 |G(x)-P(f(x))|^2\,dx<\varepsilon. \tag{1.7}$$

Minden az L^2 osztályba tartozó mérhető $F(x)$ függvényre nézve található egy oly korlátos $G(x)$ Baire-féle függvény, hogy $\int_0^1 (F(x)-G(x))^2\,dx<\varepsilon$, tehát (1.7) miatt a *2. lemma* igaz, ha $f(x)$ Baire-féle függvény. De minthogy az (1.7) integrál nem változik, ha $f(x)$ értékét egy 0 mértékű halmazon megváltoztatjuk, a 2. lemma be van bizonyítva.

Most bebizonyítjuk a következő·

1. tételt. Legyen $\{f_n(x)\}$, *korlátos, mérhető függvényeknek véges vagy megszámlálhatóan végtelen maximális rendszere a* (0, 1) *intervallumban, ebben az esetben az*

$$\{f_1^{m_1}(x)f_2^{m_2}(x)\cdots f_n^{m_n}(x)\}\qquad (0\leqq m_k;\ k=1,2,\dots n;\ n=1,2,\dots) \tag{1.8}$$

függvényrendszer az L^2 *térben teljes.*

Bizonyítás: nyilván feltételezhetjük, hogy $0\leqq f_n(x)\leqq 1$, továbbá, hogy valamennyi $f_n(x)$ függvény Baire-féle függvény. Tegyük fel most, hogy

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n(x)}{2^{2n-1}}\qquad \text{ahol } x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n(x)}{2^n} \tag{1.9}$$

x-nek diadikus kifejtése, tehát

$$\varepsilon_n(x)=\begin{cases}1 & \text{ha } \frac{1}{2}\leqq(2^{n-1}x)<1\\ 0 & \text{ha } 0\leqq(2^{n-1}x)<\frac{1}{2}\end{cases}$$

ahol (z) jelöli z tört részét. Továbbá legyen $\varphi_k(x)=\varphi_{k-1}(\varphi_1(x))$ $(k=2,3,\dots)$ és

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(f_k(x))}{2^{2^{k-1}-1}}. \tag{1.10}$$

Minthogy $\varphi_1(x)$ Baire-féle függvény, $\varphi_k(f_k(x))$ és ennélfogva $f(x)$ szintén Baire-féle függvény. Könnyű belátni tovább, hogy $f(x)$ maximális függvény*.

Tényleg, ha $N=2^{r-1}(2s-1)$, azt kapjuk hogy $\varepsilon_N(f(x))=\varepsilon_s(f_r(x))$. Így tehát, ha $x_1\neq x_2$ úgy létezik, (kivéve, ha x_1 vagy x_2 egy bizonyos 0 mértékű Z halmazhoz tartozik) r-nek legalább egy oly értéke, melyre $f_r(x_1)\neq f_r(x_2)$ és

* Egyetlen olyan valós változójú függvény bevezetése, mely akkor és csak akkor maximális, ha az (1) rendszer maximális, *A. N. Kolmogorov*nak a dolgozat bevezetésében említett gondolata.

így s-nek legalább egy olyan értéke, melyre

$$\varepsilon_N(f(x_1)) = \varepsilon_s(f_r(x_1)) \neq \varepsilon_s(f_r(x_2)) = \varepsilon_N(f(x_1))$$

ahol $N = 2^{r-1}(2s-1)$; és íly módon azt kapjuk, hogy $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ebből következik a 2. lemma alapján, hogy tetszőleges $F(x) \in L^2$ függvényre bármely $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $P(x)$ polinom, hogy

$$\int_0^1 (F(x) - P(f(x)))^2\, dx < \varepsilon. \qquad (1.11)$$

Legyen $s_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\varphi_k(f_k(x))}{2^{2^{k-1}-1}}$. Minthogy $0 \leqq f(x) \leqq 1$, $0 \leqq s_N(x) \leqq 1$ és

$$|f(x) - s_N(x)| \leqq \frac{1}{2^{2^N-2}} \qquad (1.12)$$

x minden értékére, következik, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $P(x)$ polinom, és oly N egész szám, hogy

$$\int_0^1 |F(x) - P(s_N(x))|^2\, dx < 4\varepsilon. \qquad (1.13)$$

Újból felhasználva az 1. lemmát, találhatók bármely $\delta > 0$-hoz olyan $P_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ polinomok, hogy

$$\int_0^1 |\varphi_k(f_k(x)) - P_k(f_k(x))|^4\, dx < \delta^4 \qquad (k = 1, 2, \ldots n). \qquad (1.14)$$

Bevezetve a

$$\sigma_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{P_k(f_k(x))}{2^{2^{k-1}-1}} \qquad (1.16)$$

jelölést, némi számolással adódik, hogy

$$\int_0^1 |P(s_N(x)) - P(\sigma_N(x))|^2\, dx < C\delta \qquad (1.17)$$

ahol C oly állandó, mely csak $P(x)$-től függ. Ha $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ úgy azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 |F(x) - P(\sigma_N(x))|^2\, dx < 9\varepsilon. \qquad (1.19)$$

Minthogy $P(\sigma_N(x))$

$$\sum_{m_1=0}^{M_1} \sum_{m_2=0}^{M_2} \cdots \sum_{m_N=0}^{M_N} C_{m_1 m_2 \ldots m_N} f_1^{m_1}(x) f_2^{m_2} \cdots f_N^{m_N}(x) \qquad (1.19)$$

alakú, tehát az (1.8) függvények véges lineáris kombinációja, következik, hogy az (1.8) rendszer zárt és ennek folytán az L^2 térben teljes.

2. *Néhány megjegyzés a független függvényekről*

Először bebizonyítjuk a következő

3. lemmát. Ha a független függvények $\{f_n(x)\}$ rendszere maximális, úgy függetlenség tekintetében telített.

Bizonyítás: itt is feltehetjük, hogy az $f(x)$ függvények Baire-féle függvények. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan az L^2 osztályba tartozó $g(x)$ függvény, hogy a $\{g(x), f_n(x)\}$ függvények összeségükben függetlenek. Akkor a $g(x)$ függvény független $\varphi_k(f_k(x))$-től, $(k=1,2,\ldots)$ tekintve, hogy $\varphi_k(x)$ monoton függvény; így $g(x)$ az

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(f_k(x))}{2^{2^{k-1}}-1} \tag{2. 1}$$

függvénytől is független. Így tehát az $f^n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ függvények valamennyien függetlenek $g(x)$-től és így (l. [3]), bevezetve a $\gamma=\int_0^1 g(x)\,dx$ jelölést, azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 f^n(x)(g(x)-\gamma)\,dx=\left(\int_0^1 f^n(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 (g(x)-\gamma)\,dx\right)=0 \tag{2. 2}$$

$(n=0,1,2,\ldots)$; mivel $f(x)$ maximális függvény és így az $\{f^n(x)\}$ rendszer zárt és ennélfogva teljes, tehát $g(x)-\gamma$ majdnem mindenütt 0-val egyenlő és így majdnem mindenütt $g(x)=\gamma$; ezzel a 3. lemma be van bizonyítva.

Így tehát levezettük a (2) rendszer teljes voltát egy az (1) rendszerre nézve tett feltételből (a maximalitás feltételéből), ami független függvények esetében valamivel erősebb, mint az a feltevés, hogy (1) függetlenség tekintetében telített.

Továbbra is megoldatlan marad a következő probléma: mi annak *szükséges és elégséges* feltétele (az (1) rendszerre nézve), hogy a (2) rendszer teljes legyen.

A Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] *H. Steinhaus:* La théorie et les applications des fonctions indépendantes au sens stochastique, Colloque consacré a la Théorie des Probabilités, Part V; Actualités Sci. et Ind. No. 738, Hermann, Paris 1938. 57—73.

[2] A következőkben függetlenségről beszélve ezalatt mindenkor sztochasztikus függetlenséget értünk. A mérhető *függvények* függetlenségét először *H. Steinhaus* definiálta, (l. [3]) definíciójának *A. N. Kolmogorov* definíciójával (Über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse d. Math. 1933) való egyenértékűségét, (válaszul *E. Marczewski* kérdésére) a Lebesgue mérték esetére, nemrég *S. Hartmann* (Colloquium Math. I. 1948, 19—22) bizonyította be; az általános esetben a két definíció nem egyezik meg (lásd *J. L. Doob*

ugyanott 210—217 old.). Az alatt az állítás alatt, hogy (1) független függvények rendszere, azt értjük, hogy e függvények összeségükben függetlenek, azaz nem csak páronkint függetlenek, hanem a rendszernek bármely 3, 4,... függvénye is független egymástól.

[3] *M. Kac:* Sur les fonctions indépendantes, Studia Math. *6* (1936) 46—58.

[4] *G. Ottaviani:* Sulle funzioni indipendenti, Giorn. Ist. Ital Attuari, *11* (1940) 270—282.

[5] *Rényi A.:* Sztochasztikus függetlenség és teljes függvényrendszerek. Az I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, Akadémiai Kiadó 1952, 299—308.

[6] *A. Zygmund:* Trigonometrical series, Warszawa, 1935. 13. Example 4.

[7] *A. N. Kolmogorov:* Egy tétel a feltételes várható értékek konvergenciájáról és annak néhány alkalmazása. Az I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, Akadémiai Kiadó 1952. 377—386. o.

[8] *Rényi A.: A valószínűségszámítás központi határértéktételének egy új általánosításáról.* MTA. III. Osztályának Közleményei. I. (1951) 151—355. o.