# A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ÚJ AXIOMATIKUS FELÉPÍTÉSE

RÉNYI ALFRÉD lev. tag

*Előadta az 1954. június 18-án tartott osztályülésen*

## *Bevezetés*

A valószínűségszámítás axiomatikus megalapozása, melyet A. N. KOLMOGOROV adott meg 1933-ban megjelent munkájában [1], új korszakot nyitott meg a valószínűségszámítás fejlődésében és rendkívül fejlesztőleg hatott a valószínűségszámításra és annak a különböző természettudományokban való alkalmazásaira, továbbá lehetővé tette a valószínűségszámításnak a matematika különböző fejezeteiben való alkalmazását is. Az alkalmazások során azonban felmerültek olyan problémák is, melyek vagy egyáltalán nem, vagy csak igen bonyolultan tárgyalhatók a KOLMOGOROV-féle axiomatikus felépítés kereteiben. Gondolunk itt elsősorban arra, hogy a fizikában (pl. a kvantummechanikában és másutt), továbbá a valószínűségszámítás elméleti problémáival kapcsolatban, pl. a MARKOV-láncok és a sztochasztikus folyamatok elméletében és a valószínűségszámításnak az integrálgeometriában, a számelméletben és egyebütt való alkalmazásainál gyakran előfordulnak olyan valószínűségeloszlások, amelyek „nem normálhatók"*, vagyis nem korlátos mértékek lépnek fel. Ilyen eloszlások a KOLMOGOROV-féle elméletben nem értelmezhetők: például nincsen értelme az egész $n$-dimenziós euklideszi térben egyenletes valószínűségeloszlásról beszélni; hasonlóképpen nincsen értelme annak a kijelentésnek, hogy „találomra választunk egy természetes egész számot úgy, hogy minden természetes egész szám egyenlő valószínűséggel jön tekintetbe." Első pillanatra úgy tűnik, hogy ezen nem is lehet változtatni, hiszen 1-nél nagyobb valószínűségeknek elvileg nincs értelme. Ez kétségtelenül így van, azonban itt arról van szó, hogy a szóbanforgó — valójában értelmetlen — nem-normálható eloszlások segítségével bizonyos *feltételes* valószínűségekre teljesen észszerű — a fizikai alkalmazásokban a tapasztalatokkal megegyező — értékeket nyernek. Ez az oka annak, hogy ilyen nem-létező eloszlásokat használnak és így felmerül annak a szükségessége, hogy a valószínűségszámítás elméletét oly mó-

* A fizikai szakirodalomban meghonosodott az a nem szerencsés szokás, hogy a valószínűség-eloszlások sűrűségfüggvényét nem normálják, vagyis csak egy konstans faktortól eltekintve határozzák meg. Amennyiben ennek a függvénynek az egész térre kiterjesztett integrálja véges, úgy ezzel elosztva a nem normált sűrűségfüggvényt, azt normálhatjuk, vagyis ilyen módon a tényleges sűrűségfüggvényt nyerjük. Ha azonban a „sűrűségfüggvény" integrálja nem véges, akkor „nem normálható" és így igy nem tekinthető a közönséges értelemben vett valószínűség-sűrűségfüggvénynek: az említett szokás miatt egyes szerzőknek ez néha elkerüli a figyelmét.

don fejlesszük tovább, hogy az említett számítások jogosságát (ahol az valóban fennáll) meg tudjuk alapozni.* Jelen dolgozat kísérletet jelent ebbe az irányba. Mindenekelőtt két elvi jellegű megjegyzést kívánunk tenni. Először is hangsúlyozni kívánjuk, hogy a jelen dolgozatban közölt elmélet felépítésénél nem KOLMOGOROV-tól eltérő úton járunk, hanem ugyanazon az úton igyekszünk egy szerény lépéssel tovább menni.** Axiomatikus elméletünk KOLMOGOROV elméletét mint a legfontosabb speciális esetet tartalmazza. Másik megjegyzésünk, hogy az új elmélet még igen távol áll attól, hogy befejezett, lezárt elmélet legyen; ennek ellenére, úgy hisszük, nem felesleges jelen formájában már ismertetni, mivel az új elmélet kidolgozása közben néhány olyan részleteredményre jutottunk, amelyek önmagukban — az új elmélettől elvonatkoztatva — is bizonyos érdeklődésre tarthatnak számot. Gondolunk itt például a valószínűségszámítás centrális határeloszlástételének bizonyos gyengén függő változósorozatokra való kiterjesztésére, amivel a 3. § foglalkozik, továbbá BOREL normális számokra vonatkozó tételének egy általánosítására, amelyet a 2. §-ban közlünk. További alkalmazási lehetőségeket a Markov-láncok elméletében és a sztochasztikus folyamatok elméletében a 4. §-ban említünk meg. Az 1. §-ban kifejtett elméletben az alapvető fogalom a feltételes valószínűség fogalma; ennek megfelelően módosítjuk a valószínűségszámítás KOLMOGOROV-féle axiomatikus elméletét. KOLMOGOROV elmélete, mint ismeretes, abból indul ki, hogy adva van egy tetszőleges H absztrakt halmaz, amelyet eseménytérnek nevezünk, továbbá adva van H részhalmazainak egy **T** BOREL-féle halmazteste, amely tartalmazza elemként magát a H halmazt, és amelynek elemeit eseményeknek nevezzük, végül pedig adva van egy, a **T** halmaztest elemeire értelmezett $\mathbf{P}(A)$ nem negatív és teljesen additív halmazfüggvény ($\mathbf{P}(A)$ az $A$ esemény valószínűsége), amelyre $\mathbf{P}(H) = 1$. A H halmazt a **T** halmaztesttel és a $\mathbf{P}(A)$ halmazfüggvénnyel együtt KOLMOGOROV-féle valószínűségi mezőnek nevezzük és röviden $[H, \mathbf{T}, \mathbf{P}(A)]$-val jelöljük. KOLMOGOROV elméletében az $A$ eseménynek a $B$ eseményre vonatkozó $\mathbf{P}(A|B)$ feltételes valószínűsége a

$$\mathbf{P}(A|B)\,\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB) \tag{1}$$

összefüggéssel van *definiálva* ($\mathbf{P}(B)$ ill. $\mathbf{P}(AB)$ a $B$ esemény valószínűségét,

* Többször előfordult a matematika történetében, hogy matematikailag nem szabatos eljárásoknak, melyek a fizikában beváltak, a jogosult voltát egy új matematikai elmélet kidolgozásával sikerült kimutatni. Ezt tette pl. L. SCHWARTZ a DIRAC-féle $\delta$-függvénnyel.

** Jelen dolgozatban foglaltakat előadtam 1954. jún. 28-án a Prágában rendezett matematikai statisztikai konferencián is. A konferencián résztvett B. V. GNYEGYENKO professzor, aki volt szíves közölni velem, hogy néhány évvel ezelőtt A. N. KOLMOGOROV egy előadásában felvetette azt a gondolatot, hogy kívánatos volna a valószínűségszámításnak egy olyan axiomatikus elméletét kidolgozni, amelyben a feltételes valószínűség az alapvető fogalom. A. N. KOLMOGOROV azonban erre vonatkozó gondolatait nem publikálta. B. V. GNYEGYENKONAK ebből a közléséből utólag értesültem, hogy az általam kidolgozott és jelen dolgozatban foglalt axiomatikus elmélet nemcsak, hogy KOLMOGOROV elméletének logikus továbbfejlesztése (aminek előzőleg is tudatában voltam), hanem olyan úton jár, amelyet maga KOLMOGOROV jelölt ki.

illetve $A$ és $B$ együttes bekövetkezésének valószínűségét jelöli). Az (1) összefüggés a valószínűségszámítás KOLMOGOROV előtti elméletében *tétel*ként szerepelt. Ugyanez az összefüggés, kissé általánosított formában, az 1. §-ban kifejtett elméletben mint *axióma* szerepel.*

Az 1. §-ban közölt axiómarendszer a $\mathbf{P}(A|B)$ feltételes valószínűségre, tehát egy kétváltozós halmazfüggvényre vonatkozik. Természetszerűleg felmerül a kérdés, milyen feltételek mellett állítható elő ez a függvény a $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}^*(AB)}{\mathbf{P}^*(B)}$ alakban egy $\mathbf{P}^*(C)$ egyváltozós halmazfüggvény segítségével ($AB$ az $A$ és $B$ halmazok közös részét jelenti). Erre a kérdésre válaszolnak — bizonyos feltételek mellett — a 13. és 14. tételek. Ezeken túlmenőleg a kérdést CSÁSZÁR ÁKOS messzemenően tisztázta és erre vonatkozólag szükséges és elégséges feltételeket adott meg.

Arra, hogy nem normálható valószínűségi mezők előfordulnak az alkalmazásokban és ezekre vonatkozólag a valószínűségszámítás egyes tételei átvihetők, az utóbbi időben több szerző (pl. DOOB [3] 80. o.) rámutatott, de nem vonta le ennek a konzekvenciáit.

Feltételes valószínűségekre vonatkozó axiómarendszert tudomásom szerint H. REICHENBACH [15] adott meg elsőnek; az ő axiómarendszere azonban egyrészt nem halmazelméleti, hanem logikai jellegű (eseményeknek nem halmazokat, hanem állításokat feleltet meg), másrészt nála a teljes additivitás nincs feltéve és elmélete erősen MISES hatása alatt áll. Ennek következtében a valószínűségszámítás szabatos matematikai megalapozására REICHENBACH elmélete nem alkalmas; ezt csak KOLMOGOROV elmélete képes megadni. Éppen ezért dolgozatunkban KOLMOGOROV elméletét követtük, és azt igyekeztünk egy újabb lépéssel továbbfejleszteni. Ugyanakkor REICHENBACH elméletében a feltételes valószínűség csak formálisan primér fogalom, ugyanis olyan eseteket, ahol közönséges valószínűségekről nem is lehet beszélni, REICHENBACH nem tárgyal. Ez vonatkozik tudomásunk szerint az összes többi szerzőre is, akik a feltételes valószínűség fogalmát axiomatikusan vezették be.

Az 1. §-ban közöljük az axiómákat, és azok közvetlen következményeivel foglalkozunk. A 2. § a nagy számok törvényeinek általánosításával foglalkozik; ez a fejezet fényt vet a feltételes valószínűség és a feltételes relatív gyakoriság kapcsolatára, és ezen keresztül az axiómáknak a valósághoz való viszonyára. A 3. § a centrális határeloszlástétel általánosításával, a 4. § az új elméletnek a MARKOV-féle láncok és a sztochasztikus folyamatok elméletében való alkalmazásával foglalkozik. Az elmélet további kidolgozására vissza kívánunk még térni.

* A matematika történetében nem ez az első eset, hogy tételek idővel axiómákká válnak; gondoljunk pl. a DESARGUES- ill. PASCAL-féle tételekre (a geometria HILBERT-féle axiomatikus felépítésében) vagy PTOLEMAEUS tételére (a metrikus terek elméletében).

CSÁSZÁR ÁKOS és LIPTÁK TAMÁS voltak szívesek a dolgozatot átnézni és több értékes megjegyzést tettek, amelyekért ez úton is köszönetet mondok.

Kívánatos volna a valószínűségszámítás olyan tankönyvének megírása, amely konzekvensen a jelen dolgozatban foglalt elméletre épül fel. Jelen dolgozat szerzője tervbevette, hogy „Valószínűségszámítás" c. tankönyvét [5] egy későbbi időpontban ilyen értelemben átdolgozza.

## *1. §. Az axiómarendszer és közvetlen következményei.*

A következőkben ha $A$ és $B$ két halmaz, egyesítésüket $A+B$-vel, közös részüket $AB$-vel, az $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ halmazok egyesített halmazát $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$-nel jelöljük, az üres halmazt $O$ jelöli, az $A$ és $B$ halmazok halmazelméleti különbségét, tehát $A$ azon elemeinek halmazát, melyek $B$-nek nem elemei, $A-B$-vel jelöljük; azt, hogy az $A$ halmaz részhalmaza $B$-nek, a következőképpen jelöljük: $A \subseteq B$. A következő definíciókból és axiómákból indulunk ki:

*Legyen adva egy* $H$ *halmaz, melyet eseménytérnek nevezünk, továbbá* $H$ *részhalmazainak egy* $\mathbf{T}_1$ BOREL*-féle halmazteste, melynek elemeit nagy betűkkel:* $A, B, C \ldots$*-vel jelöljük, és eseményeknek nevezzük.* $A$ $H-A$ *halmazt* $\bar{A}$*-sal jelöljük; feltételezzük, hogy* $H \in \mathbf{T}_1$; *legyen továbbá adva egy* $\mathbf{T}_2$ *halmazrendszer, amely* $\mathbf{T}_1$*-nek része, és tegyük fel, hogy értelmezve van egy* $\mathbf{P}(A|B)$ *kétváltozós halmazfüggvény, hacsak* $A \in \mathbf{T}_1$ *és* $B \in \mathbf{T}_2$. *A* $\mathbf{P}(A|B)$ *számot az* $A$ *eseménynek a* $B$ *eseményre, mint feltételre vonatkozó feltételes valószínűségének nevezzük.*

Tegyük fel, hogy teljesülnek a következő axiómák:

I. $\mathbf{P}(A|B) \geqq 0$ *és* $\mathbf{P}(B|B) = 1$, *ha* $A \in \mathbf{T}_1$ *és* $B \in \mathbf{T}_2$.

II. $\mathbf{P}(A|B)$ *rögzített,* $\mathbf{T}_2$*-höz tartozó* $B$ *mellett az* $A \in \mathbf{T}_1$ *halmaznak teljesen additív halmazfüggvénye, vagyis, ha* $A_k \in \mathbf{T}_1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *és* $A_j A_k = 0$ *ha* $j \neq k$ $(j, k = 1, 2, \ldots)$, *akkor*

$$\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \middle| B\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k|B).$$

III. $\mathbf{P}(A|BC)\,\mathbf{P}(B|C) = \mathbf{P}(AB|C)$, *ha* $A \in \mathbf{T}_1$, $B \in \mathbf{T}_1$, $C \in \mathbf{T}_2$ *és* $BC \in \mathbf{T}_2$.

*Az* I. II. *és* III. *axiómák teljesülése esetén a* $H$ *eseményteret a* $\mathbf{T}_1$ BOREL*-halmaztesttel és a* $\mathbf{T}_2$ *halmazrendszerrel, valamint az azokon értelmezett* $\mathbf{P}(A|B)$ *kétváltozós halmazfüggvénnyel együtt feltételes valószínűségi mezőnek nevezzük és röviden* $[H, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$*-vel jelöljük.*

Nyilvánvaló, hogy ha $\mathbf{P}^*(A)$ egy, a $\mathbf{T}_1$ BOREL-féle halmaztesten értelmezett teljesen additív és nemnegatív halmazfüggvény, melyre $\mathbf{P}^*(H) = 1$, vagyis ha $[H, \mathbf{T}_1, \mathbf{P}^*(A)]$ egy KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező és $\mathbf{P}^*(A|B) = \frac{\mathbf{P}^*(AB)}{\mathbf{P}^*(B)}$, hacsak $\mathbf{P}^*(B) > 0$, akkor $\mathbf{T}_2^*$-gal jelölve $\mathbf{T}_1$ azon $B$ elemeinek halmazát, amelyekre $\mathbf{P}^*(B) > 0$, egy $[H, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2^*, \mathbf{P}^*(A|B)]$ feltételes valószínű-

ségi mezőt nyerünk, amelyet a $[H, \mathbf{T}_1, \mathbf{P}^*(A)]$ KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező által generált feltételes valószínűségi mezőnek nevezünk.

Néhány egyszerű tételt fogunk bebizonyítani. Mindig, amikor a tételekben bizonyos $A$ ill. $B$ halmazokra $\mathbf{P}(A|B)$ szerepel, feltesszük, hogy $A \in \mathbf{T}_1$ és $B \in \mathbf{T}_2$.

1. TÉTEL:

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(AB|B).$$

BIZONYÍTÁS: Legyen III-ban $C = B$, akkor I-ből az 1. tétel állítása azonnal következik, figyelembe véve, hogy $BB = B$.

2. TÉTEL. *Ha* $B \subseteq B'$, *akkor* $\mathbf{P}(AB'|B) = \mathbf{P}(A|B)$.

BIZONYÍTÁS. Az 1. tétel kétszeri alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}(AB'|B) = \mathbf{P}(AB'B|B) = \mathbf{P}(AB|B) = \mathbf{P}(A|B).$$

3. TÉTEL:

$$\mathbf{P}(A|B) \leqq 1.$$

BIZONYÍTÁS: Az 1. tétel szerint $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(AB|B)$; II. szerint $\mathbf{P}(AB|B) + \mathbf{P}(\bar{A}B|B) = \mathbf{P}(B|B)$, mivel $AB + \bar{A}B = B$ és $AB \cdot \bar{A}B = O$; tekintve, hogy I. szerint $\mathbf{P}(\bar{A}B|B) \geqq 0$ és $\mathbf{P}(B|B) = 1$, a 3. tétel állítása következik.

4. TÉTEL:

$$\mathbf{P}(O|B) = 0.$$

BIZONYITÁS: II. szerint $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A + O|B) = \mathbf{P}(A|B) + \mathbf{P}(O|B)$ és így $\mathbf{P}(O|B) = 0$.

5. TÉLEL: *Ha* $AB = O$, *akkor* $\mathbf{P}(A|B) = 0$.

BIZONYÍTÁS: Az 1. tétel szerint $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(AB|B)$, tehát ha $AB = O$, akkor $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(AB|B) = \mathbf{P}(O|B)$ és így a 4. tétel szerint $\mathbf{P}(A|B) = 0$.

6. TÉTEL: *Ha* $A \subseteq B \subseteq C$, *akkor*

$$\mathbf{P}(A|B) \geqq \mathbf{P}(A|C).$$

BIZONYÍTÁS: a III. axióma szerint

$$\mathbf{P}(A|BC)\mathbf{P}(B|C) = \mathbf{P}(AB|C).$$

Mivel itt $BC = B$ és $AB = A$, következik, hogy

$$\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B|C) = \mathbf{P}(A|C),$$

s így a 3. tétel szerint valóban

$$\mathbf{P}(A|B) \geqq \mathbf{P}(A|C).$$

KOROLLÁRIUM: tetszőleges $A \in \mathbf{T}_1$ esetén, hacsak $AC \subseteq B \subseteq C$,

$$\mathbf{P}(A|B) \geqq \mathbf{P}(A|C).$$

BIZONYÍTÁS: minthogy ekkor $AB = AC$, a fenti reláció az 1. tételen keresztül közvetlenül következik a 6. tételből.

7. TÉTEL:

$$\mathbf{P}(A|BC)\mathbf{P}(B|C) = \mathbf{P}(B|AC)\mathbf{P}(AC).$$

BIZONYÍTÁS: A 7. tétel közvetlenül következik III-ból, ha abban $A$ és $B$ szerepét felcseréljük és a kapott relációk baloldalait összevetjük (természetesen a 7. tétel csak abban az esetben érvényes, ha nemcsak $C$ és $BC$, hanem $AC$ is $\mathbf{T}_2$-höz tartozik).

8. TÉTEL: $\mathbf{P}(H|B) = 1$.

BIZONYÍTÁS: $\mathbf{P}(H|B) = \mathbf{P}(HB|B) = \mathbf{P}(B|B) = 1$ az 1. tétel és I. következtében.

9. TÉTEL: *Ha* $A_1 \subseteq B_1B_2$ *és* $A_2 \subseteq B_1B_2$, *továbbá* $B_1 \in \mathbf{T}_2$, $B_2 \in \mathbf{T}_2$ *és* $B_1B_2 \in \mathbf{T}_2$, *akkor* *

(1) $$\mathbf{P}(A_1|B_1)\mathbf{P}(A_2|B_2) = \mathbf{P}(A_1|B_2)\mathbf{P}(A_2|B_1).$$

BIZONYÍTÁS:

(2) $$\mathbf{P}(A_1|B_1B_2)\mathbf{P}(B_1|B_2) = \mathbf{P}(A_1B_1|B_2) = \mathbf{P}(A_1|B_2)$$

és

(3) $$\mathbf{P}(A_2|B_1B_2)\mathbf{P}(B_1|B_2) = \mathbf{P}(A_2B_1|B_2) = \mathbf{P}(A_2|B_2).$$

Szorítkozhatunk arra az esetre, amikor $\mathbf{P}(A_1|B_1B_2) > 0$ és $\mathbf{P}(A_2|B_1B_2) > 0$, továbbá $\mathbf{P}(B_1|B_2) > 0$ és $\mathbf{P}(B_2|B_1) > 0$; ellenkező esetben ugyanis (1) mindkét oldalán 0 áll. Ez esetben a (2) és (3) egyenlőséget elosztva egymással, nyerjük, hogy

(4) $$\frac{\mathbf{P}(A_1|B_2)}{\mathbf{P}(A_2|B_2)} = \frac{\mathbf{P}(A_1|B_1B_2)}{\mathbf{P}(A_2|B_1B_2)}.$$

Hasonlóan következik, $B_1$ és $B_2$ szerepét felcserélve, hogy

(5) $$\frac{\mathbf{P}(A_1|B_1)}{\mathbf{P}(A_2|B_1)} = \frac{\mathbf{P}(A_1|B_1B_2)}{\mathbf{P}(A_2|B_1B_2)},$$

és így (4) és (5)-ből kapjuk, hogy

$$\frac{\mathbf{P}(A_1|B_2)}{\mathbf{P}(A_2|B_2)} = \frac{\mathbf{P}(A_1|B_1)}{\mathbf{P}(A_2|B_1)}.$$

Ezzel a 9. tételt bebizonyítottuk.

10. TÉTEL: *Ha a* $C \in \mathbf{T}_2$ *halmazt rögzítjük, akkor a* $\mathbf{T}_1$ *halmaztest elemei az azokon értelmezett* $\mathbf{P}^*(A) = \mathbf{P}(A|C)$ *halmazfüggvénnyel egy* KOLMOGOROV-*féle valószínűségi mezőt alkotnak. Ha* $B$ $\mathbf{T}_1$*-nek olyan eleme, amelyre* $\mathbf{P}^*(B) > 0$, *továbbá* $BC \in \mathbf{T}_2$, *akkor ebben a valószínűségi mezőben értelmezve (a szokásos*

* Ha $\mathbf{P}(A_2|B_1)$ és $\mathbf{P}(A_2|B_2)$ pozitívek. (1)-et a következő áttekinthetőbb alakba írhatjuk:

(1*) $$\mathbf{P}(A_1|B_1):\mathbf{P}(A_2|B_1) = \mathbf{P}(A_1|B_2):\mathbf{P}(A_2|B_2)$$

*módon) a* $\mathbf{P}^*(A|B)=\frac{\mathbf{P}^*(AB)}{\mathbf{P}^*(B)}$ *feltételes valószínűséget,* $\mathbf{P}^*(A|B)$ *megegyezik* $\mathbf{P}(A|BC)$*-vel.*

BIZONYÍTÁS: A tétel első állítása nyilvánvaló; hiszen $\mathbf{P}^*(A)$ nemnegatív és teljesen additív halmazfüggvény, amelyre a 9. tétel szerint $\mathbf{P}^*(\mathsf{H})=1$. A tétel második állítása III. egyenes következménye, hiszen III. szerint

$$\mathbf{P}^*(A|B)=\frac{\mathbf{P}^*(AB)}{\mathbf{P}^*(B)}=\frac{\mathbf{P}(AB|C)}{\mathbf{P}(B|C)}=\mathbf{P}(A|BC).$$

11. TÉTEL. *Ha* $\mathsf{H}\in\mathbf{T}_2$, *akkor a* $\mathbf{T}_1$ *halmaztest a* $\mathbf{P}^*(A)=\mathbf{P}(A|\mathsf{H})$ *halmazfüggvénnyel* KOLMOGOROV*-féle valószínűségi mezőt alkot és* $\mathbf{P}(A|B)=\frac{\mathbf{P}^*(AB)}{\mathbf{P}^*(B)}$, *hacsak* $\mathbf{P}^*(B)>0$.

MEGJEGYZÉS. Lehetséges, hogy $\mathbf{T}_2$ olyan $B$ halmazokat is tartalmaz, amelyekre $\mathbf{P}^*(B)=0$, viszont $\mathbf{T}_2$ nem feltétlenül tartalmazza mindazokat a $B$ halmazokat, amelyekre $\mathbf{P}^*(B)>0$, tehát $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ nem szükségképpen azonos a $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{P}^*(A)]$ KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező által generált feltételes valószínűségi mezővel.

BIZONYÍTÁS: A 11. tétel a 10. tétel speciális esete.

Szükségünk lesz még a következő tételre, amely a teljes valószínűség tételének megfelelője.

12. TÉTEL: *Ha* $C\subseteq\sum_{k=1}^{\infty}B_k=B$ *és* $ACB_jB_k=\bigcirc$, *ha* $j\neq k$ $(j,k=1,2,\ldots)$, *akkor*

$$\mathbf{P}(A|C)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(A|B_kC)\mathbf{P}(B_k|C),$$

*feltéve, hogy* $C\in\mathbf{T}_2$ *és* $B_kC\in\mathbf{T}_2$ $(k=1,2,\ldots)$.

BIZONYÍTÁS: III. szerint

$$\mathbf{P}(A|B_kC)\mathbf{P}(B_k|C)=\mathbf{P}(AB_k|C),$$

és így

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(A|B_kC)\mathbf{P}(B_k|C)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(AB_k|C)=\mathbf{P}\left(A\sum_{k=1}^{\infty}B_k|C\right)=\mathbf{P}(ABC|C)=\mathbf{P}(A|C).$$

Most elégséges feltételt adunk arra, hogy a $\mathbf{P}(A|B)$ kétváltozós halmazfüggvény mikor állítható elő $\frac{\mathbf{Q}(AB)}{\mathbf{Q}(B)}$ alakban valamely egyváltozós $\mathbf{Q}(C)$ halmazfüggvény segítségével.

13. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy* $\mathbf{T}_2$*-ben megadható egy olyan* $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$ *halmazsorozat, hogy*

1. $B_0\subseteq B_1\subseteq B_2\subseteq\cdots\subseteq B_n\subseteq\cdots$;
2. $\mathbf{P}(B_0|B_n)>0$ $(n=1,2,\ldots)$;
3. $\mathbf{T}_2$ *minden* $B$ *eleméhez van olyan* $B_n$, *hogy* $B\subseteq B_n$ *és* $\mathbf{P}(B|B_n)>0$.

*Az* 1.—3. *feltételek mellett létezik egy olyan nemnegatív és teljesen additív** $\mathbf{Q}(C)$ *halmazfüggvény, melynek értelmezési tartománya* $\mathbf{T}_1$ *mindazon* $C$ *elemeiből áll, melyekhez van olyan* $B_n$, *amelyre* $C \subseteq B_n$; *ezenkívül* $\mathbf{T}_2$ *minden* $B$ *elemére* $\mathbf{Q}(B) > 0$ *és a* $\mathbf{P}(A|B)$ *kétváltozós halmazfüggvény* $\mathbf{Q}(C)$ *segítségével kifejezhető a*

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{Q}(AB)}{\mathbf{Q}(B)}$$

*alakban.*

BIZONYÍTÁS: Jelöljük $\mathbf{T}_3$-mal azoknak a $C \in \mathbf{T}_1$ halmazoknak az összességét, amelyekhez van olyan $B_n$, hogy $C \subseteq B_n$. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{T}_2 \subseteq \mathbf{T}_3 \subseteq \mathbf{T}_1$. Legyen $A \in \mathbf{T}_3$ és legyen $n$ egy olyan egész szám, amelyre $A \subseteq B_n$; definiáljuk $\mathbf{Q}(A)$ értékét a következőképpen:

$$\mathbf{Q}(A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_n)}{\mathbf{P}(B_0|B_n)}. \tag{6}$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{Q}(A)$ definíciója nem függ $n$ értékének választásától, ugyanis, ha $A \subseteq B_n \subseteq B_m$, akkor III.-ból következik, hogy

$$\mathbf{P}(A|B_nB_m)\mathbf{P}(B_n|B_m) = \mathbf{P}(AB_n|B_m)$$

és

$$\mathbf{P}(B_0|B_nB_m)\mathbf{P}(B_n|B_m) = \mathbf{P}(B_0B_n|B_m).$$

Figyelembe véve, hogy $AB_n = A$ és $B_0B_n = B_0$, továbbá, hogy $B_nB_m = B_n$, nyerjük, hogy

$$\mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n|B_m) = \mathbf{P}(A|B_m) \tag{7}$$

és

$$\mathbf{P}(B_0|B_n)\mathbf{P}(B_n|B_m) = \mathbf{P}(B_0|B_m). \tag{8}$$

Mivel feltevésünk szerint $\mathbf{P}(B_0|B_n) > 0$, oszthatjuk egymással a (7) és (8) egyenleteket, és így nyerjük, hogy

$$\frac{\mathbf{P}(A|B_n)}{\mathbf{P}(B_0|B_n)} = \frac{\mathbf{P}(A|B_m)}{\mathbf{P}(B_0|B_m)},$$

amit bizonyítani akartunk. A (6) alatt definiált $\mathbf{Q}(A)$ halmazfüggvényre valóban teljesül a $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{Q}(AB)}{\mathbf{Q}(B)}$ előállítás. Ugyanis (6)-ból, ha $B \subseteq B_n$ és $\mathbf{P}(B|B_n) > 0$, akkor $AB \subseteq B_n$ és így

$$\frac{\mathbf{Q}(AB)}{\mathbf{Q}(B)} = \frac{\mathbf{P}(AB|B_n)}{\mathbf{P}(B_0|B_n)} \cdot \frac{\mathbf{P}(B_0|B_n)}{\mathbf{P}(B|B_n)} = \frac{\mathbf{P}(AB|B_n)}{\mathbf{P}(B|B_n)},$$

* Itt és a következőkben, ha egy $\mathbf{Q}(A)$ halmazfüggvényről azt mondjuk, hogy teljesen additív ezen azt értjük, hogy ha $A_iA_j = O$, ha $i \neq j$ és az $A_i$ halmazokra valamint a $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = A$ halmazra $\mathbf{Q}(A)$ értelmezve van, akkor $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{Q}(A_i) = \mathbf{Q}(A)$.

s ebből a III. axióma és a $B \subseteq B_n$ reláció alkalmazásával kapjuk a kívánt előállítást. Könnyen beláthatjuk azt is, hogy $\mathbf{Q}(A)$ teljesen additív halmazfüggvény és hogy $\mathbf{Q}(B) > 0$, ha $B \in \mathbf{T}_2$. Ezzel a 13. tétel be van bizonyítva.

Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} B_n = \mathsf{H}^*$. A 13. tétel feltevéseiből következik, hogy minden $\mathbf{T}_2$-höz tartozó $B$ halmazra $B \subseteq \mathsf{H}^*$, ennélfogva a 2. tétel szerint

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A\mathsf{H}^*|B) = \mathbf{P}(A\mathsf{H}^*|B\mathsf{H}^*).$$

Ezért, ha $\mathsf{H}^*$ nem volna azonos $\mathsf{H}$-val, tekinthetnénk azt, az adott feltételes valószínűségi mezővel izomorf mezőt, amelyben $A$-nak $A\mathsf{H}^*$ és $B$-nek $B\mathsf{H}^*$ felel meg, és amelyben már teljesül, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ a teljes eseménytérrel azonos. Ezért nem jelent megszorítást, ha feltesszük, hogy $\mathsf{H}^* = \mathsf{H}$. Ez esetben $\mathbf{Q}(A)$ a $\mathbf{T}_3$ halmazrendszerben értelmezett teljesen additív és $\sigma$-véges mérték, hiszen $\mathsf{H}$ befedhető a $B_n\bar{B}_{n-1}$ halmazokkal, és $\mathbf{Q}(B_n\bar{B}_{n-1})$ véges. $\mathbf{T}_3$ nyilvánvalóan halmaztest, azonban nem szükségképpen BOREL-féle halmaztest. Legyen $\mathbf{T}_4$ a $\mathbf{T}_3$ halmaztest legszűkebb BOREL-féle bővítése. Egy ismert tétel szerint (l. [2] III. §. 13. 1. tétel) $\mathbf{Q}(A)$ értelmezése kiterjeszthető $\mathbf{T}_4$-re oly módon, hogy teljesen additív, nemnegatív és $\sigma$-véges maradjon. Az így kiterjesztett halmazfüggvényt továbbra is $\mathbf{Q}(A)$-val jelöljük. Mivel $\mathbf{T}_4$ tartalmazza a $\sum_{n=0}^{\infty} B_n = \mathsf{H}$ halmazt is, két eset lehetséges: vagy $\mathbf{Q}(\mathsf{H}) < +\infty$, vagy $\mathbf{Q}(\mathsf{H}) = +\infty$. Mindkét esetben $\mathbf{Q}(\mathsf{H}) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{Q}(B_n)$. Mivel $\mathbf{Q}(B_n) \leq \mathbf{Q}(B_{n+1})$, tehát $\mathbf{Q}(\mathsf{H}) < \infty$ vagy $\mathbf{Q}(\mathsf{H}) = \infty$ aszerint, hogy $\mathbf{Q}(B_n)$ korlátos, vagy sem. Mivel továbbá $\mathbf{Q}(B_n) = \dfrac{\mathbf{P}(B_n|B_n)}{\mathbf{P}(B_0|B_n)} = \dfrac{1}{\mathbf{P}(B_0|B_n)}$, tehát $\mathbf{Q}(B_n)$ korlátos vagy nem, aszerint, hogy a $\mathbf{P}(B_0|B_n)$ monoton csökkenő sorozatnak a határértéke pozitív, vagy 0. Könnyen belátható továbbá, hogy $\mathbf{T}_4$ azonos $\mathbf{T}_1$-gyel. Ugyanis $\mathbf{T}_3 \subseteq \mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_1$ BOREL-féle halmaztest, tehát mindenesetre $\mathbf{T}_4 \subseteq \mathbf{T}_1$. Másrészt legyen $A$ egy tetszőleges eleme $\mathbf{T}_1$-nek, akkor

$$A = A\mathsf{H} = A\sum_{n=0}^{\infty} B_n = \sum_{n=0}^{\infty} AB_n\bar{B}_{n-1},$$

(itt $B_{-1} = O$ per def.) és így, mivel az $AB_n\bar{B}_{n-1} = (A\bar{B}_{n-1})B_n$ halmazok mind $\mathbf{T}_3$-hoz tartoznak, az $A$ halmaz $\mathbf{T}_4$-hez tartozik; tehát $\mathbf{T}_1 \subseteq \mathbf{T}_4$, vagyis $\mathbf{T}_1 \equiv \mathbf{T}_4$. Jelentse $\mathbf{T}_2^*$ azoknak a $\mathbf{T}_1$-hez tartozó $B$ halmazoknak az összességét, amelyekre $\mathbf{Q}(B) > 0$. Mivel a 13. tétel szerint $\mathbf{T}_2$ minden $B$ elemére $\mathbf{Q}(B) > 0$, tehát $\mathbf{T}_2 \subseteq \mathbf{T}_2^*$. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{P}(A|B)$ értelmezése kiterjeszthető bármely, a $\mathbf{T}_2^*$ rendszerhez tartozó $B$ halmazra is a következőképpen: ha $B \in \mathbf{T}_2^*$, legyen $\mathbf{P}(A|B) = \dfrac{\mathbf{Q}(AB)}{\mathbf{Q}(B)}$. Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor $\mathbf{Q}(\mathsf{H}) < \infty$; bevezetve a $\mathbf{P}^*(A) = \dfrac{\mathbf{Q}(A)}{\mathbf{Q}(\mathsf{H})}$ jelölést, nyilvánvalóan fennáll a következő összefüggés:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}^*(AB)}{\mathbf{P}^*(B)},$$

ahol $\mathbf{P}^*(A)$ a $\mathbf{T}_4 \equiv \mathbf{T}_1$ BOREL-féle halmaztesten értelmezett mérték, melyre $\mathbf{P}^*(\mathsf{H}) = 1$. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

14. TÉTEL. *Ha fennállnak a 13. tétel feltételei és ezen kívül teljesülnek a következő feltevések:*

4) $$\sum_{n=0}^{\infty} B_n = \mathsf{H},$$

5) $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_0|B_n) > 0,$$

*akkor megadható olyan, a $\mathbf{T}_1$-en értelmezett $\mathbf{P}^*(A)$ mérték, amelyre $\mathbf{P}^*(\mathsf{H}) = 1$, és amelynek segítségével $\mathbf{P}(A|B)$ a következőképpen állítható elő:*

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}^*(AB)}{\mathbf{P}^*(B)}.$$

*Ugyanezen összefüggés segítségével, $\mathbf{T}_2^*$-gal jelölve azon halmazok összességét, amelyekre $\mathbf{P}^*(B) > 0$, $\mathbf{P}(A|B)$ értelmezése kiterjeszthető arra az esetre, amikor $B \in \mathbf{T}_2^*$. Az ilyenmódon nyert $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2^*, \mathbf{P}(A|B)]$ feltételes valószínűségi mező azonos a $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{P}^*(A)]$* KOLMOGOROV*-féle valószínűségi mező által generált feltételes valószínűségi mezővel.*

Jelentse most $a$ a H halmaz egy tetszőleges elemét és legyen $\xi = \xi(a)$ egy a H halmazon értelmezett valós értékű függvény, amely $\mathbf{T}_1$-re vonatkozólag mérhető, vagyis amelyre azon $a$ elemek $A_x$ halmaza, amelyekre $\xi(a) < x$, ahol $x$ egy tetszőleges valós szám, $\mathbf{T}_1$-hez tartozik. Egy ilyen $\xi = \xi(a)$ függvényt valószínűségi változónak nevezünk. Nyilván $\mathbf{T}_1$-hez tartoznak mindazon $A\mathfrak{B}$ halmazok is, amelyek H azon $a$ elemeiből állnak, amelyekre $\xi(a) \in \mathfrak{B}$, ahol $\mathfrak{B}$ egy tetszőleges BOREL-halmaz a számegyenesen. Nyilvánvaló, hogy $\xi(a)$ egy feltételes valószínűségi mezőt indukál a számegyenesen: ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ két BOREL-halmaz a számegyenesen és $\mathfrak{A}$-nak (ill. $\mathfrak{B}$-nek) $\xi(a)$-ra vonatkozó „ősképe", vagyis azon $a$ elemek halmaza, melyekre $\xi(a) \in \mathfrak{A}$ (ill. $\xi(a) \in \mathfrak{B}$) $\mathbf{T}_1$-hez (illetve $\mathbf{T}_2$-höz) tartozik, akkor a

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) = \mathbf{P}(A|B)$$

összefüggéssel definiált halmazfüggvény (ahol $A$ a $\xi(a) \in \mathfrak{A}$ és $B$ a $\xi(a) \in \mathfrak{B}$ feltételeknek eleget tevő $a$ elemek halmaza), eleget tesz az I.—III. axiómáknak. Ha $\mathfrak{B}$ olyan halmaz, amelynek ősképe $\mathbf{T}_2$-höz tartozik és $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_x$ a $(-\infty, x)$ intervallum, úgy a $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}_x|\mathfrak{B}) = F(x|B)$ függvényt a $\xi$ valószínűségi változó feltételes eloszlásfüggvényének nevezzük, a $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})$ kétváltozós halmazfüggvényt pedig $\xi$ feltételes valószínűségeloszlás-rendszerének. Hasonlóképpen értelmezhető a H téren egy $n$-dimenziós $\vec{\xi} = (\xi_1(a), \xi_2(a), \ldots, \xi_n(a))$ valószínűségi vektorváltozó, amelyről tehát azt tesszük fel, hogy a H térnek mérhető leképezését létesíti az $\mathfrak{R}_n$ $n$-dimenziós euklideszi térre. Ha H maga az $\mathfrak{R}_n$

$n$-dimenziós euklideszi tér és $\mathbf{T}_1$ tartalmazza $\mathfrak{R}_n$ összes BOREL-halmazait, úgy a $\xi(a) = a$ függvény, amely az $\mathfrak{R}_n$ teret azonosan képezi le önmagára, szintén valószínűségi változó és így $\mathbf{P}(A|B)$ nem más, mint a $\xi(a) = a$ változó feltételes valószínűségeloszlás rendszere. Ennélfogva ebben az esetben feltételes valószínűségi mező helyett feltételes valószínűségeloszlás rendszerről fogunk beszélni. Ezt a kifejezést általánosabb értelemben is használni fogjuk.

Nyilvánvaló, hogy két valószínűségi változóra vonatkozólag értelmezhető a *feltételes függetlenség* fogalma: a $\xi = \xi(a)$ és $\eta = \eta(a)$ valószínűségi változókat a $C$ feltételre $(C \in \mathbf{T}_2)$ vonatkozólag függetlennek nevezzük, ha $\mathbf{P}(A_x B_y|C) = \mathbf{P}(A_x|C)\mathbf{P}(B_y|C)$, $x$ és $y$ minden valós értékére, ahol $A_x$ jelenti a $\xi(a) < x$ és $B_y$ az $\eta(a) < y$ feltételekkel definiált halmazt. Hasonlóképpen értelmezhető több valószínűségi változó függetlensége is.

*A* $\xi(a)$ valószínűségi változó $B$-re $(B \in \mathbf{T}_2)$ vonatkozó *feltételes várható értékét* a következőképpen definiáljuk:

$$\mathbf{M}(\xi|B) = \int_{H} \xi(a)\, d\mathbf{P}(A|B) \tag{9}$$

ahol (9) jobboldalán a rögzített $B$ mellett vett $\mathbf{P}(A|B)$ mértékre vonatkozó LEBESGUE-integrál áll. Hasonlóképpen értelmezhető a *feltételes szórás*, a *feltételes magasabb momentumok*, $\xi$ *feltételes eloszlásának karakterisztikus függvénye*, stb.

Vannak a valószínűségszámításnak olyan tételei, amelyek érvényesek abban az esetben is, ha $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(A)$ egy nem normálható mérték. Ha ugyanis $\mathbf{Q}(A)$ egy tetszőleges mérték, akkor be lehet vezetni az

$$\mathfrak{J}(\xi|H) = \int_{H} \xi(a)\, d\mathbf{Q}$$

integrált és $\mathfrak{J}(\xi|H)$-ra hasonló tételek érvényesek, mint a várható értékre (l. pl. [3] 80. o.). Ezzel a fogalommal mi itt nem foglalkozunk.

Vizsgáljunk most meg néhány példát:

1. Legyen H az $\mathfrak{R}_n$ euklideszi tér, H pontjait jelöljük $x$-szel, $(x = (x_1, x_2, \ldots, x_n))$; legyen $\mathbf{T}_1$ a $H = \mathfrak{R}_n$ tér mérhető részhalmazainak összessége, legyen $f(x)$ egy mérhető, nemnegatív függvény $H = \mathfrak{R}_n$-ben, amely $\mathfrak{R}_n$ minden korlátos résztartományában integrálható; jelentse $\mathbf{T}_2$ az $\mathfrak{R}_n$ azon mérhető $\mathfrak{B}$ részhalmazainak összességét, amelyekre $\int_{\mathfrak{B}} f(x)\, d(x)$ pozitív és véges, és legyen

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) = \frac{\int_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} f(x)\, dx}{\int_{\mathfrak{B}} f(x)\, dx},$$

akkor $[\mathfrak{R}_n, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathfrak{F}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})]$ egy feltételes valószínűségi mező. Ha $\int_{\mathfrak{R}_n} f(x)\, dx < \infty$, akkor egy KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező által generált feltételes

valószínűségi mezőt nyerünk, ezzel szemben, ha $\int_{\mathcal{R}_n} f(x)dx = \infty$, akkor nem. Speciálisan, ha $f(x) \equiv 1$, akkor a kapott feltételes valószínűségeloszlás rendszert az egész $\mathcal{R}_n$ térben egyenletes feltételes eloszlásrendszernek nevezzük; ez esetben

$$\mathfrak{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{m(\mathcal{A}\mathcal{B})}{m(\mathcal{B})},$$

ahol $m(C)$ a $C$ halmaz LEBESGUE-féle mértékét jelöli.

2. Legyen H a természetes számok halmaza, $\mathbf{T}_1$ H összes részhalmazainak összessége, $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ egy tetszőleges, nemnegatív számokból álló számsorozat, továbbá $\mathbf{T}_2$ álljon H összes olyan $B$ részhalmazaiból, amelyekre $\sum_{k \in B} p_k$ pozitív, és véges, és legyen

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\sum_{k \in AB} p_k}{\sum_{k \in B} p_k},$$

akkor $[\mathrm{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ egy feltételes valószínűségi mező. Ha $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ konvergens, úgy egy KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező által generált feltételes valószínűségi mezőt nyertünk, ha $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ divergens, akkor viszont nem. Ha speciálisan $p_1 = p_2 = \cdots = p_k = \cdots = 1$, akkor

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\nu(AB)}{\nu(B)},$$

ahol $\nu(C)$ jelenti a $C$ halmaz elemeinek számát. Ha most a $\xi = \xi(a)$ valószínűségi változót úgy értelmezzük, hogy $\xi(a) = a$ $(a = 1, 2, \ldots)$, úgy $\xi$ jellemezhető a következőképpen: $\xi$ egy találomra választott természetes egész szám, amely egyenlő valószínűséggel vehet fel minden természetes egész értéket. Pontosabban ezen azt kell érteni, hogy akárhogyan választjuk is H-nak egy véges, nem üres $B$ részhalmazát, azon feltevés mellett, hogy $\xi \in B$, $\xi$ egyforma valószínűséggel veszi fel $B$ összes elemeit.

3. Legyen H az $\mathcal{R}_n$ $n$-dimenziós euklideszi tér, $\mathfrak{T}_1$ legyen $\mathcal{R}_n$ BOREL-halmazainak összessége, legyen továbbá $\mathfrak{T}_2^{(k)}$ $\mathcal{R}_n$ azon $\mathcal{B} \in \mathfrak{T}_1$ részhalmazainak összessége, amelyeknek $m_k(\mathcal{B})$ $k$-dimenziós mértéke* pozitív és véges, és legyen $\mathfrak{T}_2 = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{T}_2^{(k)}$. Nyilvánvaló, hogy a $\mathfrak{T}_2^{(j)}$ és $\mathfrak{T}_2^{(k)}$ halmazrendszernek nincs közös elemük, ha $1 \leqq j < k \leqq n$. Ha mármost $\mathcal{B} \in \mathfrak{T}_2$, akkor tehát van egy olyan egyértelműen meghatározott $k$ pozitív egész szám, $(1 \leqq k \leqq n)$, hogy $\mathcal{B} \in \mathfrak{T}_2^{(k)}$, ez esetben legyen

$$\mathfrak{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{m_k(\mathcal{A}\mathcal{B})}{m_k\mathcal{B}}.$$

* Lásd pl. [18] 106. o.

Könnyen belátható, hogy $[\mathfrak{R}_n, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{S}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})]$ feltételes valószínűségi mező, vagyis hogy az I.—III. axiómák teljesülnek.

Legyen például $[H, \mathbf{T}, \mathbf{P}(A)]$ egy KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező és legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók, amelyek együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, az egész $\mathfrak{R}_n$ térben pozitív és folytonos. Az ezen változók $\mathfrak{R}_n$-beli valószínűségeloszlása által generált feltételes valószínűségeloszlás kiterjeszthető oly módon, hogy létezzék a $\mathfrak{S}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})$ feltételes valószínűség, ha $\mathfrak{B}$ például a $\xi_{i_1} = x_1, \xi_{i_2} = x_2, \ldots, \xi_{i_k} = x_k$ $(k < n)$ feltétellel definiált $(n-k)$-dimenziós halmaz, $\mathfrak{A}$ pedig egy tetszőleges BOREL-halmaz $\mathfrak{R}_n$-ben. Ez a példa mutatja, hogy előfordulhat, hogy H $\mathbf{T}_2$-höz tartozik és a $[H, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ feltételes valószínűségi mező mégsem azonos a $[H, \mathbf{T}_1, \mathbf{P}(A|H)]$ KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező által generált feltételes valószínűségi mezővel, mivel $\mathbf{T}_2$ olyan $B$ halmazokat is tartalmaz, amelyekre $\mathbf{P}(B|H) = 0$. Általában igaz a következő tétel:

15. TÉTEL: *Legyen* H *egy tetszőleges halmaz,* $\mathbf{T}_1$ *legyen* H *részhalmazainak egy* BOREL*-féle halmazteste,* $\mathbf{T}_2$ *legyen részhalmaza* $\mathbf{T}_1$*-nek, továbbá teljesüljön az alábbi feltétel:*

1. $\mathbf{T}_1$ *felbontható*

$$\mathbf{T}_1 = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbf{T}_1^{(\gamma)}$$

*alakban elemidegen osztályokra úgy, hogy a* $\gamma$ *indexek* $\Gamma$ *halmaza rendezett halmaz és minden* $\gamma \in \Gamma$ *indexhez tartozik egy* $\mathbf{T}_1$*-en értelmezett* $\mu^{(\gamma)}(A)$ *mérték, amely a* $+\infty$ *értéket is felveheti, úgy, hogy ha* $B \in \mathbf{T}_2^{(\gamma)} \equiv \mathbf{T}_1^{(\gamma)}\mathbf{T}_2$, *akkor* $0 < \mu^{(\gamma)}(B) < +\infty$.

2. *ha a* $\Gamma$ *halmaz rendezési relációja szerint* $\alpha < \beta$ *és* $\mu^{(\alpha)}(A) < +\infty$, *akkor* $\mu^{(\beta)}(A) = 0$.

*Ezen feltételek mellett a*

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mu^{(\gamma)}(AB)}{\mu^{(\gamma)}(B)} \quad ha \quad B \in \mathbf{T}_2^{(\gamma)}$$

*relációval értelmezett halmazfüggvény feltételes valószínűségi mezőt alkot a* H *halmaz* $\mathbf{T}_1$, *illetve* $\mathbf{T}_2$ *részhalmaz-rendszerein.*

BIZONYÍTÁS: Az I. és II. axióma nyilván teljesül. Vizsgáljuk meg a III. axiómát. Ha $C \in \mathbf{T}_1^{(\alpha)}$ és $BC \in \mathbf{T}_1^{(\beta)}$, két esetet kell megkülönböztetnünk. Az első esetben, mikor $\alpha = \beta$, III. triviálisan teljesül. Ha viszont $\alpha \neq \beta$, csak $\beta < \alpha$ jöhet számításba; ugyanis nyilván $\mu^{(\alpha)}(BC) \leqq \mu^{(\alpha)}(C) < +\infty$ az $\alpha$ definíciója szerint s így abban az esetben, ha $\alpha < \beta$ lenne, a 2. feltétel miatt $\mu^{(\beta)}(BC) = 0$ és így $BC \notin \mathbf{T}^{(\beta)}$ lenne. Elegendő tehát csak azzal az esettel foglalkozni, mikor $\beta < \alpha$. Tekintve, hogy $BC \in \mathbf{T}_2^{(\beta)}$, $\mu^{(\beta)}(BC) < +\infty$ és így $\beta < \alpha$ miatt $\mu^{(\alpha)}(BC) = 0$ és ezért $\mathbf{P}(B|C) = \frac{\mu^{(\alpha)}(BC)}{\mu^{(\alpha)}(C)} = 0$; továbbá $\mathbf{P}(AB|C) = 0$ is fennáll, mivel

$$\mathbf{P}(AB|C) = \frac{\mu^{(\alpha)}(ABC)}{\mu^{(\alpha)}(C)} \leqq \frac{\mu^{(\alpha)}(BC)}{\mu^{(\alpha)}(C)} = 0.$$

A $\beta < \alpha$ esetben tehát a III. axiómában szereplő egyenlőség mindkét oldalán 0 áll és így III. ebben az esetben is teljesül.

A 15. tételre E. MARCZEWSKI volt szíves a figyelmemet felhívni. CSÁSZÁR ÁKOS megtalálta annak szükséges és elégséges feltételét, hogy egy feltételes valószínűségi mező a 15. tételben leírt módon legyen előállítható egy $\mu^{(\alpha)}(B)$ mértékrendszer segítségével; ez a feltétel a következő: ha $n$ tetszőleges természetes egész szám, $A_i \in T_1$, $B_i \in T_2$ és $A_i \subseteq B_i B_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ B_{n+1} = B_1$ per def.), akkor teljesül a

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i|B_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i|B_{i+1}) \tag{10}$$

azonosság. Ha $n = 2$, ez az összefüggés következik a III. axiómából, ha $B_1 B_2 \in \mathbf{T}_2$ (lásd a 9. tételt). Egyébként a (10) feltétel erősebb megszorítást jelent a $\mathbf{P}(A|B)$ halmazfüggvényre vonatkozólag, mint a III. axióma.

CSÁSZÁR ÁKOS azt is bebizonyította, hogy $\mathbf{P}(A|B)$ akkor és csak akkor állítható elő $\mathbf{P}(A|B) = \dfrac{\mathbf{Q}(AB)}{\mathbf{Q}(B)}$ alakban, egyetlen $\mathbf{Q}(A)$ mérték segítségével, ha (10)-en kívül teljesül még a következő $(C)$ feltétel is:

$(C)$ Ha $B_1 \in \mathbf{T}_2$ és $B_2 \in \mathbf{T}_2$ akkor a $\mathbf{P}(B_1 B_2|B_1)$ és $\mathbf{P}(B_1 B_2|B_2)$ számok közül vagy mind a kettő 0, vagy egyik sem.

Megjegyzendő, hogy ha $\mathbf{P}(A|B)$ előállítható $\mathbf{P}(A|B) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathbf{Q}_n(AB)}{\mathbf{Q}_n(B)}$ alakban, ahol $\mathbf{Q}_n(A)$ $A$-nak nemnegatív és teljesen additív halmazfüggvénye, akkor a (10) összefüggés nyilvánvalóan fennáll. Erre a megjegyzésre a 4. §-ban lesz szükségünk.

Foglalkozzunk most feltételes valószínűségi mezők szorzásával. Legyen adva feltételes valószínűségi mezőknek egy $[\mathsf{H}^{(k)}, \mathbf{T}_1^{(k)}, \mathbf{T}_2^{(k)}, \mathbf{P}^{(k)}(A^{(k)}|B^{(k)})]$ véges vagy végtelen sorozata $(k = 1, 2, \ldots)$. Véges sok feltételes valószínűségi mező szorzatát a következőképpen definiáljuk: legyen $\mathsf{H} = \mathsf{H}^{(1)} * \mathsf{H}^{(2)} * \ldots * \mathsf{H}^{(N)}$ a $\mathsf{H}^{(1)}, \mathsf{H}^{(2)}, \ldots, \mathsf{H}^{(N)}$ eseményterek DESCARTES-szorzata, vagyis $\mathsf{H}$ álljon az $(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(N)})$ elem-$N$-esekből, ahol $a^{(k)} \in H^{(k)}$. Jelentse $\mathbf{T}_2$ a $\mathsf{H}$ tér azon részhalmazainak összességét, amelyek $B = B^{(1)} * B^{(2)} * \ldots * B^{(N)}$ alakban állíthatók elő, ahol $B^{(k)} \in \mathbf{T}_2^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ és $B^{(1)} * B^{(2)} * \ldots * B^{(N)}$ $\mathsf{H}$ azon $(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(N)})$ elemeinek halmazát jelenti, amelyekre $a^{(k)} \in B^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. A rövidség kedvéért jelöljük $\mathbf{T}_2$-t a következőképpen: $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2^{(1)} * \mathbf{T}_2^{(2)} * \ldots * \mathbf{T}_2^{(N)}$. Hasonlóképpen legyen $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1^{(1)} * \mathbf{T}_1^{(2)} * \ldots * \mathbf{T}_1^{(N)}$. Ha $A \in \mathbf{T}_1$ és $B \in \mathbf{T}_2$, akkor tehát $A = A^{(1)} * A^{(2)} * \ldots * A^{(N)}$ és $B = B^{(1)} * B^{(2)} \ldots * B^{(N)}$ alakú, ahol $A^{(k)} \in \mathbf{T}_1^{(k)}$ és $B^{(k)} \in \mathbf{T}_2^{(k)} \subseteq \mathbf{T}_1^{(k)}$. Definiáljuk a $\mathbf{P}(A|B)$ feltételes valószínűséget a következőképpen:

$$\mathbf{P}(A|B) = \prod_{k=1}^{N} \mathbf{P}^{(k)}(A^{(k)}|B^{(k)}) \quad \text{ha} \quad A \in \mathbf{T}_1 \text{ és } B \in \mathbf{T}_2$$

és terjesszük ki a szokásos módon a $\mathbf{P}(A|B)$ mérték definícióját minden rögzített $B$ mellett a $\mathbf{T}_1$ halmazrendszer $\mathbf{T}_1^*$ legszűkebb BOREL-féle bővítésére. Más szóval adott $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(N)}$ mellett képezzük a $[\mathsf{H}^{(k)}, \mathbf{T}_1^{(k)}, \mathbf{P}^{(k)}(A^{(k)}|B^{(k)})]$ KOLMOGOROV-féle valószínűségi mezők szorzatát és ezt a műveletet $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(N)}$ összes lehetséges választása mellett végezzük el.

Ugyanígy járunk el végtelen sok feltételes valószínűségi mező szorzásánál: a $[\mathsf{H}^{(k)}, \mathbf{T}_1^{(k)}, \mathbf{T}_2^{(k)}, \mathbf{P}^{(k)}(A^{(k)}|B^{(k)})]$ feltételes valószínűségi mezők szorzatát $(k = 1, 2, \ldots)$ úgy definiáljuk, hogy képezzük a $\mathsf{H} = \mathsf{H}^{(1)} * \mathsf{H}^{(2)} * \ldots * \mathsf{H}^{(N)} * \ldots$ szorzat-teret és választunk egy $B = B^{(1)} * B^{(2)} * \ldots * B^{(N)} * \ldots$, halmazt; a $\mathbf{P}(A|B)$ feltételes valószínűséget először a $\mathsf{H}$ tér ú. n. „hengerhalmazaira" definiáljuk, vagyis az $A = A^{(1)} * A^{(2)} * \ldots * A^{(N)} * \mathsf{H}^{(N+1)} * \mathsf{H}^{(N+2)} * \ldots$ alakú halmazokra, mégpedig a következőképpen: $\mathbf{P}(A|B) = \prod_{k=1}^{N} \mathbf{P}^{(k)}(A^{(k)}|B^{(k)})$. Ezután kiterjesztjük $\mathbf{P}(A|B)$ értelmezését az összes $A$ hengerhalmazok halmazának $\mathbf{T}_1^*$ BOREL-féle bővítésére, és ezt az összes számbajövő $B = B^{(1)} * B^{(2)} * \ldots$ halmazokra elvégezzük. Nyilvánvaló, hogy az így definiált $\mathbf{P}(A|B)$ függvény eleget tesz az I. és II. axiómáknak, csak a III. axióma teljesülését kell külön megvizsgálnunk.

Jelentse $\mathbf{T}_2$ az összes $B^{(1)} * B^{(2)} * \ldots * B^{(k)} * \ldots$ alakú halmazok összeségét, ahol $B^{(k)} \in \mathbf{T}_2^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Ha $C \in \mathbf{T}_2$ és $BC \in \mathbf{T}_2$, akkor tehát

$$C = C^{(1)} * C^{(2)} * \ldots * C^{(k)} * \ldots$$

és

$$BC = (BC)^{(1)} * (BC)^{(2)} * \ldots * (BC)^{(k)} * \ldots$$

alakú, ahol $C^{(k)}$ és $(BC)^{(k)}$ $\mathbf{T}_2^{(k)}$-hoz tartoznak. Nyilvánvaló, hogy a III. axióma ekvivalens a

$$\mathbf{P}(A|BC)\,\mathbf{P}(BC|C) = \mathbf{P}(ABC|C) \tag{11}$$

összefüggéssel, mivel a $\mathbf{P}A|B) = \mathbf{P}(AB|B)$ összefüggés a szorzattérben is érvényes*; ezért III. helyett (11)-et fogjuk bebizonyítani. Ha most $A$ egy hengerhalmaz,

$$A = A^{(1)} * A^{(2)} * \ldots * A^{(N)} * \mathsf{H}^{(N+1)} * \mathsf{H}^{(N+2)} * \ldots,$$

akkor definíció szerint

$$\mathbf{P}(A|BC) = \prod_{k=1}^{N} \mathbf{P}^{(k)}(A^{(k)}|(BC)^{(k)}).$$

Mivel a

$$p_N = \prod_{k=1}^{N} \mathbf{P}^{(k)}((BC)^{(k)}|C^{(k)})$$

* Ez ha $A$ hengerhalmaz, közvetlenül $P(A|B)$ értelmezéséből következik; mivel $P(A|B) = P(AB|B)$, ha $A$ hengerhalmaz, következik, hogy ez az összefüggés érvényes bármely $T_1^*$-hoz tartozó $A$ halmazra is, mivel ha két teljesen additív halmazfüggvény megegyezik egy halmazrendszeren, akkor megegyeznek ennek a halmazrendszernek a legszűkebb Borel-féle bővítésén is.

számsorozat nemnegatív és monoton nem-növekvő, $\lim_{N\to\infty} p_N = p$ létezik és két eset lehetséges: $p>0$ vagy $p=0$. Ha $p=0$, akkor $\mathbf{P}(BC|C)=0$ és így $\mathbf{P}(A\cdot BC|C)=0$, tehát (11) teljesül; ha $p>0$, akkor viszont

$$\mathbf{P}(A\cdot BC|C)=\prod_{k=1}^{N}\mathbf{P}^{(k)}(A^{(k)}(BC)^{(k)}|C^{(k)})\cdot\prod_{k=N+1}^{\infty}\mathbf{P}^{(k)}((BC)^{(k)}|C^{(k)}),$$

és így

$$\mathbf{P}(A|BC)\mathbf{P}(BC|C)=\prod_{k=1}^{N}\mathbf{P}^{(k)}(A^{(k)}|(BC)^{(k)})\prod_{k=1}^{k}\mathbf{P}^{(k)}((BC)^{(k)}|C^{(k)})=$$

$$=\prod_{k=1}^{N}\mathbf{P}^{(k)}(A^{(k)}(BC)^{(k)}|C^{(k)})\prod_{k=N-1}^{\infty}\mathbf{P}((BC)^{(k)}|C^{(\lambda)})=\mathbf{P}(ABC|C),$$

tehát (11) és így a III. axióma érvényes minden $A$ hengerhalmazra, tehát tetszőleges, a hengerhalmazok összességének $\mathbf{T}_1^*$ BOREL-féle bővítéséhez tartozó $A$ halmazra is.*

Most vizsgáljuk azt a speciális esetet, amikor $\mathcal{H}^{(k)}$ a valós számegyenes és $\boldsymbol{T}_1^{(k)}$ $\mathcal{H}^{(k)}$ BOREL-halmazainak egy BOREL-féle halmazteste $(k=1,2,\ldots)$. Jelölje $x=(x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots)$ a $\mathsf{H}$ tér pontjait $(\mathsf{H}=\mathcal{H}^{(1)}*\mathcal{H}^{(2)}*\ldots)$ és definiáljuk a $\xi_k=\xi_k(x)$ valószínűségi változókat a következőképpen: $\xi_k(x)=x_k$ $(k=1,2,\ldots)$. Ha most

$$A=\mathcal{A}^{(1)}*A^{(2)}*\ldots*\mathcal{A}^{(k)}*\ldots \quad\text{és}\quad B=\mathcal{B}^{(1)}*\mathcal{B}^{(2)}*\ldots*\mathcal{B}^{(k)}*\ldots,$$

ahol $\mathcal{A}^{(k)}$ ill. $\mathcal{B}^{(k)}$ a valós számegyenes részhalmazai, amelyek $\boldsymbol{T}_1^{(k)}$-hoz illetve $\boldsymbol{T}_2^{(k)}$-hoz tartoznak, akkor nyilván

$$\mathbf{P}(\xi_k\in A|B)=\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{A}^{(k)}|\mathcal{B}^{(k)});\qquad (k=1,2,\ldots)$$

Ha tehát $\mathcal{H}^{(k)}$ a valós számegyenes és így $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{A}^{(k)}|\mathcal{B}^{(k)})$ a számegyenesen értelmezett feltételes eloszlásrendszer, akkor a $\mathsf{H}$ térben a fenti módon értelmezett $\xi_k$ valószínűségi változók $(k=1,2,\ldots)$ feltételes eloszlásrendszere éppen $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{A}^{(k)}|\mathcal{B}^{(k)})$. Könnyen belátható az is, hogy ezekre a $\xi_k$ változókra

$$\mathbf{P}(\xi_1\in\mathcal{A}^{(1)},\ \xi_2\in\mathcal{A}^{(2)},\ \ldots,\ \xi_n\in\mathcal{A}^{(n)}|B)=\prod_{k=1}^{n}\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{A}^{(k)}|\mathcal{B}^{(k)}),$$

vagyis a $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ változók $B\in\mathbf{T}_2$ minden választása mellett $B$-re nézve feltételesen függetlenek; ezt úgy is kifejezhetjük, hogy a $\xi_k$ változók $\mathbf{T}_2$-re nézve függetlenek.

Ilyen módon a következő tételt bizonyítottuk be:

16. TÉTEL. *Legyen $\mathcal{F}^{(k)}(\mathcal{A}^{(k)}|\mathcal{B}^{(k)})$ a $\mathcal{H}^{(k)}$ valós számegyenes* BOREL*-halmazainak bizonyos $\boldsymbol{T}_1^{(k)}$ összességéhez tartozó $\mathcal{A}^{(k)}$ halmazokra és $\boldsymbol{T}_1^{(k)}$ bizonyos $\boldsymbol{T}_2^{(k)}$ részrendszeréhez tartozó $\mathcal{B}^{(k)}$ halmazokra értelmezett feltételes valószínűségeloszlásrendszereknek egy tetszőleges sorozata. Akkor, képezve a $\mathsf{H}=\mathcal{H}^{(1)}*\mathcal{H}^{(2)}*\ldots$ térben a $\mathbf{T}_1=\boldsymbol{T}_1^{(1)}*\boldsymbol{T}_1^{(2)}*\ldots$ halmazrendszer $\mathbf{T}_1^*$ legszűkebb*

* Lásd az előző oldalon lévő lábjegyzetet.

BOREL-*féle bővítését és a* $\mathbf{T}_2 = \boldsymbol{T}_2^{(1)} * \boldsymbol{T}_2^{(2)} * \ldots$ *halmazrendszert, megadható egy olyan* $\mathbf{P}(A|B)$ $(A \in \mathbf{T}_1^*;\ B \in \mathbf{T}_2)$ *halmazfüggvény, hogy* $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1^*, \mathbf{T}_2, P(A|B)]$ *feltételes valószínűségi mezőt alkot; jelölje továbbá* $x = (x_1, x_2, \ldots)$ $\mathsf{H}$ *egy tetszőleges elemét és definiáljuk a* $\xi_k = \xi_k(x)$ *valószínűségi változókat a következőképpen:* $\xi_k(x) = x_k$; *akkor a* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *változók* $\mathbf{T}_2$*-re nézve függetlenek és ha* $B = \mathfrak{B}^{(1)} * \mathfrak{B}^{(2)} * \ldots$, *akkor* $\xi_k$ *feltételes eloszlásrendszerét* $\mathfrak{F}^{(k)}(\mathfrak{A}^{(k)}|\mathfrak{B}^{(k)})$ *adja meg.*

A következőkben sokszor fogjuk alkalmazni a 16. tételben szereplő konstrukciót; különös figyelmet érdemel az az eset, amikor a $\mathfrak{F}^{(k)}(\mathfrak{A}^{(k)}|\mathfrak{B}^{(k)})$ feltételes valószínűségeloszlásrendszer nem függ $k$-tól, vagyis amikor a $\xi_k$ változók egyforma eloszlásúak. A 16. tétel értelmében konstruált $[\mathbf{H}, \mathbf{T}_1^*, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ feltételes valószínűségi mezőt a rövidség kedvéért $[\mathfrak{H}, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{F}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})]^{\infty *}$-gal jelöljük; ha a $[\mathfrak{H}^{(k)}, \mathfrak{T}_1^{(k)}, \mathfrak{T}_2^{(k)}, \mathfrak{F}^{(k)}(\mathfrak{A}^{(k)}|\mathfrak{B}^{(k)})]$ feltételes eloszlásrendszerek nem azonosak, a

$$[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1^*, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)] = \prod_{k=1}^{\infty} [\mathfrak{H}^{(k)}, \boldsymbol{T}_1^{(k)}, \boldsymbol{T}_2^{(k)}, \mathfrak{F}^{(k)}(\mathfrak{A}^{(k)}|\mathfrak{B}^{(k)})]$$

jelölést fogjuk használni és azt mondjuk, hogy a $[H, \mathbf{T}_1^*, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ feltételes valószínűségi mező a $[\mathfrak{H}^{(k)}, \boldsymbol{T}_1^{(k)}, \boldsymbol{T}_2^{(k)}, \mathfrak{F}^{(k)}(\mathfrak{A}^{(k)}|\mathfrak{B}^{(k)})]$ feltételes eloszlásrendszerek szorzata.

Szükségünk lesz még a következő tételre is:

17. TÉTEL: *A* $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$ *halmazok tartozzanak mind* $\mathbf{T}_2$*-höz, és legyen* $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_n \subseteq B_{n+1} \subseteq \ldots$, *továbbá* $\mathbf{P}(B_n|B_{n+1}) > 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *és legyen* $\prod_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(B_n|B_{n+1})$ *konvergens. Ha a* $B_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ *halmaz nem tartozik* $\mathbf{T}_2$*-höz, akkor kiterjeszthető a* $\mathbf{P}(A|B)$ *halmazfüggvény értelmezése* $B = B_\infty$*-re oly módon, hogy teljesüljön a*

$$\mathbf{P}(A|B_\infty) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(A|B_n)$$

*összefüggés bármely* $A \in \mathbf{T}_1$ *halmazra.*

BIZONYÍTÁS: Ha $AB_\infty \subseteq B_N$ valamely $N$-re akkor a 6. tétel szerint ezen $N$-től kezdve $\mathbf{P}(A|B_n)$ monoton nem növekvő és így $\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(A|B_n)$ létezik, tehát ha $B_\infty$ nem eleme $\mathbf{T}_2$-nek, akkor kiterjeszthető $\mathbf{P}(A|B_\infty)$ értelmezése olyan $A$ halmazokra, amelyekre $AB_\infty \subseteq B_N$, $N$ valamely értékére. Mivel $AB_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} AB_n$, tehát bevezetve az $A_n = AB_n$ és $A_{-1} = O$ jelöléseket, $AB_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \bar{A}_{n-1}$ és $\bar{A}_{n-1} A_n B_\infty \subseteq B_n$, tehát $\mathbf{P}(A|B_\infty)$ definiálható bármely $A$-ra a

$$\mathbf{P}(A|B_\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_n \bar{A}_{n-1}|B_\infty)$$

összefüggés segítségével. Mivel továbbá, ha $A \subseteq B_N$ és $\mathbf{P}(A|B_\infty) > 0$, akkor

$$\mathbf{P}(A|B_\infty) = \mathbf{P}(A|B_N) \prod_{n=N}^{\infty} \mathbf{P}(B_n|B_{n+1}),$$

tehát ha $A_k \subseteq B_N$ $(k = 1.2, \ldots)$ és $A_j A_k = O$, ha $j \neq k$, akkor

$$\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \middle| B_\infty\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k|B_\infty),$$

és így, ha $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}, \ldots$ tetszőleges halmazsorozat, amelyre $A^{(n)} \in \mathbf{T}_1$ és $A^{(n)}A^{(m)} = O$, ha $n \neq m$, akkor bevezetve a $\sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)} = A$ továbbá az $A^{(i)}B_N B_{N-1} = A_{i,N}$ és $B_{-1} = O$ jelöléseket, következik, hogy

$$\mathbf{P}(A|B_\infty) = \mathbf{P}(AB_\infty|B_\infty) = \sum_{N=0}^{\infty} \mathbf{P}(AB_N\bar{B}_{N-1}|B_\infty) =$$

$$= \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_{i,N}|B_\infty) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{N=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_{i,N}|B_\infty) = \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(A^{(i)}B_N|B_\infty).$$

Mivel

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(A^{(i)}B_N|B_\infty) = \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(A^{(i)}|B_N) \prod_{n=N}^{\infty} \mathbf{P}(B_n|B_{n+1}) = \mathbf{P}(A^{(i)}|B_\infty),$$

tehát

$$\mathbf{P}(A|B_\infty) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A^{(i)}|B_\infty),$$

vagyis $\mathbf{P}(A|B_\infty)$ teljesen additív. $\mathbf{P}(A|B_\infty)$ teljes additivitásából következik, hogy a $\mathbf{P}(A|B_\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A|B_n)$ összefüggés bármely $A \in \mathbf{T}_1$ halmazra érvényes. Ugyanis a fenti jelölésekkel egyrészt

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \mathbf{P}(A|B_N) \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\lim_{N\to\infty}} \mathbf{P}(A_n\bar{A}_{n-1}B_N) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_n\bar{A}_{n-1}|B_N) = \mathbf{P}(A|B_\infty)$$

másrészt $M$ bármely értékére

$$\underline{\lim_{N\to\infty}} \mathbf{P}(A|B_N) \geqq \sum_{n=0}^{M} \underline{\lim_{N\to\infty}} \mathbf{P}(A_n\bar{A}_{n-1}|B_N) = \sum_{n=0}^{M} \mathbf{P}(A_n\bar{A}_{n-1}|B_\infty)$$

és így

$$\underline{\lim_{N\to\infty}} \mathbf{P}(A|B_N) \geqq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_n\bar{A}_{n-1}|B_\infty) = \mathbf{P}(A|B_\infty).$$

Ebből a két egyenlőtlenségből már következik, hogy $\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(A|B_N) = \mathbf{P}(A|B_\infty)$. Bizonyításra szorul még, hogy $\mathbf{P}(B_\infty|B_\infty) = 1$. Ezt a következőképpen láthatjuk be:

$$B_\infty = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\bar{B}_{n-1}$$

és így

$$\mathbf{P}(B_\infty|B_\infty)=\mathbf{P}(B_0|B_\infty)+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(B_n\bar{B}_{n-1}|B_\infty)=$$

$$=\mathbf{P}(B_0|B_\infty)+\sum_{n=2}^{\infty}(\mathbf{P}(B_n|B_\infty)-\mathbf{P}(B_{n-1}|B_\infty))=\lim_{N\to\infty}\mathbf{P}(B_N|B_\infty).$$

Mivel

$$\mathbf{P}(B_N|B_\infty)=\mathbf{P}(B_N|B_N)\prod_{n=N}^{\infty}\mathbf{P}(B_n|B_{n+1})=\prod_{n=N}^{\infty}\mathbf{P}(B_x|B_{n+1}),$$

és a $\prod_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(B_n|B_{n+1})$ végtelen szorzat feltevésünk szerint konvergens, tehát $\lim_{N\to\infty}\mathbf{P}(B_N|B_\infty)=1$ és így $\mathbf{P}(B_\infty|B_\infty)=1$.

(Abban az esetben, ha $\prod_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(B_n|B_{n-1})$ divergens, vagyis

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N}\mathbf{P}(B_n|B_{n+1})=0,$$

a $B_\infty$ halmaz azért nem csatolható $\mathbf{T}_2$-höz, mert $\mathbf{P}(A|B_\infty)$-nek azonosan 0-nak kellene lennie, ami ellentmond a $\mathbf{P}(B_\infty|B_\infty)=1$ feltevésnek).

Könnyen belátható, hogy a III. axióma is teljesül. Ezzel a 17. tételt bebizonyítottuk.

Még egy fontos fogalmat kell bevezetnünk: feltételes valószínűségi mezők *beágyazás*ának fogalmát.

Legyen $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ egy feltételes valószínűségi mező. Ha $\mathsf{H}'$ egy olyan halmaz, amelyre $\mathsf{H}\subseteq\mathsf{H}'$, továbbá $\mathbf{T}_1'$ a $\mathsf{H}'$ részhalmazainak egy halmaztesteje, amelyre $\mathbf{T}_1\subseteq\mathbf{T}_1'$, hasonlóképpen $\mathbf{T}_2'$ $\mathbf{T}_1'$-nek egy olyan részhalmaza, amelyre $\mathbf{T}_2\subseteq\mathbf{T}_2'$ és végül $\mathbf{P}'(A'|B')$ egy olyan kétváltozós halmazfüggvény, hogy $[\mathsf{H}', \mathbf{T}_1', \mathbf{T}_2', \mathbf{P}'(A', B')]$ egy feltételes valószínűségi mező és ha $A\in\mathbf{T}_1$ és $B\in\mathbf{T}_2$ akkor

$$\mathbf{P}'(A|B)=\mathbf{P}(A|B),$$

ez esetben azt mondjuk, hogy a $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ feltételes valószínűségi mező be van ágyazva a $[\mathsf{H}', \mathbf{T}_1', \mathbf{T}_2', \mathbf{P}(A'|B')]$ feltételes valószínűségi mezőbe, illetve, hogy a $[\mathsf{H}', \mathbf{T}_1', \mathbf{T}_2', \mathbf{P}'(A'|B')]$ feltételes valószínűségi mező a $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ feltételes valószínűségi mező bővítése. Ha $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ a $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{P}(A)]$ KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező által generált feltételes valószínűségi mező, a rövidség kedvéért azt a kifejezést is használjuk, hogy a $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{P}(A)]$ KOLMOGOROV-féle valószínőségi mező be van ágyazva a $[\mathsf{H}', \mathbf{T}_1', \mathbf{T}_2', \mathbf{P}'(A'|B')]$ feltételes valószínűségi mezőbe. Végül akkor is beágyazásról fogunk beszélni, ha nem maga a $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ feltételes valószínűségi mező, hanem annak egy izomorf képe van beágyazva a $[\mathsf{H}', \mathbf{T}_1', \mathbf{T}_2', \mathbf{P}'(A'|B')]$ feltételes valószínűségi mezőbe. Így például ha $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ a

$[\mathsf{H}^{(1)}, \mathsf{T}_1^{(1)}, \mathsf{T}_2^{(1)}, \mathbf{P}^{(1)}(A^{(1)}|B^{(1)})]$ és a $[\mathsf{H}^{(2)}, \mathsf{T}_1^{(2)}, \mathsf{T}_2^{(2)}, \mathbf{P}^{(2)}(A^{(2)}|B^{(2)})]$ feltételes valószínűségi mezők szorzata, akkor $[\mathsf{H}^{(1)}, \mathsf{T}_1^{(1)}, \mathsf{T}_2^{(1)}, \mathbf{P}^{(1)}(A^{(1)}|B^{(1)})]$ és $[\mathsf{H}^{(2)}, \mathsf{T}_1^{(2)}, \mathsf{T}_2^{(2)}, \mathbf{P}^{(2)}(A^{(2)}|B^{(2)})]$ (illetve izomorf képeik) be vannak ágyazva a $[\mathsf{H}, \mathsf{T}_1, \mathsf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ feltételes valószínűségi mezőbe.

## 2. §. *A nagy számok törvényei.*

Ebben a §-ban a valószínűségszámítás jelen dolgozatban megadott elméletének a valósághoz való viszonyával és ezzel kapcsolatban a feltételes relatív gyakoriságnak a feltételes valószínűség körüli ingadozásait jellemző tételekkel, a nagy számok (feltételes) törvényeivel fogunk foglalkozni.

Egy kísérletnek, melynek kimenetele a véletlentől függ, összes lehetséges eredményei legyenek az $E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots$ egymást kizáró események. A valószínűségszámítás KOLMOGOROV-féle elmélete abból indul ki, hogy megadhatók olyan $p_n$ nemnegatív számok ($n = 0, 1, \ldots$), amelyek összege 1-gyel egyenlő, úgy, hogy ha a szóbanforgó kísérletet $N$-szer egymástól függetlenül megismételjük és $\nu_n^{(N)}$-nel jelöljük azt, hogy az $N$ kísérlet közül az $E_n$ esemény hányszor következik be, akkor a $\frac{\nu_n^{(N)}}{N}$ hányados, hacsak $N$ elég nagy, általában közel lesz $p_n$-hez. Ezt a tapasztalatok számos esetben valóban teljes mértékben alá is támasztják. Azonban sem tapasztalatilag, sem logikai alapon nem zárhatunk ki eleve olyan kísérleteket, amelyeknél a $\frac{\nu_n^{(N)}}{N}$ hányadosok mind általában annál kisebbek, minél nagyobb $N$, tehát minden egyes $E_n$ eseménynek a relatív gyakorisága a kísérletek számának növelésével „sztochasztikusan" 0-hoz konvergál*. Azt, hogy ez egyáltalán nem abszurdum, mutatja, hogy ilyen jelenség a valószínűségszámítás KOLMOGOROV-féle elmélete szerint is előfordulhat, ha a kísérlet körülményei a kísérlet megismétlései során megváltoznak. Így például ha a $\xi_k$ valószínűségi változó jelenti a $k$-adik kísérletnél bekövetkező esemény indexét, és $\xi_k$ POISSON eloszlású $\lambda_k$ várható értékkel, vagyis annak a valószínűsége, hogy a $k$-adik kísérlet eredménye az $E_n$ esemény, $\frac{\lambda_k^n}{n!} e^{-\lambda_k}$-val egyenlő, és $\lambda_k \to \infty$, akkor az $E_n$ esemény relatív gyakorisága az első $N$ kísérlet során $n$ minden értékére sztochasztikusan 0-hoz konvergál ha $N \to \infty$.

Az azonban, hogy ugyanez a jelenség akkor is bekövetkezzék, ha a kísérlet körülményei a kísérlet minden megismétlésénél ugyanazok, a KOLMOGOROV-féle elmélettel nem fér össze; a jelen dolgozatban közölt elmélet azonban megengedi ezt a lehetőséget is. Így pl. az 1. §-ban vizsgált 2. példában leírt

* A „sztochasztikus konvergencia" kifejezést itt e szó nem matematikai, hanem természettudományi értelmében használjuk; e kifejezés szabatos matematikai értelmet a nagy számok törvényeiben nyer.

„kísérlet" esetében, amikor találomra választunk egy természetes számot, úgy, hogy bármely természetes szám egyenlő (feltételes) valószínűséggel kerülhet kiválasztásra, mint látni fogjuk, éppen ez a helyzet.

Kézenfekvő az a kérdés, hogy a $\mathbf{P}(A|B)$ feltételes valószínűségek hogyan függnek össze a gyakoriságokkal? Nyilvánvaló, hogy ha csak azoknak a kísérleteknek a megfigyelésére szorítkozunk, amelyeknél a $B$ esemény bekövetkezik, úgy ezeknek a kísérleteknek a sorozatában az $A$ esemény relatív gyakorisága a $\mathbf{P}(A|B)$ szám körül fog ingadozni, vagyis *a* $\mathbf{P}(A|B)$ *feltételes valószínűség az a számérték, amely körül az A eseménynek a B feltétel melletti feltételes relatív gyakorisága véletlen ingadozásokat végez.* Ezt a tényt írják le szabatosan a következő tételek:

Egy $\mathcal{H}$ kísérlet $k$-adik végrehajtásának ($k = 1, 2, \ldots$) lehetséges eredményeihez rendeljük hozzá a valós számok $\mathcal{H}$ halmaza bizonyos BOREL-féle részhalmazainak egy $\mathfrak{T}_1$ BOREL-féle halmaztestének halmazait, $\mathfrak{T}_2$ legyen $\mathfrak{T}_1$ egy részhalmaza és legyen $[\mathcal{H}, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})]$ egy feltételes valószínűségi mező. Feltesszük, hogy $[\mathcal{H}, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})]$ független $k$-tól, vagyis, hogy a kísérlet minden egyes végrehajtása azonos körülmények között történik. Képezhetjük a 16. tétel szerint ezen feltételes valószínűségi mezők $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1^*, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)] = [\mathcal{H}, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})]^{\infty *}$ szorzatát és abban definiálhatjuk a $\xi_k$ változókat úgy, hogy $\mathbf{T}_2$-re nézve függetlenek legyenek és $\xi_k$ feltételes eloszlásrendszere éppen $[\mathcal{H}, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})]$ legyen; $\xi_k$ értéke tehát a $k$-adik kísérlet eredményét jellemzi. Jelölje $\eta_N(\mathcal{A})$ a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ változók közül azok számát, amelyek az $\mathcal{A}$ halmazhoz tartoznak, ahol $\mathcal{A}$ egy tetszőleges $\mathfrak{T}_1$-hez tartozó részhalmaz, akkor $\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{\eta_N(\mathcal{A}\mathcal{B})}{\eta_N(\mathcal{B})}$ ($\mathcal{B} \in \mathfrak{T}_2$) adja meg az $\mathcal{A}$ eseménynek a $\mathcal{B}$ eseményre vonatkozó feltételes relatív gyakoriságát az első $N$ kísérlet során. $\eta_N(\mathcal{A})$ tehát azt fejezi ki, hogy a kísérlet $N$-szeri végrehajtása során hányszor következett be olyan esemény, amelyet az $\mathcal{A}$ halmaz jellemez. A rövidség kedvéért azt az eseményt, amelyet az $\mathcal{A}$ halmaz jellemez, azonosíthatjuk $\mathcal{A}$-val, tehát mondhatjuk, hogy $\eta_N(\mathcal{A})$ azt jelenti, hogy az első $N$ kísérlet során hányszor következett be az $\mathcal{A}$ esemény.

Be fogjuk bizonyítani először a következő két tételt:

1. TÉTEL: *Legyen* $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1^*, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)] = [\mathcal{H}, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})]^{\infty *}$ *(a 16. tételhez fűzött megjegyzés értelmében), legyen* $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}_1$ *és* $\mathcal{B} \in \mathfrak{T}_2$, *továbbá legyen* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}^{(N)} \in \mathfrak{T}_2$ ($N = 1, 2, \ldots$) *és* $C = \mathcal{C}^{(1)} * \mathcal{C}^{(2)} * \ldots \in \mathbf{T}_2$; *legyen* $\mathfrak{P}(\mathcal{B}|\mathcal{C}^{(N)}) = p_N$ ($N = 1, 2, \ldots$) *és tegyük fel, hogy a* $\sum_{N=1}^{\infty} p_N$ *sor divergens. Definiáljuk a* $\mathsf{H}$ *halmazon a* $\xi_k$ *valószínűségi változókat a* 16. *tételben szereplő módon, vagyis úgy, hogy* $\xi_k$ *feltételes eloszlásrendszere* $[\mathcal{H}, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})]$ *legyen és a* $\xi_k$ *változók függetlenek legyenek* $\mathbf{T}_2$*-re nézve. Jelölje* $\eta_N(\mathcal{D})$ *a* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ *változók közül azok számát, amelyek értéke* $\mathcal{D}$*-be esik,* ($\mathcal{D} \in \mathfrak{T}_1$), *és legyen* $\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{\eta_N(\mathcal{A}\mathcal{B})}{\eta_N(\mathcal{B})}$

*(az $\mathcal{A}$ eseménynek $\mathcal{B}$-re vonatkozó feltételes relatív gyakorisága az első $N$ kísérlet során) akkor, ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, fennáll, hogy*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(|\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B}) - \mathcal{S}(\mathcal{A}|\mathcal{B})| > \varepsilon \,|\, C) = 0,$$

*vagyis a $C$ feltétel mellett $\mathcal{A}$-nak $\mathcal{B}$-re vonatkozó feltételes relatív gyakorisága sztochasztikusan konvergál $\mathcal{S}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$-hez.*

1. MEGJEGYZÉS. Ha $\mathcal{C}^{(N)} = \mathcal{C}$ nem függ $N$-től, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, és $\mathcal{S}(\mathcal{B}|\mathcal{C}) > 0$, akkor a tétel feltevései teljesülnek. Ha $\mathcal{C} = \mathcal{B}$, a tétel a nagy számok közönséges törvényére redukálódik.

2. MEGJEGYZÉS. A $\sum_{N=1}^{\infty} p_N = \infty$ feltétel azért természetes, mert $\sum_{N=1}^{\infty} p_N$ jelenti a $\mathcal{B}$ eseménynek az egész kísérletsorozat során való bekövetkezései számának $C$-re vonatkozó feltételes várható értékét. Ennélfogva $\sum_{N=1}^{\infty} p_N < \infty$ azt jelenti, hogy az esemény a $C$ feltétel mellett általában csak véges sokszor következik be és ebben az esetben a relatív gyakoriság határértékéről nem érdemes beszélni.

2. a. TÉTEL. *Ha az 1. tétel feltevései teljesülnek, továbbá teljesül még a következő feltevés is:**

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} p_n}{\log N} = \infty \tag{1}$$

*akkor*

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to\infty} \gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \mathcal{S}(\mathcal{A}|\mathcal{B}) \,|\, C\right) = 1,$$

*vagyis $\mathcal{A}$-nak $\mathcal{B}$-re vonatkozó feltételes relatív gyakorisága a $C$ feltétel mellett 1 valószínűséggel konvergál $\mathcal{S}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$-hez.*

1. MEGJEGYZÉS. Ha $\mathcal{C}^{(N)} = \mathcal{C}$ nem függ $N$-től, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ és $\mathcal{S}(\mathcal{B}|\mathcal{C}) > 0$, akkor a 2. a. tétel feltevései teljesülnek, hiszen $\frac{1}{\log N} \sum_{1}^{N} p_n = \mathcal{S}(\mathcal{B}|\mathcal{C}) \frac{N}{\log N} \to \infty$. Ha $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, akkor a 2. a. tétel a nagy számok közönséges erős törvényére redukálódik.

AZ 1. ÉS 2. a. TÉTELEK BIZONYÍTÁSA. Azt az eseményt, hogy az első $N$ kísérlet közül a $\mathcal{B}$ esemény az $i_1$-edik, $i_2$-edik, ..., $i_n$-edik kísérleteknél és csak ezeknél következett be, jelöljük $D^{(N)}_{i_1 i_2 \dots i_n}$-nel. A $D^{(N)}_{i_1 i_2 \dots i_n}$ feltétel mellett

$$\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{\vartheta_{i_1} + \vartheta_{i_2} + \cdots + \vartheta_{i_n}}{n},$$

* Az (1) feltevés nem szükséges a 2. a. tétel állításának teljesüléséhez; lásd a 2. b. tételt.

ahol a $\vartheta_k (k = 1, 2, \ldots, N)$ valószínűségi változók függetlenek és az 1 illetve 0 értéket veszi fel, aszerint, hogy a $k$-adik kísérletnél az $\mathcal{A}$ esemény bekövetkezik-e vagy sem; ennélfogva $\vartheta_k$ az 1 ill. 0 értéket $\mathcal{S}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ ill. $1-\mathcal{S}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ valószínűséggel veszi fel; bevezetve a $p = \mathcal{S}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ jelölést, annak a valószínűsége, hogy $|\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B}) - \mathcal{S}(\mathcal{A}|\mathcal{B})| > \varepsilon$ legyen, éppen $B_N(\varepsilon, p) = \sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|>\varepsilon} \binom{n}{k} p_k (1-p)^{n-k}$

Ilyen módon a 12. tétel szerint

$$\mathbf{P}(|\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B}) - \mathcal{S}(\mathcal{A}|\mathcal{B})| > \varepsilon | C) = \sum_{n=0}^{N} B_n(\varepsilon, p) \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} \mathbf{P}(D^{(N)}_{i_1 i_2 \ldots i_n} | C),$$

ahol a belső összegezés az $1, 2, \ldots, N$ számok közül kiválasztható összes lehetséges $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ $n$-edrendű kombinációkra terjesztendő ki. Könnyen belátható, hogy

$$\mathbf{P}(D^{(N)}_{i_1 i_2 \ldots i_n} | C) = \prod_{j=1}^{N} (1-p_j) \cdot \prod_{r=1}^{n} \frac{p_{i_r}}{1-p_{i_r}}.$$

Szükségünk lesz a következő egyszerű segédtételre:

1. LEMMA.* *Legyen* $0 < p < 1$, $q = 1-p$, $\varepsilon > 0$ *és*

$$B_n(\varepsilon, p) = \sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|>\varepsilon} \binom{n}{k} p^k q^{n-k};$$

*akkor*

$$B_n(\varepsilon, p) < 2\varrho^n,$$

*ahol* $\varrho = \varrho(\varepsilon, p)$ *nem függ* $n$*-től és* $0 < \varrho < 1$, *ha* $0 < \varepsilon < \frac{pq}{3}$.

BIZONYÍTÁS:** Mivel

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{\lambda(k-pn)} = (pe^{\lambda} + q)^n e^{-p\lambda n},$$

tehát

$$\left( \sum_{\frac{k}{n}-p>\varepsilon>0} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \right) e^{\lambda\varepsilon n} < (pe^{\lambda} + q)^n e^{-p\lambda n}$$

és

$$\left( \sum_{\frac{k}{n}-p<-\varepsilon<0} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \right) e^{\mu\varepsilon n} < (pe^{-\mu} + q)^n e^{p\mu n},$$

tehát

$$B_n(\varepsilon, p) < (pe^{(q-\varepsilon)\lambda} + qe^{-(p+\varepsilon)\lambda})^n + (pe^{-(q+\varepsilon)\mu} + qe^{(p-\varepsilon)\mu})^n, \tag{1}$$

ahol $\lambda > 0$ és $\mu > 0$.

* Ez a lemma, valamint e § többi lemmája közönséges valószínűségszámítási tételeket fejeznek ki, míg a § tételei az új axiómarendszerre vonatkoznak.

** Ennek a bizonyításnak a gondolatmenete Sz. N. BERNSTEIN-től származik. 1. [4].

Válasszuk most meg $\lambda$ és $\mu$ értékét úgy, hogy az (1) jobboldalán álló első, ill. második tagot minimalizáljuk. Nyilvánvaló, hogy ez akkor következik, be, ha*

$$\lambda = \log \frac{1+\frac{\varepsilon}{p}}{1-\frac{\varepsilon}{q}} \quad \text{és} \quad \mu = \log \frac{1+\frac{\varepsilon}{q}}{1-\frac{\varepsilon}{p}}.$$

Így azt kapjuk, hogy

$$B_n(\varepsilon, p) < \left\{\left(\frac{q}{q-\varepsilon}\right)^{q-\varepsilon}\left(\frac{p}{p+\varepsilon}\right)^{p+\varepsilon}\right\}^n + \left\{\left(\frac{p}{p+\varepsilon}\right)^{p+\varepsilon}\left(\frac{q}{q+\varepsilon}\right)^{q+\varepsilon}\right\}^n.$$

Figyelembe véve, hogy ha $\varepsilon < \frac{pq}{3}$, akkor

$$\log\left(\frac{q}{q-\varepsilon}\right)^{q-\varepsilon}\left(\frac{p}{p+\varepsilon}\right)^{p+\varepsilon} \leqq -\frac{\varepsilon^2}{3pq}$$

és

$$\log\left(\frac{p}{p-\varepsilon}\right)^{p-\varepsilon}\left(\frac{q}{q+\varepsilon}\right)^{q+\varepsilon} \leqq -\frac{\varepsilon^2}{3pq},$$

következik, hogy

$$B_n(\varepsilon, p) < 2\varrho^n,$$

ahol

$$0 < \varrho = e^{-\frac{\varepsilon^2}{3pq}} < 1 \qquad \left(0 < \varepsilon < \frac{pq}{3}\right).$$

A fenti lemma segítségével nyerjük, hogy

$$\mathbf{P}(|\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B}) - \mathcal{S}(\mathcal{A}|\mathcal{B})| > \varepsilon | C) < 2\prod_{j=1}^{N}(1 - p_j(1-\varrho)),$$

ahol $0 < \varrho < 1$.

Felhasználva az $1 - x \leqq e^{-x}$ egyenlőtlenséget, következik, hogy

$$\mathbf{P}(|\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B}) - \mathcal{S}(\mathcal{A}|\mathcal{B})| > \varepsilon | C) < 2e^{-(1-\varrho)\sum_{n=1}^{N} p_n}. \tag{2}$$

Mivel feltevésünk szerint $\sum_{n=1}^{N} p_n \to \infty$, ha $N \to \infty$, (2)-ből az 1. tétel állítása azonnal következik. A 2. a. tétel bizonyításához egy jólismert bizonyítási gondolat szerint elegendő kimutatni, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B}) - \mathcal{S}(\mathcal{A}|\mathcal{B})| > \varepsilon | C)$$

sor az $\varepsilon > 0$ szám minden választása mellett konvergens. Ez azonban nyilvánvalóan teljesül, ha

* log mindenütt a természetes logaritmust jelenti.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N}p_n}{\log N}=\infty.$$

Ezzel a 2. a. tételt bebizonyítottuk.

Könnyen belátható, hogy elegendő, ha a $\mathfrak{B}\subseteq\mathcal{C}^{(N)}$ feltevés $N\geqq N_0$-ra teljesül, nem szükséges, hogy $N_0=1$ legyen.

A 2. a. tételben az (1) feltevés valójában felesleges: a tétel érvényes pusztán azon feltétel mellett, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ divergens. Ennek bebizonyításához szükségünk lesz a következő segédtételre:

2. LEMMA: *Legyenek* $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ *teljesen független valószínűségi változók,* $\mathbf{M}(\xi_n)=0$ *és* $\mathbf{D}(\xi_n)=D_n$ $(n=1,2,\ldots)$, *legyen továbbá* $A_n$ $(n=1,2,\ldots)$, *egy olyan pozitív tagú, monoton növekvő számsorozat, amelyre* $\lim_{n\to\infty}A_n=+\infty$, $\frac{A_{n+1}}{A_n}\leqq c$, *ahol* $c>1$ *állandó és*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n^2}{A_n^2}<\infty; \tag{2}$$

*legyen továbbá*

$$\zeta_n=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n. \tag{3}$$

*Akkor*

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\zeta_n}{A_n}=0\right)=1.$$

BIZONYÍTÁS: A KOLMOGOROV-féle egyenlőtlenség* szerint, ha $\varepsilon>0$, akkor

$$\mathbf{P}\left(\max_{1\leqq n\leqq N}|\zeta_n|\geqq\varepsilon\right)\leqq\frac{\sum_{k=1}^{N}D_k^2}{\varepsilon^2}. \tag{4}$$

Ennélfogva, ha $N_0<N_1<\cdots<N_k<\cdots$ tetszőleges pozitív egész számokból álló számsorozat és $\varepsilon>0$, akkor

$$\mathbf{P}\left(\max_{N_k\leqq n\leqq N_{k+1}}\frac{|\zeta_n|}{A_n}\geqq\varepsilon\right)\leqq\mathbf{P}\left(\max_{n\leqq N_{k+1}}|\zeta_n|\geqq\varepsilon A_{N_k}\right)\leqq\frac{\sum_{j=1}^{N_{k+1}}D_j^2}{\varepsilon^2A_{N_k}^2}. \tag{5}$$

Most válasszuk meg az $N_k$ számsorozatot úgy, hogy teljesülnek az $A_1c^k<A_{N_k}\leqq c^{k+1}A_1$ $(k=0,1,2,\ldots)$ egyenlőtlenségek; hogy ez lehetséges, azt teljes indukcióval láthatjuk be. Mivel $A_1<A_2\leqq cA_1$, tehát $N_0$-nak választhatjuk az $N_0=2$ értéket; ha már $N_0,N_1,\ldots,N_k$ értékeit megválasztottuk, akkor, mivel

$$A_{N_k+1}\leqq cA_{N_k}\leqq c^{k+2}A_1,$$

tehát vannak olyan $n$ értékek, amelyekre $n>N_k$ és $A_n\leqq c^{k+2}A_1$; legyen $n=N_{k+1}$ a legnagyobb szám, amely ezekkel a tulajdonságokkal bír, akkor $A_{N_{k+1}}\leqq$

* Lásd pl. [5]. XI. fej.

$\leqq c^{k+2}A_1$ és $A_{N_{k+1}+1} > c^{k+2}A_1$; ebből azonban következik, hogy $A_{N_{k+1}} \geqq c^{k+1}A_1$, mert ha $A_{N_{k+1}} < A_1 c^{k+1}$ volna, akkor $\frac{A_{N_{k+1}+1}}{A_{N_{k+1}}} > c$ volna, ami ellentmond feltevéseinknek.

Legyen $S_n = \sum_{j=1}^{n} D_j^2$; könnyen belátható, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_{N_{k+1}}}{A_{N_k}^2} < \infty; \tag{6}$$

ugyanis

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_{N_{k+1}}}{A_{N_k}^2} = \sum_{j=1}^{\infty} D_j^2 \left( \sum_{N_{i+1} \geqq j} \frac{1}{A_{N_i}^2} \right)$$

és ha $N_{k_j} < j \leqq N_{k_j+1}$, akkor

$$\sum_{N_{i+1} \geqq j} \frac{1}{A_{N_i}^2} \leqq \frac{1}{A_1^2} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{c^{2i}} = \frac{c^2}{c^2-1} \frac{1}{A_1^2 c^{2k}} \leqq \frac{c^6}{c^2-1} \frac{1}{A_{N_{k_j+1}}^2} \leqq \frac{c^6}{c^2-1} \frac{1}{A_j^2},$$

tehát

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_{N_{k+1}}}{A_{N_k}^2} \leqq \frac{c^6}{c^2-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_j^2}{A_j^2} < \infty.$$

Ennélfogva tetszőleges $\delta > 0$ számhoz található olyan $r = r(\delta)$, hogy $\sum_{k=r}^{\infty} \frac{S_{N_{k+1}}}{A_{N_k}^2} < \delta$ és így

$$\mathbf{P}\left( \sup_{n \geqq N_r} \frac{|\zeta_n|}{A_n} \geqq \varepsilon \right) \leqq \sum_{k=r}^{\infty} \mathbf{P}\left( \max_{N_k \leqq n < N_{k+1}} \frac{|\zeta_n|}{A_n} \geqq \varepsilon \right) \leqq \sum_{k=r}^{\infty} \frac{S_{N_{k+1}}}{A_{N_k}^2} < \delta,$$

vagyis

$$\mathbf{P}\left( \lim_{n \to \infty} \frac{\zeta_n}{A_n} = 0 \right) = 1. \tag{7}$$

A 2. lemma egy másik lehetséges bizonyítása az alábbi J. HAJEKtől származó egyenlőtlenségen alapszik*:

2. b. LEMMA: *Legyenek* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *független valószínűségi változók* $\mathbf{M}(\xi_k) = 0$, $\mathbf{D}(\xi_k) = D_k$, $A_n$ *legyen egy pozitív és monoton növekvő számsorozat és tegyük fel, hogy* $A_n \to \infty$ *továbbá, hogy* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k^2}{A_k^2} < \infty$. *Legyen* $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ *és* $\varepsilon > 0$, *akkor*

$$\mathbf{P}\left( \sup_{k \geqq n} \frac{|\zeta_k|}{A_k} \geqq \varepsilon \right) \leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \left( \frac{\sum_{k=1}^{n} D_k^2}{A_n^2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{D_k^2}{A_k^2} \right).$$

* J. HAJEK ezt az egyenlőtlenséget az 1954. júniusában Prágában tartott Matematikai Statisztikai Konferencián közölte velem, és azt szíves hozzájárulásával közlöm; az itt adott bizonyítás HAJEK eredeti bizonyításánál egyszerűbb.

A 2. b. LEMMA BIZONYÍTÁSA: Legyen

$$\eta_n = \sum_{k=n}^{\infty} \zeta_k^2 \left( \frac{1}{A_k^2} - \frac{1}{A_{k+1}^2} \right).$$

Akkor

$$\mathbf{M}(\eta_n) = \frac{\sum_{k=1}^{n} D_k^2}{A_n^2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{D_k^2}{A_k^2}. \tag{1}$$

Jelölje $E_m$ $(m = n, n+1, \ldots)$ azt az eseményt, hogy a $\left|\frac{\zeta_k}{A_k}\right|$ számok közül $(k = n, n+1, \ldots)$ $\left|\frac{\zeta_m}{A_m}\right|$ az első, amely nagyobb (vagy egyenlő) mint $\varepsilon$. Legyen $E = \sum_{m=n}^{\infty} E_m$. Akkor

$$\mathbf{M}(\eta_n) = \sum_{m=n}^{\infty} \mathbf{M}(\eta_n | E_m)\, \mathbf{P}(E_m) + \mathbf{M}(\eta_n | \bar{E})\, \mathbf{P}(\bar{E}) \geqq \sum_{m=n}^{\infty} \mathbf{M}(\eta_n | E_m)\, \mathbf{P}(E_m).$$

Mivel

$$\mathbf{M}(\eta_n | E_m) = \mathbf{M}\left( \sum_{k=n}^{\infty} \zeta_k^2 \left( \frac{1}{A_k^2} - \frac{1}{A_{k+1}^2} \right) \middle| E_m \right) \geqq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{M}(\zeta_k^2 | E_m) \left( \frac{1}{A_k^2} - \frac{1}{A_{k+1}^2} \right).$$

Másrészt, ha $k \geqq m$, $\zeta_k = \zeta_m + \zeta_k - \zeta_m$, és így

$$\mathbf{M}(\zeta_k^2 | E_m) = \mathbf{M}(\zeta_m^2 + 2\zeta_m(\zeta_k - \zeta_m) + (\zeta_k - \zeta_m)^2 | E_m) \geqq$$
$$\geqq \mathbf{M}(\zeta_m^2 + 2\zeta_m(\zeta_k - \zeta_m) | E_m).$$

Mivel $\zeta_k - \zeta_m$ független a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ változóktól, tehát $\zeta_k - \zeta_m$ független $\zeta_m$-től, a csak a $\xi_1, \ldots, \xi_m$ változók értékeire vonatkozó $E_m$ feltevés mellett is, ennélfogva $\mathbf{M}(\zeta_m(\zeta_k - \zeta_m) | E_m) = 0$ és így

$$\mathbf{M}(\zeta_k^2 | E_m) \geqq \mathbf{M}(\zeta_m^2 | E_m) \qquad \text{ha } k \geqq m.$$

Másrészt az $E_m$ feltevés mellett $|\zeta_m| \geqq A_m \varepsilon$ és így

$$\mathbf{M}(\zeta_k^2 | E_m) \geqq \mathbf{M}(\zeta_m^2 | E_m) \geqq \varepsilon^2 A_m^2.$$

Ilyenmódon

$$\mathbf{M}(\eta_n | E_m) \geqq \varepsilon^2 A_m^2 \sum_{k=m}^{\infty} \left( \frac{1}{A_k^2} - \frac{1}{A_{k+1}^2} \right) = \varepsilon^2$$

tehát

$$\mathbf{M}(\eta_n) \geqq \varepsilon^2 \sum_{m=n}^{\infty} \mathbf{P}(E_m) = \varepsilon^2 \mathbf{P}(E) = \varepsilon^2 \mathbf{P}\left( \sup_{k \geqq n} \left| \frac{\zeta_k}{A_k} \right| \geqq \varepsilon \right) \tag{2}$$

(1)-ből és (2)-ből a 2b. lemma állítása már következik. Figyelembe véve, hogy ha $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{D_k^2}{A_k^2} < \infty$ és $A_n \to \infty$, akkor $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{D_k^2}{A_k^2} = 0$, a 2b. lemmából a 2. lemma állítása már következik.

A 2. lemma segítségével először kimutatjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to\infty}\frac{\eta_N(\mathfrak{B})}{\sum_{n=1}^{N}p_n}=1\,\middle|\,C\right)=1.$$

Ez a következőképpen látható be: a $C$ feltétel mellett $\eta_N(\mathfrak{B})=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_N$, ahol az $\eta_k$ változók függetlenek és $\mathbf{P}(\eta_k=1)=p_k$, $\mathbf{P}(\eta_k=0)=1-p_k$; tehát $\mathbf{M}(\eta_k)=p_k$. Legyen $\eta_k^*=\eta_k-p_k$; akkor $\mathbf{M}(\eta_k^*)=0$ és $\mathbf{D}(\eta_k^*)=\sqrt{p_k(1-p_k)}$. Az $\eta_k^*$ változókra alkalmazható a 2. lemma, ha abban $A_n=\sum_{k=1}^{n}p_k$; ugyanis feltevésünk szerint $A_n=\sum_{k=1}^{n}p_k\to\infty$ és $A_{n+1}\geqq A_n$, másrészt

$$\frac{A_{n+1}}{A_n}=1+\frac{p_n}{A_n}\leqq 1+\frac{1}{A_n}\leqq 1+\frac{1}{A_1}=c;$$

végül pedig

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n^2}{A_n^2}=\sum_{n=1}^{n}\frac{p_n(1-p_n)}{A_n^2}\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{A_nA_{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{A_{n-1}}-\frac{1}{A_n}\right),$$

tehát a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n^2}{A_n^2}$ sor valóban konvergál; ennélfogva

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{1}^{n}\eta_k^*}{\sum_{1}^{n}p_k}=0\,\middle|\,C\right)=1.$$

Mivel

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\eta_k^*}{\sum_{k=1}^{n}p_k}=0\,\middle|\,C\right)=\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\eta_k}{\sum_{k=1}^{n}p_k}=1\,\middle|\,C\right)=$$

$$=\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\eta_N(\mathfrak{B})}{\sum_{1}^{n}p_k}=1\,\middle|\,C\right),$$

tehát

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\eta_N(\mathfrak{B})}{\sum_{1}^{n}p_k}=1\,\middle|\,C\right)=1. \tag{8}$$

Hasonlóképpen látható be, a 2. lemma segítségével, hogy

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to\infty}\frac{\eta_N(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{\mathfrak{P}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})\sum_{n=1}^{N}p_n}=1\,\middle|\,C\right)=1 \tag{9}$$

(8)-ból és (9)-ből azonban következik, hogy

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to\infty}\frac{\eta_N(\mathcal{A}\mathcal{B})}{\eta_N(\mathcal{B})}=\mathcal{S}(\mathcal{A}|\mathcal{B})\,\middle|\,C\right)=1. \tag{10}$$

Ilyenmódon a következő tételt bizonyítottuk be:

2. b. TÉTEL. *Az 1. tétel feltevései mellett*

$$\mathbf{P}(\lim_{N\to\infty}\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B})=\mathcal{S}(\mathcal{A}|\mathcal{B})|C)=1,$$

*vagyis $\mathcal{A}$-nak $\mathcal{B}$-re vonatkozó feltételes relatív gyakorisága a $C$ feltétel mellett 1 valószínűséggel konvergál $\mathcal{A}$-nak $\mathcal{B}$-re vonatkozó feltételes valószínűségéhez, hacsak* $C=\mathcal{C}^{(1)}*\mathcal{C}^{(2)}*\cdots$, $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{C}^{(N)}$ $(N=1,2,\ldots)$ *és*

$$\sum_{N=1}^{\infty}\mathcal{S}(\mathcal{B}|\mathcal{C}^{(N)})=\infty. \tag{11}$$

MEGJEGYZÉS. A bizonyításból látszik (lásd (8)-at), hogy a (11) feltevés azt jelenti, hogy a $\mathcal{B}$ esemény a kísérletsorozat során 1 valószínűséggel végtelen sokszor következik be; ebben az értelemben a (11) feltétel természetes, hiszen, ha (11) nem teljesül, akkor a $\mathcal{B}$ esemény a kísérletsorozat során 1 valószínűséggel csak véges sokszor következik be, és így a feltételes relatív gyakoriság határértékéről tulajdonképpen nem érdemes beszélni, mivel a $\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ $(N=1,2,\ldots)$ számsorozat 1 valószínűséggel valahonnét kezdve állandó. Nyilvánvaló továbbá, hogy a 2. b. tétel állítása különösen abban az esetben figyelemreméltó, amikor $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}p_n=0$; ez esetben ugyanis

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to\infty}\frac{\eta_N(B)}{N}=0\,\middle|\,C\right)=1,$$

vagyis a $B$ esemény relatív gyakorisága 1 valószínűséggel 0-hoz tart, és így a feltételes relatív gyakoriságra vonatkozó állítás nem pótolható a közönséges relatív gyakoriságra vonatkozó állítással.

Érdemes megemlíteni a 2. b. tétel egy számelméleti következményét.

Ismeretes, hogy a (0, 1) intervallumban fekvő $x$ valós számok előállíthatók az

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n(x)}{q_1q_2\ldots q_n}$$

CANTOR-féle sorokkal,* ahol $q_n\geqq 2$ egész és $\varepsilon_n(x)$ a $0,1,\ldots,q_n-1$ értékeket veheti fel; az $\varepsilon_n(x)$ számok egyértelműleg meg vannak határozva, kivéve, ha $x$ racionális szám, amely előállítható $x=\sum_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon_n(x)}{q_1q_2\ldots q_n}$ alakban $(\varepsilon_n(x)>0)$; ez esetben lehetséges az

$$x=\sum_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon_n(x)}{q_1q_2\ldots q_n}+\frac{\varepsilon_N(x)-1}{q_1q_2\ldots q_N}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{q_n-1}{q_1q_2\ldots q_n}$$

* L. pl. O. PERRON, Irrationalzahlen, W. de Gruyter, Berlin, 1921, 111—116.

előállítás is; állapodjunk meg, hogy ez esetben mindig a véges előállítást választjuk. Jelölje $\eta_N(x; k_1, k_2, \ldots, k_s)$ az $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_N(x)$ számok közül azok számát, amelyek a $k_1, k_2, \ldots, k_s$ nemnegatív egész számok valamelyikével egyenlők. A 2. b. tétel következményeképpen adódik, hogy ha teljesülnek a következő feltevések:

1) $$q_n \geqq \max(k_1, k_2, \ldots, k_s), \quad \text{ha} \quad n \geqq n_0;$$

és

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} = +\infty,$$

akkor majdnem minden $x$-re

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\eta_N(x; k_i)}{\eta_N(x; k_1, k_2, \ldots, k_s)} = \frac{1}{s} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{12}$$

vagyis *a $k_1, k_2, \ldots, k_s$ számok feltételes relatív gyakoriságai majdnem minden valós szám* CANTOR*-féle sorában határértékben egyenlők, feltéve, hogy teljesülnek az* 1) *és* 2) *feltevések.*

Ez nyilvánvalóan BOREL híres tételének* az általánosítása: ha $q_n = q$ nem függ $n$-től, akkor speciális esetként nyerjük a BOREL-tételt.

Az előbb bebizonyított tételek messzemenően általánosíthatók, amennyiben érvényes a következő:

3. TÉTEL. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ tetszőleges, egyforma $[\mathfrak{H}, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{S}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})]$ feltételes eloszlásrendszerű, ezen eloszlásrendszerek $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1^*, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ végtelen szorozatterében a 1. §. 16. tétele értelmében $\mathbf{T}_2$-re nézve független valószínűségi változók. Legyen $\mathfrak{B} \in \mathfrak{T}_2$ és jelölje $\mathbf{M}(\xi|\mathfrak{B})$ a $\xi_k$ változók (közös) feltételes várható értékét a $\mathfrak{B}$ feltétel mellett; legyen $C = \mathfrak{C}^{(1)} * \mathfrak{C}^{(2)} * \ldots \in \mathbf{T}_2$ $(\mathfrak{C}^{(k)} \in \mathfrak{T}_2)$ továbbá $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Legyen $p_N = \mathfrak{S}(\mathfrak{B}|\mathfrak{C}^{(N)})$ és tegyük fel, hogy teljesül a $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty$ feltétel. Jelölje $\zeta_N(\xi|\mathfrak{B})$ a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ változók $\mathfrak{B}$-re vonatkozó feltételes empirikus középértékét, vagyis legyen*

$$\zeta_N(\xi|\mathfrak{B}) = \frac{\xi_{i_1} + \xi_{i_2} + \cdots + \xi_{i_n}}{n} \qquad (n = \eta_N(\mathfrak{B})) \tag{13}$$

*ahol $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_n}$ jelentik a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ változók közül azokat, amelyek értéke $\mathfrak{B}$-be esik. Ha a $\xi_k$ változók korlátosak, $|\xi_k| \leqq K$ és $\varepsilon > 0$, akkor*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(|\zeta_N(\xi|\mathfrak{B}) - \mathbf{M}(\xi|\mathfrak{B})| < \varepsilon | C) = 0.$$

4. a. TÉTEL: *A 3. tétel feltételei mellett, ha még teljesül a*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} p_n = +\infty$$

* E. Borel, Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, Rend. Circ. Math. Palermo 27 (1909), 247—271.

*feltétel is,*

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to\infty}\zeta_N(\xi|\mathfrak{B}) = \mathbf{M}(\xi|\mathfrak{B})\,|\,C\right) = 1.$$

MEGJEGYZÉS: *Ha a $\xi_n$ változók csak a 0 és 1 értéket veszik fel, akkor a 3. és 4. a. tétel speciális eseteként az 1., ill. 2. a. tételek adódnak.*

BIZONYÍTÁS: Lényegében ugyanazzal az (Sz. N. BERNSTEIN-tól származó) gondolatmenettel, amellyel az 1. lemmát bebizonyítottuk, belátható a következő segédtétel is:

3. LEMMA: *Ha a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ változók egyforma eloszlásúak, teljesen függetlenek és korlátosak, $\mathbf{M}(\xi_k) = M$, $|\xi_k - M| \leqq K$ $(k = 1, 2, \ldots)$ és szórásuk $\mathbf{D}(\xi_k) = D$ véges, akkor*

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n} - M\right| > \varepsilon\right) < 2\varrho^n,$$

*ahol*

$$\varrho = e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\left(D+\frac{\varepsilon K}{2D}\right)^2}}, \text{ ha } \varepsilon < pq.$$

*A* 3. lemma bizonyítása megtalálható pl. [5]-ben (XI. fejezet 4. §.) A 3. lemma segítségével a 3. és 4. a. tételek ugyanúgy bizonyíthatók, mint az 1. lemma segítségével az 1. és 2. a. tételek, ezért a bizonyítást nem részletezzük.

A 4. a. tételben szereplő $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\log N}\sum_{n=1}^{N} p_n = +\infty$ feltevés nem szükséges a tétel állításának teljesüléséhez, sőt a $\xi_k$ változók korlátossága sem szükséges; elegendő feltenni, hogy $\mathbf{M}(\xi|\mathfrak{B})$ és $\mathbf{D}(\xi|\mathfrak{B})$ léteznek, vagyis érvényes a következő

4. b. TÉTEL *Az 1. tétel feltevései mellett (kivéve a $\xi_k$ korlátosságára vonatkozó feltevést) ha $\mathbf{M}(\xi|\mathfrak{B})$ és $\mathbf{D}(\xi|\mathfrak{B})$ létezik, akkor*

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to\infty}\zeta_n(\xi|\mathfrak{B}) = \mathbf{M}(\xi|\mathfrak{B})\,|\,C\right) = 1.$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $\eta_n = 1$, ha $\xi_n \in \mathfrak{B}$ és $\eta_n = 0$, ha $\xi_n \overline{\in} \mathfrak{B}$, továbbá legyen $\xi_n^* = \eta_n\xi_n$, akkor $\mathbf{M}(\xi_n^*) = p_n\mathbf{M}(\xi|\mathfrak{B})$ és

$$\mathbf{D}^2(\xi_n^*) = p_n\mathbf{D}^2(\xi|\mathfrak{B}) + p_n(1-p_n)\mathbf{M}^2(\xi|\mathfrak{B}).$$

Ennélfogva, ha $A_n = \sum_{n=1}^{N} p_n$, akkor az $A_{n+1} \geqq A_n$, $\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$, $\frac{A_{n+1}}{A_n} \leqq 1 + \frac{1}{A_1} = c$ feltételek teljesülnek és teljesül a $\frac{\sum \mathbf{D}^2(\xi_n^*)}{A_n^2} < +\infty$ feltevés is; vagyis alkalmazható a $\xi_n^{**} = \xi_n^* - \mathbf{M}(\xi_n^*)$ változókra és az $A_n$ sorozatra a 2. lemma, és így kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N}\xi_n^{**}}{\sum_{n=1}^{N} p_n} = 0 \,\middle|\, C\right) = 1,$$

vagyis

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N}\xi_n^*}{\sum_{n=1}^{N}p_n}=\mathbf{M}(\xi|\mathfrak{B})\,\middle|\,C\right)=1. \tag{14}$$

Mivel a (8) szerint

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to\infty}\frac{\eta_N(\mathfrak{B})}{\sum_{n=1}^{N}p_n}=1\,\middle|\,C\right)=1 \tag{15}$$

(14)-ből és (15)-ből következik, hogy

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N}\xi_n^*}{\eta_N(\mathfrak{B})}=\mathbf{M}(\xi|\mathfrak{B})\,\middle|\,C\right)=1. \tag{16}$$

Tekintve, hogy $\zeta_N(\xi|\mathfrak{B})=\dfrac{\sum_{n=1}^{N}\xi_n^*}{\eta_N(\mathfrak{B})}$, ezzel a 4. b. tételt bebizonyítottuk.

Nyilvánvaló, hogy ha $\mathcal{C}^{(N)}=\mathfrak{B}$ $(N=1,2,\ldots)$, akkor a 4. a., ill. 4. b. tételek speciális eseteként a nagy számok közönséges törvényeit kapjuk. Ha $\xi_n$ csak az 1 és 0 értékeket veszi fel, mégpedig $\xi_n=\xi_n(a)=1$, ha $a\in\mathcal{A}$, akkor a 4. b. tétel a 2. b. tételre redukálódik.

Ezen § tételeit mind feltételes valószínűségi mezők szorzataira mondottuk ki, mivel a tételek feltételei így a legszemléletesebbek, és e fogalmazás egyben evidenssé teszi, hogy a szóbanforgó tételek feltételeinek megfelelő valószínűségi mezők valóban léteznek. E tételek érvényességéhez azonban egyáltalán nem szükséges, hogy a szóbanforgó valószínűségi mező ilyen módon legyen megkonstruálva. E tételek bizonyításánál ugyanis ez a tény nincsen lényegesen kihasználva. Ilyenmódon e § tételei mind általánosíthatók. Nyilvánvalóan elegendő a 4. b. tételt kimondani ebben az általános alakban, mivel az e § összes többi tételeit tartalmazza. A 4. b. tétel szóbanforgó általánositása a következő:

4. c. TÉTEL: *Legyen* $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ *egy feltételes valószínűségi mező, legyenek* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *ezen a mezőn értelmezett, és* $\mathbf{T}_2$*-re nézve független valószínűségi változók, amelyek ugyanazzal a* $[\mathcal{H}, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathfrak{B})]$ *feltételes eloszlásrendszerrel bírnak, legyen* $\mathfrak{B}\in\mathcal{T}_2$*, és legyen* $B_n\in\mathbf{T}_2$ *az a halmaz, amelyen* $\xi_n\in\mathfrak{B}$*. Legyen* $C\in\mathbf{T}_2$*, tegyük fel, hogy* $B_n\subseteq C$ $(n=1,2,\ldots)$*; legyen* $p_n=\mathbf{P}(B_n|C)$ *és tegyük fel, hogy teljesül a* $\sum_{n=1}^{\infty}p_n=+\infty$ *feltétel. Tegyük fel, hogy* $\mathbf{M}(\xi_k|B_k)=\mathbf{M}(\xi_k|\xi_k\in\mathfrak{B})=M$ *és* $\mathbf{D}(\xi_k|B_k)=\mathbf{D}(\xi_k|\xi_k\in\mathfrak{B})$ *léteznek. Akkor*

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{\substack{\xi_k\in\mathfrak{B}\\ 1\leqq k\leqq n}}\xi_k}{\sum\limits_{\substack{\xi\in\mathfrak{B}\\ 1\leqq k\leqq n}}1}=M\,\middle|\,C\right)=1.$$

MEGJEGYZÉS: *Ahelyett, hogy* $B_n\subseteq C$ $(n=1,2,\ldots)$ *elegendő feltenni, hogy ha* $\mathfrak{B}'\subseteq\mathfrak{B}$ *és* $B_n'$ *az a halmaz amelyen* $\xi_n\in\mathfrak{B}'$, *akkor* $\mathbf{P}(B_n'|B_nC)=\mathbf{P}(B_n'|B_n)$ $(n=1,2,\ldots)$. *Ha így fogalmazzuk meg, a 4. c. tétel speciális esetként tartalmazza a 4. b. tételt.*

A 4. b. tétel bizonyításából az is látható, hogy ha a változók feltételes eloszlásrendszerei nem azonosak, de egyébként a 4. c. tétel feltételei teljesülnek, kivéve azt, hogy $\mathbf{D}(\xi_k|\mathfrak{B})=D_k$ nem függ $k$-tól, akkor a 4. c. tétel állításának érvényessége abban az esetben mutatható ki, ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{p_kD_k^2}{\left(\sum\limits_{j=1}^{k}p_j\right)^2}$ sor konvergens. Ilyen módon tehát érvényes a következő

4. d. TÉTEL. *Ha a 4. c. tétel feltevései teljesülnek, kivéve azt, hogy a* $\xi_k$ *változók egyforma feltételes eloszlásrendszerrel bírnak,* $\mathbf{M}(\xi_k|\mathfrak{B})=M$ *és* $\mathbf{D}(\xi_k|\mathfrak{B})=D_k$, *akkor a 4. c. tétel állítása érvényben marad, hacsak teljesül még a*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_kD_k^2}{\left(\sum\limits_{j=1}^{k}p_j\right)^2}<+\infty$$

*feltétel.*

## 3. §. *Határeloszlástételek*

Először a következő tételt bizonyítjuk be:

1. TÉTEL: *A* $[\mathsf{H},\mathbf{T}_1^*,\mathbf{T}_2\mathbf{P}(A|B)]=[\mathcal{H},\mathfrak{T}_1,\mathfrak{T}_2,\mathfrak{P}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})]^{\infty*}$ *feltételes valószínűségi mezőn a 16. tétel értelmében értelmezett* $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ *valószínűségi változókról, amelyek tehát egyforma* $[\mathcal{H},\mathfrak{T}_1,\mathfrak{T}_2,\mathfrak{P}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})]$ *feltételes eloszlásrendszerrel bírnak, és* $T_2$*-re nézve függetlenek, tegyük fel, hogy* $\mathbf{M}(\xi_n|\mathfrak{B})=0$ *és* $\mathbf{D}(\xi_n|\mathfrak{B})=D$ *véges* $(n=1,2,\ldots)$; *továbbá legyen*

$$C=\mathfrak{C}^{(1)}*\mathfrak{C}^{(2)}*\ldots*\mathfrak{C}^{(N)}*\ldots\in\mathbf{T}_2,$$

*ahol* $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{C}^{(N)}$ $(N=1,2,\ldots)$ $\mathfrak{P}(\mathfrak{B}|\mathfrak{C}^{(N)})=p_N$ *és* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n=+\infty$. *Akkor képezve a*

$$\zeta_N(\xi|\mathfrak{B})=\frac{\sum\limits_{k=1}^{N}\vartheta_B(\xi_k)}{D\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{N}p_k}}$$

*változót, ahol*

$$\vartheta_{\mathfrak{B}}(x)=\begin{cases} x, & ha \quad x\in\mathfrak{B} \\ 0, & ha \quad x\overline{\in}\mathfrak{B} \end{cases}$$

*(tehát* $\sum_{k=1}^{N}\vartheta_{\mathfrak{B}}(\xi_k)$ *a* $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N$ *változók közül azok összegével egyenlő, amelyek értéke* $\mathfrak{B}$*-be esik), érvényes a*

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{P}(\zeta_N(\xi|\mathfrak{B})<x|C)=\Phi(x)$$

*reláció, ahol*

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $F(x)=F(x|\mathfrak{B})$ a $\xi_k$ változók feltételes eloszlásfüggvénye a $\mathfrak{B}$ feltétel mellett, és $F_n(x)$ az $F(x)$ függvény önmagával való $n$-szeres kompozíciója; legyen a rövidség kedvéért $\sum_{n=1}^{N}p_n=Q_N$ $(N=1,2,\ldots)$; akkor $\zeta_N(\xi|\mathfrak{B})$ eloszlásfüggvénye

$$\sum_{n=0}^{N}\tau_n^{(N)}F_n(xD\sqrt{Q_N}) \qquad (F_0(x)\equiv 1 \text{ per. def.})$$

ahol

$$\tau_n^{(N)}=\sum_{k=1}^{N}(1-p_k)\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\prod_{r=1}^{n}\left(\frac{p_{i_r}}{1-p_{i_r}}\right)$$

annak a valószínűsége, hogy a $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N$ változók közül pontosan $n$-nek az értéke esik $\mathfrak{B}$-be. Jelölje $\psi_N(t)$ a $\vartheta_N(\xi|\mathfrak{B})$ változó $\mathfrak{R}$ feltétel melletti (feltételes) karakterisztikus függvényét és $\varphi(t)$ a $\xi_k$ változók $\mathfrak{B}$ feltétel melletti (feltételes) karakterisztikus függvényét, akkor

$$\psi_N(t)=\sum_{n=0}^{N}\tau_n^{(N)}\left(\varphi\left(\frac{t}{D\sqrt{Q_N}}\right)\right)^n$$

és így

$$\psi_N(t)=\prod_{k=1}^{N}\left(1+p_k\left(\varphi\left(\frac{t}{D\sqrt{Q_N}}\right)-1\right)\right).$$

Mivel feltevés szerint $\varphi'(0)=0$ és $\varphi''(0)=-\frac{D^2}{2}$ és $\lim_{N\to\infty}Q_N=\infty$, tehát

$$\psi_N(t)=e^{-\frac{t^2}{2}+o(1)}$$

és így

$$\lim_{N\to\infty}\psi_N(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Ebből a tétel állítása már következik.

A centrális határeloszlástétel érvényességéhez nem szükséges az a feltevés, hogy a $\xi_k$ változók (feltételes) eloszlásai megegyezzenek. Érvényes ugyanis a következő

2. a. TÉTEL: *Legyen a* $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1^*, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ *feltételes valószínűségi mező a* $[\mathcal{H}^{(k)}, \mathcal{T}_1^{(k)}, \mathcal{T}_2^{(k)}, \mathcal{S}^{(k)}(\mathcal{A}^{(k)}|\mathcal{B}^{(k)})]$ *feltételes valószínűség-eloszlásrendszerek szorzata, és a* $\xi_k$ *változókat értelmezzük a 16. tételnek megfelelően, (tehát* $\xi_k$ *feltételes eloszlásrendszere* $[\mathcal{H}^{(k)}, \mathcal{T}_1^{(k)}, \mathcal{T}_2^{(k)}, \mathcal{S}^{(k)}(\mathcal{A}^{(k)}|\mathcal{B}^{(k)})]$ *és a* $\xi_k$ *változók* $\mathbf{T}_2$*-re nézve függetlenek). Legyen* $C = \mathcal{C}^{(1)} * \mathcal{C}^{(2)} * \ldots \in \mathbf{T}_2$, *ahol* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}^{(N)} \in \mathcal{T}_2^{(N)}$ $(N = 1,2,\ldots)$, *továbbá* $\mathcal{S}(\mathcal{B}|\mathcal{C}^{(N)}) = p_N$, $\mathbf{M}(\xi_k|\mathcal{B}) = 0$ *és* $\mathbf{D}(\xi_k|\mathcal{B}) = D_k$. *Vezessük be a*

$$\mathbf{M}(|\xi_k|^3|\mathcal{B}) = L_k^3$$

*jelölést, és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{N} p_k L_k^3}{\left(\sum_{k=1}^{N} p_k D_k^2\right)^{3/2}} = 0.$$

*Legyen*

$$\vartheta_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(x) = \begin{cases} x, & ha \quad x \in \mathcal{B} \\ 0, & ha \quad x \bar{\in} \mathcal{B} \end{cases}$$

*akkor*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left( \frac{\sum_{k=1}^{N} \vartheta_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\xi_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N} p_k D_k^2}} < x \,\middle|\, C \right) = \Phi(x).$$

BIZONYÍTÁS: A $\vartheta_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\xi_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ változók nyilvánvalóan $C$-re nézve függetlenek egymástól, továbbá

$$\mathbf{M}(\vartheta_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\xi_k)|C) = 0$$
$$\mathbf{D}^2(\vartheta_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\xi_k)|C) = p_k D_k^2$$
$$\mathbf{M}(|\vartheta_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\xi_k)|^3|C) = p_k L_k^2$$

és így *Ljapunov* tételének összes* feltételei teljesülnek $C$-re nézve. Ebből a tétel állítása következik.

A most bebizonyított tétel *Ljapunov* tételének egyenes általánosítása feltételes valószínűségi mezőkre. Ez az általánosítás *Lindeberg* tételére vonatkozólag is elvégezhető. *Lindeberg* tételének ezt az általánosítását úgy fogalmazzuk meg, hogy függetlenítjük a szóban forgó valószínűségi mező szorzatként való konstrukciójától, ami itt ugyanúgy nem szükséges a tétel érvényességéhez, mint a nagy számok törvénye esetében. Így nyerjük a következő tételt:

2. b. TÉTEL: *Legyen* $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ *egy feltételes valószínűségi mező, legyenek* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *ezen értelmezett és* $\mathbf{T}_2$*-re nézve független valószínűségi változók,* $\xi_k$ *feltételes eloszlásrendszere legyen* $[\mathcal{H}^{(k)}, \mathcal{T}_1^{(k)}, \mathcal{T}_2^{(k)}, \mathcal{S}^{(k)}(\mathcal{A}|\mathcal{B})]$. *Legyen* $\mathcal{B}$ *egy* BOREL*-halmaz, amely az összes* $\mathcal{T}_2^{(k)}$ *halmazrendszerekhez hozzátartozik, jelölje* $\mathcal{J}_x$ *a* $(-\infty, x)$ *intervallumot és legyen* $F_k(x|\mathcal{B}) = \mathcal{S}^{(k)}(\mathcal{J}_x|\mathcal{B})$ $(-\infty < x < \infty)$ $\xi_k$ *feltételes eloszlásfüggvénye* $\mathcal{B}$*-re nézve. Tegyük fel, hogy*

* Lásd pl. [5]. XIII. fej.

$\mathbf{M}(\xi_k|\mathfrak{B})=0$ *és* $\mathbf{D}(\xi_k|\mathfrak{B})=D_k$ *létezik; legyen* $C\in\mathbf{T}_2$, *jelölje* $B_k$ *azt a halmazt, amelyen* $\xi_k\in\mathfrak{B}$ *és tegyük fel, hogy* $\prod_{k=1}^{\infty} B_k\subseteq C$. *Legyen* $\mathbf{P}(B_k|C)=p_k$ *és vezessük be az*

$$S_n=\sqrt{\sum_{k=1}^{n} p_k D_k^2}$$

*jelölést. Legyen* $\zeta_n=\sum_{\substack{\xi_k\in\mathfrak{B}\\ 1\leqq k\leqq n}}\xi_k$. *Akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy* $\frac{\zeta_n}{S_n}$ *C-re vonatkozó feltételes eloszlása a standardizált normális eloszláshoz konvergáljon, az, hogy minden pozitív* $\varepsilon$*-ra teljesüljön a*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n^2}\sum_{k=1}^{n} p_k\int_{|x|>\varepsilon S_n} x^2\,dF_k(x|\mathfrak{B})=0$$

*feltétel.*

Ellentétben a 2. a. tétellel, (amelyből az 1. tétel nem következik, hiszen az 1. tétel feltételeiből $\mathbf{M}(|\xi_k|^3|\mathfrak{B})$ létezése sem következik), a 2. b. tétel tartalmazza speciális esetként az 1. tételt. Ugyanis ha $[\mathsf{H},\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2,\mathbf{P}(A|B)=$ $=[\mathcal{H},\mathfrak{T}_1,\mathfrak{T}_2,\mathfrak{P}(\mathcal{A}|\mathfrak{B})]^{\infty *}$ és $C=\mathcal{C}^{(1)}*\mathcal{C}^{(2)}*\ldots$, akkor a $\prod_{k=1}^{\infty} B_k\subseteq C$ feltétel azt jelenti, hogy $\mathfrak{B}\subseteq\mathcal{C}^{(k)}$ $(k=1,2,\ldots)$, továbbá $p_k=\mathbf{P}(B_k|C)=\mathfrak{P}(\mathfrak{B}|\mathcal{C}^{(k)})$ $D_k=\mathbf{D}(\xi_k|\mathfrak{B})=D$ és $F_k(x|\mathfrak{B}=F(x|\mathfrak{B})$ nem függ $k$-tól és így

$$S_n=D\sqrt{\sum_{k=1}^{n} p_k}.$$

Ennélfogva ha $\varepsilon>0$, akkor

$$\frac{1}{S_n^2}\sum_{k=1}^{n} p_k\int_{|x|>\varepsilon S_n} x^2\,dF_k(x|\mathfrak{B})=\frac{1}{D^2}\int_{|x|>\varepsilon S_n} x^2\,dF(x|\mathfrak{B})\to 0$$

mivel $S_n\to\infty$. Az 1. tétel tehát így is bizonyítható. A közvetlen elemi bizonyítás, amelyet fentebb adtunk, azonban nyilvánvalóan egyszerűbb.

Tegyük fel, hogy a következőkben a szóban forgó feltételes valószínűségi mérték *tökéletes*, vagyis eleget tesz a következő feltevéseknek:*

1) Ha $A_1\subseteq A_2$ és $A_2\in\mathbf{T}_1$, továbbá $B\in\mathbf{T}_2$ és $\mathbf{P}(A_2|B)=0$, akkor $BA_1\in\mathbf{T}_1$ (és így $\mathbf{P}(A_1|B)=0$).

2) Ha $\xi=\xi(a)$ egy valószínűségi változó, a $\xi(a)\in\mathcal{A}$ feltétellel definiált halmaz $\mathbf{T}_1$-hez tartozik, és $B\in\mathbf{T}_2$, akkor

$$\mathbf{P}(\xi(a)\in\mathcal{A}|B)=\inf_{\mathcal{A}\subseteq\mathcal{H}}\mathbf{P}(\xi(a)\in\mathcal{H}|B)$$

* A tökéletes Kolmogorov-féle valószínűségi mező fogalmára vonatkozólag lásd [6].

ahol $\mathfrak{N}$ nyílt halmaz; vagyis $\mathbf{P}(\xi \in \mathfrak{A} | B)$ egyenlő a $\mathbf{P}(\xi \in \mathfrak{N} | B)$ számok legnagyobb alsó korlátjával, ha $\mathfrak{N}$ végigfut az összes, az $\mathfrak{A}$ halmazt tartalmazó nyílt halmazokon.

Ez esetben érvényes a következő tétel:

3. TÉTEL: *Ha* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ a $[H, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ *tökéletes feltételes valószínűségi mezőn értelmezett és egy* $C \in T_2$ *halmazra nézve teljesen független változók,* $\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, $\mathbf{M}(\zeta_n | C) = M_n$ *és* $\mathbf{D}(\zeta_n | C) = D_n$ *léteznek, továbbá az* $\eta_n = \frac{\zeta_n - M_n}{D_n}$ *változók C-re vonatkozó feltételes eloszlása a normális eloszláshoz konvergál, vagyis*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(\zeta_n < x | C) = \Phi(x),$$

*és B egy* $\mathbf{T}_2$*-höz tartozó halmaz, amelyre* $B \subseteq C$ *és* $\mathbf{P}(B|C) > 0$, *akkor az* $\eta_n$ *változók feltételes eloszlása B-re nézve is a normális eloszláshoz konvergál.*

MEGJEGYZÉS. Ez a tétel azért is figyelemreméltó, mert $B$-re nézve a $\xi_k$ változók általában nem függetlenek, továbbá általában $\mathbf{M}(\zeta_n | B) \neq M_n$ és $\mathbf{D}(\zeta_n | B) \neq D_n$.

BIZONYÍTÁS: A tétel közönséges valószínűségi mezőkre vonatkozólag, és egy speciális esetet illetőleg jelen dolgozat szerzőjétől származik ([7]); az általános esetre nézve a tételt A. N. KOLMOGOROV bizonyította be ([8]). A bizonyítás minden további nélkül átvihető a feltételes valószínűségi mezőkre, hiszen rögzített $C$ mellett $[H, \mathbf{T}_1, \mathbf{P}(A|C)]$ egy tökéletes KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező.

A 3. tételt felhasználhatjuk a centrális határeloszlástétel gyengén függő változókra való kiterjesztésének bebizonyítására. Ha ugyanis $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ a $B$ halmazon értelmezett valószínűségi változóknak egy olyan sorozata, hogy a $\xi_n$ változók értelmezését a $B$ halmazt tartalmazó alkalmasan választott $C$ halmazra kiterjesztve elérhető, hogy azok a $C$ halmazon függetlenek legyenek és alkalmazható legyen rájuk a centrális határeloszlástétel, akkor a $B$ halmazon is érvényes lesz rájuk a centrális határeloszlástétel állítása, hacsak $\mathbf{P}(B|C) > 0$. Általában minél lazább sztochasztikus kapcsolat áll fenn a $\xi_n$ változók között, annál kevésbbé kell a $B$ halmazt bővíteni, hogy a bővítés eredményeképpen nyert $C$ halmazon a változók már függetlenné tehetők legyenek.

A szóbanforgó konstrukció azonban nem bármely feltételes valószínűségi mezőn végezhető el, csak ha teljesülnek az alábbi 3, 4 és 5 feltevések:

3) $\mathbf{P}(A|B)$ $B$-nek folytonos függvénye, a következő értelemben: ha $B_n \subseteq B_{n+1}$, $B_n \in \mathbf{T}_2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ és $B = \lim_{n \to \infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$, továbbá $\mathbf{P}(B_n | B_{n+1}) > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, végül pedig $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(B_n | B_{n+1})$ konvergens, akkor, $B \in \mathbf{T}_2$ és

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(A | B_n) = \mathbf{P}(A | B), \text{ ha } A \in \mathbf{T}_1.$$

MEGJEGYZÉS: Az a feltevés, hogy $\lim_{n\to\infty} B_n = B \in \mathbf{T}_2$, nem jelent erős megszorítást, mivel a 17. tétel szerint egy tetszőleges feltételes valószínűségi mező kiterjeszthető olymódon, hogy $\mathbf{T}_2$ tartalmazza az összes beletartozó olyan növekvő $B_n$ halmazsorozatok összegeit, amelyekre $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(B_n|B_{n+1})$ konvergens.

Még két feltevést kell tennünk:

4) $\mathbf{P}(A|B)$ bármely $B \in \mathbf{T}_2$-re nem-atomikus mérték, vagyis ha $\mathbf{P}(A|B) > 0$ akkor van olyan $A' \subseteq A$ halmaz, amelyre $A' \in \mathbf{T}_1$ és $0 < \mathbf{P}(A'|B) < \mathbf{P}(A|B)$.

Ha a 4. feltevés teljesül, hacsak $AC = O$, ahol $C$ egy rögzített halmaz, úgy azt mondjuk, hogy a 4) a $C$ halmazon *kívül* teljesül.

Könnyen belátható, hogy 4)-ből következik, hogy $\mathbf{P}(A|B)$ bír az alábbi 4') tulajdonsággal:

4') Ha $A \in \mathbf{T}_1$ és $B \in \mathbf{T}_2$ továbbá $A \subseteq B$, $\mathbf{P}(A|B) > 0$ és $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ egy pozitiv tagú számsorozat, amelyre $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ akkor megadható $A$-nak egy olyan $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$ felbontása, hogy $A_k \in \mathbf{T}_1$ és $A_j A_k = O$ ha $j \neq k$ $(j, k = 1,2,\ldots)$, továbbá $\mathbf{P}(A_k|B) = p_k \mathbf{P}(A|B) (k = 1,2,\ldots)$.

4') abból az ismert FRÉCHET-től származó tételből következik, hogy egy nem-atomikus mérték bármely értéket felvesz 0 és értékeinek felső határa között.*

5) Ha $B \in T_2$ és $\alpha$ valós szám $(0 < \alpha < 1)$, akkor megadható olyan $C$ halmaz, hogy $B \subseteq C$, $C \in \mathbf{T}_2$, és $\mathbf{P}(B|C) = \alpha$.

MEGJEGYZÉS: Az 5) feltevés nyilvánvalóan nem teljesülhet egy KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező által generált feltételes valószínűségi mező esetében, hiszen ha $\mathbf{P}(A|B) = \dfrac{\mathbf{P}^*(AB)}{\mathbf{P}^*(B)}$ és minden $D \in \mathbf{T}_1$ halmazra $\mathbf{P}^*(D) \leqq 1$

* Lásd [17] és [18]. Megjegyzendő, hogy ha a 4') állítást csak véges $p_1, p_2, \ldots, p_N$ sorozatokra kívánjuk meg, ahol $N$ rögzített pozitiv egész szám, ez atomikus mértékekre is teljesülhet. Könnyen belátható ugyanis, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy tetszőleges $p_1, p_2, \ldots, p_N$ pozitiv számokhoz, amelyekre $\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$ megadható legyen a $\sum_{k=1}^{\infty} r_k$ pozitiv és monoton nem növekvő tagú és 1 összegű sornak egy olyan felbontása $N$ részsorra, hogy a $k$-adik részsor összege $p_k$ legyen, az, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} r_k$ sorra teljesüljenek az alábbi feltételek:

$$r_n \leqq \frac{1}{N} \sum_{k=n}^{\infty} r_k \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

és ha $B \subseteq C$, továbbá $\mathbf{P}^*(B) > 0$ akkor

$$\mathbf{P}(B|C) = \frac{\mathbf{P}^*(BC)}{\mathbf{P}^*(C)} = \frac{\mathbf{P}^*(B)}{\mathbf{P}^*(C)} \geqq \mathbf{P}^*(B)$$

és így, ha

$$0 < \alpha < \mathbf{P}^*(B)$$

akkor nem létezhet olyan $C$ halmaz, amelyre $B \subseteq C$ és $\mathbf{P}(B|C) = \alpha$. Az 5) feltétel nyilvánvalóan teljesül az 1. § 1. példájában tárgyalt esetben, ha $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ integrálja az egész $E_n$ térre divergens.

5) teljesül továbbá például ha $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{Q}(AB)}{\mathbf{Q}(B)}$, ahol $\mathbf{Q}(C)$ egy nem automatikus és nem korlátos mérték.

Érdekes megjegyezni, hogy az 5) feltétel teljesülhet egy megszámlálható halmazon értelmezett feltételes valószínűségi mező esetében is. Például álljon H a $(j, k)$ számpárokból $(j, k = 0, 1, 2, \ldots)$, legyen

$$P_{jk} = \frac{1}{2^j} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

és álljon $\mathbf{T}_2$ a H halmaz azon $B$ nem üres részhalmazaiból, amelyekre a $\sum_{(j,k)\in B} P_{jk}$ sor konvergens; álljon továbbá $\mathbf{T}_1$ a H halmaz összes részhalmazaiból és legyen

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\sum_{(j,k)\in AB} P_{jk}}{\sum_{(j,k)\in B} P_{jk}}.$$

Legyen $B \in \mathbf{T}_2$ és $\gamma > 0$, legyen továbbá $\gamma$ diadikus előállítása

$$\gamma = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_j(\gamma)}{2^j}$$

ahol $\varepsilon_0(\gamma)$ tetszőleges nemnegatív egész szám és $\varepsilon_j(\gamma)$ a 0 vagy 1 értéket veszi fel $(j = 1, 2, \ldots)$.

Mivel $B$ a $(j, k)$ számpárok közül $j$ bármely rögzített értékére csak véges sokat tartalmazhat, mert ellenkező esetben $\sum_{(j,k)\in B} P_{jk}$ divergens volna, található $\varepsilon_0(\gamma)$ számú olyan $(0, k)$ számpár, amely nem tartozik $B$-hez és található $j$ minden olyan értékére, amelyre $\varepsilon_j(\gamma) = 1$, egy olyan $(j, k)$ számpár, amely nem tartozik $B$-hez. Az így kiválasztott $(j, k)$ számpárok halmaza legyen $D$. Ekkor, bevezetve a $\sum_{(j,k)\in B} P_{jk} = \beta$ jelölést,

$$\mathbf{P}(B|B+D) = \frac{\beta}{\gamma+\beta}.$$

Ha most $0 < \alpha < 1$, és $\gamma = \frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha}$, akkor $\frac{\beta}{\gamma+\beta} = \alpha$, és így bevezetve a $C = B + D$ jelölést,

$$\mathbf{P}(B|C) = \alpha,$$

vagyis a konstruált feltételes valószínűségi mező eleget tesz az 5) tulajdonságnak, annak ellenére, hogy H megszámlálható.

Most bebizonyítjuk a következő tételt:

4. TÉTEL: *Legyen* $[H, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ *egy feltételes valószínűségi mező, amely eleget tesz a* 3) *és* 5) *feltevésnek, továbbá a* 4) *feltevésnek a* $B$ *halmazon kívül, ahol* $B \in \mathbf{T}_2$ *és legyenek* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *olyan, a* $B$ *halmazon értelmezett diszkrét eloszlású valószínűségi változók, amelyekre teljesül a következő feltétel: ha az* $x_{nk}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *számok alkotják* $\xi_n$ *tényleges értékkészletét a* $B$ *feltétel mellett, vagyis*

$$\mathbf{P}(\xi_n = x_{nk}|B) > 0 \quad (n, k = 1, 2, \ldots) \text{ és } \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi_n = x_{nk}|B) = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

*akkor*

$$(1) \qquad \lambda_n = \sup_{j_1, j_2, \ldots, j_n} \left\{ \frac{\mathbf{P}(\xi_1 = x_{1j_1}, \xi_2 = x_{2j_2}, \ldots, \xi_n = x_{nj_n}|B)}{\mathbf{P}(\xi_n = x_{nj_n}|B)\mathbf{P}(\xi_1 = x_{1j_1}, \ldots, \xi_{n-1} = x_{n-1,j_{n-1}}|B)} - 1 \right\}$$

*véges* $(n = 2, 3, \ldots)$ *és*

$$(2) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n$$

*konvergens. Akkor megadható egy olyan* $C$ *halmaz, amelyre* $C \in \mathbf{T}_2$ *és* $B \subseteq C$, *továbbá* $\mathbf{P}(B|C) > 0$ *és a* $\xi_n$ *változók értelmezése kiterjeszthető* $C$*-re olymódon, hogy a* $\xi_n$ *változók* $C$*-re nézve teljesen függetlenek legyenek és* $\xi_n$ *feltételes eloszlásfüggvénye* $C$*-re nézve ugyanaz legyen, mint* $B$*-re nézve* $(n = 1, 2, \ldots)$.

MEGJEGYZÉS: Könnyen belátható, hogy $\lambda_n \geqq 0$. Ez ugyanis azt jelenti, hogy vannak olyan $j_1, j_2, \ldots, j_n$ számok, amelyekre

$$(3) \qquad \frac{\mathbf{P}(\xi_1 = x_{1j_1}, \ldots, \xi_n = x_{nj_n}|B)}{\mathbf{P}(\xi_n = x_{nj_n}|B)\mathbf{P}(\xi_1 = x_{1j_1}, \ldots, \xi_{n-1} = x_{n-1,j_{n-1}}|B)} > 1 - \varepsilon$$

akármilyen kis pozitív szám is $\varepsilon$. Ezt a következőképpen láthatjuk be: ha (3) baloldala $j_1, j_2, \ldots, j_n$ minden értékére $\leq 1 - \varepsilon$ volna, akkor összeadva ezeket az egyenlőtlenségeket, $j_1, j_2, \ldots, j_n$ összes lehetséges értékeire, következnék, hogy $1 \leq 1 - \varepsilon < 1$, ami ellentmondás.

BIZONYÍTÁS: Először is könnyen belátható, hogy az (1) feltétel teljesüléséből következik, hogy ha $A_k$ az $x_{kj}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ számsorozat tetszőleges, nem üres részhalmaza $(k = 1, 2, \ldots, n)$, akkor

$$(4) \qquad \frac{\mathbf{P}(\xi_1 \in A_1, \xi_2 \in A_2, \ldots, \xi_n \in A_n|B)}{\mathbf{P}(\xi_n \in A_n|B)\mathbf{P}(\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_{n+1} \in A_{n-1}|B)} - 1 \leq \lambda_n.$$

Ez a következőképpen látható be: ha az $A_k$ halmaz elemei az $x_{kj_i}$ számok $(i = 1, 2, \ldots, r_k < \infty;\ k = 1, 2, \ldots, n)$, akkor, bevezetve a rövidség kedvéért a

$$\frac{\mathbf{P}(\xi_1 = x_{1j_1}, \ldots, \xi_n = x_{nj_n}|B)}{\mathbf{P}(\xi_n = x_{nj_n}|B)\mathbf{P}(\xi_1 = x_{1j_1}, \ldots, \xi_{n-1} = x_{n-1,j_{n-1}}|B)} = q_n(j_1, j_2, \ldots, j_n)$$

és

$$\mathbf{P}(\xi_n = x_{nj_n}|B)\mathbf{P}(\xi_1 = x_{1j_1}, \ldots, \xi_{n-1} = x_{n-1,j_{n-1}}|B) = Q_n(j_1, j_2, \ldots, j_n)$$

jelöléseket,

$$(5) \qquad \frac{\mathbf{P}(\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_n \in A_n|B)}{\mathbf{P}(\xi_n \in A_n|B)\,\mathbf{P}(\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_{n-1} \in A_{n-1})} =$$

$$= \frac{\sum_{j_1=1}^{r_1}\sum_{j_2=1}^{r_2}\cdots\sum_{j_n=1}^{r_n} q_n(j_1, \ldots, j_n)\,Q_n(j_1, \ldots, j_n)}{\sum_{j_1=1}^{r_1}\sum_{j_2=1}^{r_2}\cdots\sum_{j_n=1}^{r_n} Q_n(j_1, \ldots, j_n)}.$$

(5)-ből (4) már következik, mivel (4) jobboldala $(1+\lambda_n)$-nél nem nagyobb számokból képezett súlyozott középérték lévén, maga sem lehet $1+\lambda_n$-nél nagyobb. Megjegyzendő, hogy az (1) feltétel nyilvánvalóan teljesül ($\lambda_n = 0$-val) és így (2) is teljesül, ha a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ változók teljesen függetlenek, ennél azonban lényegesen kevesebbet követel meg, tehát (1) és (2) a $\xi_n$ változók közötti sztochasztikus kapcsolat laza voltát megkövetelő feltevésnek tekinthető. *Ha a $\xi_n$ változókra az* (1) *és* (2) *feltevések teljesülnek, azt mondjuk, hogy azok „majdnem függetlenek".*

A 4. tétel bizonyításához szükségünk lesz a következő segédtételre:

1. LEMMA. *Legyen* $[\mathrm{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ *egy feltételes valószínűségi mező, amelyre teljesül a* 4) *feltevés; legyenek* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *a* $B \in \mathbf{T}_2$ *halmazon értelmezett diszkrét és B-re nézve független valószínűségi változók és legyen adva a* $\mathbf{P}(\xi = y_k) = p_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *diszkrét valószínűségeloszlás. Akkor megadható a B halmazon egy olyan* $\eta$ *valószínűségi változó, amelyre* $\mathbf{P}(\eta = y_k|B) = p_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *és amelyre a* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *és* $\eta$ *valószínűségi változók teljesen függetlenek.*

BIZONYÍTÁS: Legyenek $x_{kj}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ $\xi_k$ lehetséges értékei, tehát $\mathbf{P}(\xi_k = x_{kj}|B) > 0$ $(k, j = 1, 2, \ldots)$. Jelölje $A_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ azt a halmazt, amelyen teljesülnek a $\xi_k = x_{kj_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ feltevések, akkor

$$\mathbf{P}(A_{j_1 j_2 \ldots j_n}|B) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\xi_k = x_{kj}|B) > 0$$

és így 4') szerint megadható az $A_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ halmaznak egy olyan felbontása a páronként idegen $A^{(k)}_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ $\mathbf{T}_1$-hez tartozó halmazokra, hogy $\mathbf{P}(A^{(k)}_{j_1 j_2 \ldots j_n}) = p_k \mathbf{P}(A_{j_1 j_2 \ldots j_n}|B)$ teljesüljön $(k = 1, 2, \ldots)$. Ha most az $\eta(a)$ $(a \in B)$ függvényt úgy definiáljuk, hogy $\eta(a) = y_k$, ha $a \in A^{(k)}_{j_1 j_2 \ldots j_n}$, akkor nyilvánvalóan $\eta = \eta(a)$ egy valószínűségi változó és

$$\mathbf{P}(\eta = y_k, \xi_1 = x_{1j_1}, \ldots, \xi_{nj_n}|B) = \mathbf{P}(A^{(k)}_{j_1 j_2 \ldots j_n}|B) = p_k \mathbf{P}(A_{j_1 \ldots j_n}|B) =$$

$$= p_k \prod_{n=1}^{n} \mathbf{P}(\xi_k = x_{kj_k}|B)$$

és $$\mathbf{P}(\eta = y_k|B) = \mathbf{P}\Big(\sum_{j_1,\dots,j_n} A^{(k)}_{j_1 j_2 \dots j_n}|B\Big) = \sum_{j_1,\dots,j_n} \mathbf{P}(A^{(k)}_{j_1 j_2 \dots j_n}|B) =$$
$$= p_k \sum_{j_1,\dots,j_n} \mathbf{P}(A_{j_1 \dots j_n}|B) = p_k \mathbf{P}(B|B) = p_k,$$

vagyis a $\xi_1, \dots, \xi_n$ és $\eta$ változók $B$-re nézve teljesen függetlenek.

Térjünk most át a 4. tétel bizonyítására. Először azt mutatjuk ki, hogy megadható olyan $C_n \in \mathbf{T}_2$ halmaz, amelyre $B \subseteq C_n$, $\mathbf{P}(B|C_n) > 0$ és amelyre az $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ változók értelmezése kiterjeszthető olymódon, hogy azok $C_n$-re nézve függetlenek legyenek és teljesüljön a $\mathbf{P}(B|C_n) = \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{1+\lambda_k}$ feltétel. Ezt teljes indukcióval láthatjuk be. Az egyöntetűség kedvéért vezessük be a $C_1 = B$ jelölést. Legyen először $n = 2$. Legyen $\vartheta_2 = \frac{1}{1+\lambda_2}$ és legyen $C_2$ egy olyan halmaz, amelyre $C_1 \subseteq C_2$, $C_2 \in \mathbf{T}_2$ és $\mathbf{P}(C_1|C_2) = \vartheta_2$. Ilyen halmaz 5) szerint megadható.

Legyen $B_{kl}$ $B$-nek az a részhalmaza, amelyen $\xi_1 = x_{1k}$ és $\xi_2 = x_{2l}$ és legyen

$$\mathbf{P}(B_{kl}|B) = \mathbf{P}(\xi_1 = x_{1k}, \xi_2 = x_{2l}|B) = p_{kl}$$

továbbá

$$\mathbf{P}(\xi_1 = x_{1k}|B) = p'_k$$

és

$$\mathbf{P}(\xi_2 = x_{2l}|B) = p''_l.$$

Legyen

(6) $$q_{kl} = \frac{p'_k p''_l - \vartheta_2 p_{kl}}{1 - \vartheta_2}.$$

Feltevéseink szerint $q_{kl} \geqq 0$ $(k, l = 1, 2, \dots)$; figyelembevéve, hogy

$$\sum_{l=1}^{\infty} p_{kl} = p'_k$$

és

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_{kl} = p''_l,$$

továbbá, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} q_{kl} = \sum_{k=1}^{\infty} p'_k = \sum_{l=1}^{\infty} p''_l = 1,$$

következik 4')-ből, hogy megadható a $C_2 \bar{C}_1$ halmaznak egy olyan felbontása, az $A_{kl}$ halmazokra, hogy

$$\mathbf{P}(A_{kl}|C_2) = (1 - \vartheta_2) q_{kl}.$$

Ha most a $\xi_1$ és $\xi_2$ változók értelmezését úgy terjesztjük ki, $C_2 \bar{C}_1$-ra, hogy az $A_{kl}$ halmazon $\xi_1 = x_{1k}$ és $\xi_2 = x_{2l}$ legyen, akkor a $C_2$ halmazon $\xi_1$ és $\xi_2$ eloszlása ugyanaz lesz, mint $C_1$-en, de $C_2$-ön függetlenek lesznek. Ugyanis

$$\mathbf{P}(\xi_1 = x_{1k}|C_2) = \vartheta_2 \mathbf{P}(\xi_1 = x_{1k}|C_1) + (1 - \vartheta_2)\, \mathbf{P}(\xi_1 = x_{1k}|C_2 \bar{C}_1) =$$
$$= \vartheta_2 p'_k + (1 - \vartheta_2)\, p'_k = p'_k = \mathbf{P}(\xi_1 = x_{1k}|C_1)$$

hasonlóképpen

$$\mathbf{P}(\xi_2 = x_{2l} | C_2) = \mathbf{P}(\xi_2 = x_{2l} | C_1),$$

és

$$\mathbf{P}(\xi_1 = x_{1k};\ \xi_2 = x_{2l} | C_2) = \mathbf{P}(A_{kl} + B_{kl} | C_2) = \mathbf{P}(A_{kl} | C_2) + \mathbf{P}(B_{kl} | C_2) =$$
$$= (1 - \vartheta_2) q_{kl} + \vartheta_2 p_{kl} = p'_k p''_l.$$

Ezzel állításunkat $n = 2$-re bebizonyítottuk.

Tegyük fel, hogy a tétel $n$-re be van már bizonyítva. Legyen $C_n$ az a halmaz, amelyre $B \subseteq C_n$, $C_n \in \mathbf{T}_2$,

$$\mathbf{P}(B | C_n) = \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{1 + \lambda_k}$$

és amelyre a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ változók értelmezése úgy van kiterjesztve, hogy a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ változók $C_n$-en függetlenek. Az $(x_{1k_1}, x_{2k_2}, \ldots, x_{nk_n})$ szám $n$-eseket $(k_1, k_2, \ldots, k_n = 1, 2, \ldots)$ rendezzük el tetszőleges sorrendben, legyenek ezek közül $(x_{1k_1^{(s)}}, x_{2k_2^{(s)}}, \ldots, x_{nk_n^{(s)}})$ az $s$-edik $(s = 1, 2, \ldots)$ Definiáljuk a $\xi$ valószínűségi változót a következőképpen: $\xi = s$, ha teljesülnek a $\xi_j = x_{jk_j^{(s)}}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ feltételek. Nyilvánvaló, hogy ha egy $\eta$ valószínűségi változó független $\xi$-től, akkor független a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ változóktól és megfordítva. Terjesszük ki $\xi_{n+1}$ értelmezését $C_n$-re olymódon, hogy $C_n \bar{C}_1$-on $\xi_{n+1}$ és $\xi$ függetlenek legyenek és $\xi_{n+1}$ eloszlása $C_n$-en ugyanaz legyen, mint a $C_1$ halmazon. Ez az 1. lemma szerint lehetséges.

Ezután válasszunk egy olyan $C_{n+1} (C_n \subseteq C_{n+1})$ halmazt, amelyre

$$\mathbf{P}(C_n | C_{n+1}) = \frac{1}{1 + \lambda_{n+1}} = \vartheta_{n+1}.$$

Ez az 5) feltevés szerint lehetséges. Osszuk fel a $C_{n+1} \bar{C}_n$ halmazt az $A_{rs}$ részhalmazokra olymódon, hogy

$$\mathbf{P}(A_{rs} | C_{n+1}) = \mathbf{P}(\xi_{n+1} = x_{n+1,r} | C_n)\, \mathbf{P}(\xi = s | C_n) -$$
$$- \vartheta_{n+1} \mathbf{P}(\xi_{n+1} = x_{n+1,r}, \xi = s | C_n);\ r, s = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Ez lehetséges 4') szerint, és azért, mivel feltevésünk szerint a (7) jobboldalán álló számok nemnegatívak és összegük $\mathbf{P}(C_{n+1} C_n | C_{n+1}) = 1 - \vartheta_{n+1}$. Ugyanis könnyen belátható, hogy

$$\frac{\mathbf{P}(\xi_{n+1} = x_{n+1,r}, \xi = s | C_n)}{\mathbf{P}(\xi_{n+1} = x_{n+1,r} | C_n)\, \mathbf{P}(\xi = s | C_n)} \leq 1 + \lambda_{n+1}. \tag{8}$$

A (8) egyenlőtlenség a következőképpen látható be:

$$\mathbf{P}(\xi_{n+1} = x_{n+1,r}, \xi = s | C_n) = \mathbf{P}(B | C_n)\, \mathbf{P}(\xi_{n+1} = x_{n+1,r}, \xi = s | B)$$
$$+ (1 - \mathbf{P}(B | C_n))\, \mathbf{P}(\xi_{n+1} = x_{n+1,r}, \xi = s | C_n \bar{B}_n),$$

továbbá

$$\mathbf{P}(\xi_{n+1} = x_{n+1,r} | C_n) = \mathbf{P}(\xi_{n+1} = x_{n+1,r} | B) = \mathbf{P}(\xi_{n+1} = x_{n+1,r} | C_n B)$$

és

$$\mathbf{P}(\xi = s | C_n) = \mathbf{P}|\xi = s | B)\, \mathbf{P}(B | C_n) + \mathbf{P}(\xi = s | C_n \bar{B})\, (1 - \mathbf{P}(B | C_n)),$$

és így, mivel $C_n\bar{B}$-on $\xi_{n+1}$ és $\xi$ függetlenek,

$$(9)\qquad \frac{\mathbf{P}(\xi_{n+1}=x_{n+1,r},\,\xi=s|C_n)}{\mathbf{P}(\xi_{n+1}=x_{n+1,r}|C_n)\,\mathbf{P}(\xi=s|C_n)}=\frac{\alpha\dfrac{\mathbf{P}(\xi_{n+1}=x_{n+1,r},\,\xi=s|B)}{\mathbf{P}(\xi_{n+1}=x_{n+1,r}|B)\,\mathbf{P}(\xi=s|B)}+\beta}{\alpha+\beta}$$

ahol $\alpha=\mathbf{P}(B|C_n)\,\mathbf{P}(\eta=s|B)$ és $\beta=\mathbf{P}(\eta=s|C_nB)\,(1-\mathbf{P}(\bar{B}|C_n))$, tehát (9) baloldala kisebb, vagy egyenlő, mint

$$\frac{\alpha(1+\lambda_{n+1})+\beta\cdot 1}{\alpha+\beta}$$

ahol $\alpha$ és $\beta$ pozitív számok, tehát a fenti tört értéke legfeljebb

$$\max\,(1,\;1+\lambda_{n+1})=1+\lambda_{n+1}.$$

Az $A_{rs}$ halmazon legyen $\xi_{n+1}=x_{n+1,r}$ és $\xi_j=x_{jk_j}^{(s)}\,(j=1,2,\ldots,n)$. Akkor nyilván $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n+1}$ eloszlása $C_{n+1}$-en ugyanaz, mint a $C_n$ halmazon, tehát ugyanaz, mint a $B$ halmazon és a $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n+1}$ változók a $C_{n+1}$ halmazon függetlenek és végül

$$\mathbf{P}(C_n|C_{n+1})=\vartheta_{n+1}=\frac{1}{1+\lambda_{n+1}}$$

és így

$$\mathbf{P}(B|C_{n+1})=\prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}(C_k|C_{k+1})=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\lambda_{k+1}}.$$

Legyen mármost $C=\lim\limits_{n\to\infty}C_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n$, akkor a 3. feltétel szerint $C\in\mathbf{T}_2$ és

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(A|C_n)=\mathbf{P}(A|C).$$

Ebből következik, hogy a $C$ halmazon a $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ változók ugyanolyan eloszlásúak, mint a $B$ halmazon, és függetlenek, továbbá

$$\mathbf{P}(B|C)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(B|C_n)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\lambda_{k+1}}$$

Abból, hogy $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\lambda_k$ konvergens, következik, hogy $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\lambda_{k+1}}$ konvergens és pozitív, tehát $\mathbf{P}(B|C)>0$.

Ezzel a 4. tételt bebizonyítottuk.

A 4. tételből azonnal következik az

5. TÉTEL: *A* $[H,\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2,\mathbf{P}(A|B)]$ *feltételes valószínűségi mezőről tegyük fel, hogy teljesülnek rá az* 1)—5) *feltételek. Legyen* $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ *a* $B\in\mathbf{T}_2$ *halmazon értelmezett diszkrét valószínűségi változók egy majdnem független sorozata; jelölje* $F(x|B)$ $\xi_n$ *eloszlásfüggvényét és az* $F_n(x|B)$ *eloszlásfüggvényekre teljesüljenek* a LINDEBERG*-féle tétel feltételei, vagyis létezzék*

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_n(x|B)$$

*és*

$$d_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_n)^2 dF_n(x|B)$$

*és bevezetve a* $D_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} d_k^2}$ *jelölést, teljesüljön a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-m_k| > \varepsilon D_n} (x-m_k)^2 dF_k(x|B) = 0$$

*feltevés minden pozitív* $\varepsilon$*-ra. Akkor a* $\xi_n$ *változókra érvényes a centrális határeloszlástétel, vagyis ha* $\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, $M_n = \sum_{k=1}^{n} m_k = \mathbf{M}(\xi_n|B)$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\xi_n - M_n}{D_n} < x \middle| B\right) = \Phi(x).$$

BIZONYÍTÁS: A 4. tétel szerint megadható egy olyan $C \in \mathbf{T}_2$ halmaz, hogy $B \subseteq C$ és $\mathbf{P}(B|C) > 0$, és a $\xi_n$ változók értelmezése kiterjeszthető $C$-re olymódon, hogy a $\xi_n$ változók $C$-re nézve függetlenek legyenek és $\xi_n$ eloszlása a $C$ halmazon ugyanaz legyen, mint a $B$ halmazon. $(n = 1, 2, \ldots)$. Akkor tehát $\xi_n$ változókra a $C$ halmazon is teljesülnek a LINDEBERG-féle tétel feltételei, és így $\frac{\xi_n - M_n}{D_n}$ eloszlása $C$-re nézve a normális eloszláshoz konvergál. A 3. tételből azonban következik, hogy akkor $\frac{\xi_n - M_n}{D_n}$ eloszlása a $B$ halmazra nézve is a normális eloszláshoz konvergál és így az 5. tétel be van bizonyítva.

Első pillanatra úgy tűnik, hogy az 5. tétel érvényességéhez lényeges, hogy a szóbanforgó valószínűségi mező rendelkezzék az 1)—5) tulajdonságokkal, ez azonban nincs így. Ugyanis a határeloszlástétel kizárólag a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ változók együttes eloszlásfüggvényeire vonatkozó állítást tartalmaz és így nem függ a mértéktér sajátosságaitól. Ha tehát adva vannak a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ majdnem független változók $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eloszlásfüggvényei, akkor annak bebizonyításához, hogy a $\xi_n$ változókra alkalmazható a centrális határeloszlástétel, elegendő, egy az 1) és 2) tulajdonságoknak eleget tevő tökéletes KOLMOGOROV-féle valószínűségi mezőt és azon olyan $\xi_n^*$ valószínűségi változókat konstruálni, amelyek közül az első $n$ változó együttes eloszlásfüggvénye $F_n(x_1, \ldots, x_n)$, továbbá ezt a valószínűségi mezőt beágyazni egy olyan feltételes valószínűségi mezőbe, amelyre a 3), 4) és 5) feltevések teljesülnek. Ha a $\xi_n$ változók diszkrét eloszlásúak, $\xi_n$ lehetséges értékei az $x_{nk}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ számok, akkor ez mindig elvégezhető, mégpedig a következőképpen:

Az $(x_{1k_1}, x_{2k_2}, \ldots, x_{nk_n}, \ldots)$ számsorozathoz rendeljük hozzá a $(0, 1)$ intervallum

$$x = \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots}}$$

pontját. A $(0, 1)$ intervallum azon $x$ számokból álló $E_{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ részhalmazához, amely $x$ számok lánctörtkifejtése $\cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{k_n}}}}$ -nel kezdődik, rendeljük hozzá a $\mathbf{P}^*(E_{k_1, k_2, \ldots, k_n}) = \mathbf{P}(\xi_1 = x_{1k_1}, \ldots, \xi_n = x_{nk_n})$ valószínűséget és az így definiált $\mathbf{P}^*$ valószínűségi mértéket terjesszük ki a $(0, 1)$ intervallum összes mérhető halmazaira. Ilyen módon nyilvánvalóan egy nem atomikus LEBESGUE-mértéket kapunk*. Ezekután legyen H a $(-\infty, +\infty)$ számegyenes, $\mathbf{T}_1$ a H összes mérhető halmazainak összessége, $\mathbf{T}_2$ a H összes olyan mérhető $B$ halmazainak összessége, amelyeket felbontva egy $(0, 1)$-ben fekvő $B'$ és egy, a $(0, 1)$-en kívül fekvő $B''$ részre, $\mathbf{P}^*(B') + m(B'')$ pozitív és véges, ahol $m(A)$ az $A$ halmaz közönséges LEBESGUE-mértékét jelöli. Legyen továbbá

$$\mu(A) = \mathbf{P}^*(A') + m(A'')$$

ha $A'$ ill. $A''$ jelentik $A$-nak a $(0, 1)$-be eső, illetve azon kívül eső részét és legyen

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mu(AB)}{\mu(B)}.$$

Ilyen módon egy feltételes valószínűségi mezőt nyertünk, amely eleget tesz az 1), 2), 3) és 5) feltevéseknek**, továbbá a 4) feltevésnek is, a $(0, 1)$ intervallumon kívül.

Ilyen módon a következő tételt bizonyítottuk be:

6. TÉTEL: *Ha* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *valószínűségi változóknak egy tetszőleges* KOLMOGOROV*-féle valószínűségi mezőn értelmezett diszkrét és majdnem független sorozata, amelynek eloszlásaira teljesülnek a* LINDEBERG*-féle tétel feltételei, vagyis* $m_n = \mathbf{M}(\xi_n)$ *és* $d_n = \mathbf{D}(\xi_n)$ *léteznek és bevezetve az*

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} m_k, \quad D_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} d_k^2}, \quad F_n(x) = \mathbf{P}(\xi_n < x) \text{ és } \zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \ (n = 1, 2, \ldots),$$

*jelöléseket, minden pozitív* $\varepsilon$*-ra teljesül a*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x - m_k| > \varepsilon D_n} (x - m_k)^2 \, dF_k(x) = 0$$

*reláció, akkor* $\dfrac{\zeta_n - M_n}{D_n}$ *eloszlása a standardizált normális eloszláshoz konvergál.*

* A LEBESGUE mértékek elméletére nézve l. ROHLIN [9] dolgozatát.

** Könnyen belátható ugyanis, hogy minden, nem atomikus ROHLIN-féle értelemben LEBESGUE-féle mérték tökéletes és ebből állításunk könnyen következik.

A 6. tétel kiterjeszthető tetszőleges valószínűségi változókra is, vagyis nem lényeges az a feltevés, hogy $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ diszkrét valószínűségi változók legyenek. Ennek bizonyításához szükségünk lesz még két lemmára.

2. LEMMA: *Legyen* $F_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$, *ahol* $i_1, i_2, \ldots, i_n$ *tetszőleges* $n$ *különböző természetes egész szám* $(n = 1, 2, \ldots)$ *folytonos eloszlásfüggvényeknek egy kompatibilis rendszere, vagyis legyen* $F_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ *invariáns az* $i_1, i_2, \ldots, i_n$ *számok tetszőleges permutációjával szemben, és legyen*

$$F_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, +\infty, \ldots, +\infty) = F_{i_1, \ldots, i_k}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}).$$

*Akkor megadható a* $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots)$ *végtelen számsorozatok* $V$ *terében* $(0 \leqq v_n \leqq 1, n = 1, 2, \ldots)$ *egy tökéletes* KOLMOGOROV*-féle valószínűségi mező és azon valószínűségi változóknak egy olyan* $\xi_n = \xi_n(v)$ *sorozata, hogy* $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_n}$ *együttes eloszlásfüggvénye az* $i_1, i_2, \ldots, i_n$ *index bármely választása mellett* $F_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ *legyen.*

BIZONYÍTÁS: KOLMOGOROV alaptétele ([1] 27. o.) szerint megadható az $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ $(-\infty < u_n < +\infty, n = 1, 2, \ldots)$ számsorozatok $U$ terében egy olyan mérték, hogy ha $\xi_n(u) = u_n$, akkor $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_n}$ együttes eloszlásfüggvénye éppen $F_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$. RYLL—NARDZEWSKI egy tétele [10] szerint ez a mérték (ha teljessé tesszük), tökéletes. Képezzük le az $U$ teret a $V$ térre a következő $\mathfrak{L}$ leképzéssel: az $U$-beli $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ pontnak feleltessük meg a $V$-beli $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots)$ pontot, ahol $v_n = F_n(u_n)$.* Ez a leképezés egy mértéket indukál a $V$ térben. A $\xi_n = \xi_n(v)$ valószínűségi változókat következőképpen definiáljuk: ha $v$ az $u$ pont képe az $L$ leképezésnél, vagyis $v = L(u)$, akkor legyen $\xi_n(v) = v_n$. Ez esetben a lemma összes feltételei teljesülnek. Megjegyzendő, hogy az ilyen módon definiált valószínűségi mérték nem más, mint egy, a (0, 1) intervallumon definiál ROHLIN-féle értelemben LEBESGUE-féle mértéktér önmagával való megszámlálható sokszori DESCARTES-szorzata.

3. LEMMA: *Legyen* $[\mathsf{H}', \mathbf{T}_1', \mathbf{T}_2', \mathbf{P}'(A|B)]$ *egy feltételes valószínűségi mező,* $\mathcal{K}''$ *jelentse az* $(a, b)$ *intervallumot,* $\mathfrak{T}_1''$ *jelentse* $\mathcal{K}''$ *mérhető részhalmazainak összességét,* $\mathfrak{T}_2''$ *jelentse* $\mathcal{K}''$ *pozitív mértékű részhalmazainak összességét és legyen* $\mathfrak{P}''(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \dfrac{m(\mathcal{A}\mathcal{B})}{m(\mathcal{B})}$, *ahol* $\mathcal{B} \in \mathfrak{T}_2''$ *és* $m(\mathcal{C})$ *a* $\mathcal{C} \in \mathfrak{T}_1''$ *halmaz* LEBESGUE*-mértékét jelöli. Legyen* $[\mathsf{H}'', \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ *a* $[\mathsf{H}', \mathbf{T}_1', \mathbf{T}_2', \mathbf{P}'(A|B)]$ *és a* $[\mathcal{K}'', \mathfrak{T}_1'', \mathfrak{T}_2'', \mathfrak{P}''(\mathcal{A}|\mathcal{B})]$ *feltételes valószínűségi mezők szorzata. Legyen* $\xi'$

* A $v = L(u)$ leképezés nem egy-egyértelmű, hiszen ha $F_n(x)$ az $a < x \leqq b$ intervallumban állandó, $F_n(x) = c$, ha $a < x \leqq b$, akkor az összes olyan $u = (u_1, \ldots, u_n, \ldots)$ $U$-beli pontoknak, amelyekre $a < u_n \leqq b$, az a $V$-beli $v = (v_1, \ldots, v_n, \ldots)$ pont felel meg, amelyre $v_n = c$. Ilyenmódon a $v = L(u)$ leképezés inverze nincs egyértelműen definiálva, azonban $\xi_n(v) = u_n$ ugyanazt az értéket veszi fel minden $u$ pontban, amelyekre $L(u) = v$ és így $\xi_n(v)$ definíciója egyértelmű.

*egy tetszőleges valószínűségi változó, amely a* $\mathsf{H}'$ *téren van értelmezve és* $G(x|\mathfrak{B}'')$ *egy tetszőleges feltételes eloszlásrendszer* ($\mathfrak{B}'' \in \mathfrak{T}_2''$). *Ha* $x = (x', x'')$, *ahol* $x' \in \mathsf{H}'$ *és* $x'' \in \mathfrak{K}''$, *akkor legyen*

$$\xi = \xi(x) = \xi'(x').$$

*Ez esetben megadható a* $\mathsf{H}$ *esemény téren egy olyan* $\eta = \eta(x) = \eta''(x'')$ *valószínűségi változó, amely* $\mathbf{T}_2$*-re nézve független* $\xi$*-től és amelynek feltételes eloszlásrendszere* $G(x|\mathfrak{B}'')$.

A 3. lemma bizonyítása igen egyszerű. Legyen ugyanis $B \in \mathbf{T}_2$, $B = B' * \mathfrak{B}''$ ahol $B' \in \mathbf{T}_1'$ és $\mathfrak{B}'' \in \mathfrak{T}_2''$, továbbá legyen $G(x) = G(x|\mathfrak{K}'')$ és jelölje $G^{-1}(x)$ $G(x)$ inverz függvényét. Legyen most

$$\eta''(x'') = G^{-1}\left(\frac{x''-a}{b-a}\right),$$

akkor

$$\mathbf{P}(\eta'' < y|B) = \mathbf{P}''\left(\frac{x''-a}{b-a} < G(y)|\mathfrak{B}''\right) = G(y|\mathfrak{B}'')$$

és nyilvánvalóan

$$\mathbf{P}(\xi < x, \eta < y|B) = \mathbf{P}(\xi' < x|B')\,\mathbf{P}(\eta'' < y|\mathfrak{B}'').$$

Ezek után rátérünk a 4. tétel kiterjesztésére nem diszkrét változókra. A $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ valószínűségi változókat realizáljuk a $\mathsf{V}$ téren, a 2. lemma értelmében. Legyen a $\mathsf{V}$ téren a 2. lemmának megfelelően konstruált KOLMOGOROV-féle valószínűségi mező által generált feltételes valószínűségi mező $[\mathsf{V}, \mathbf{T}_1^*, \mathbf{T}_2^*, \mathbf{P}^*(A|B)]$. Legyen $\mathfrak{K}^{(n)}$ a valós tengely, $\mathfrak{T}_1^{(n)}$ a $\mathfrak{K}^{(n)}$ mérhető halmazainak összessége, $\mathfrak{T}_2^{(n)}$ a $\mathfrak{K}^{(n)}$ véges és pozitív mértékű halmazainak összessége és legyen $\mathfrak{S}^{(n)}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B}) = \dfrac{m(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{m(\mathfrak{B})}$, ahol $m(\mathfrak{C})$ a $\mathfrak{C}$ halmaz közönséges LEBESGUE-mértékét jelenti. Legyen $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ a $[\mathfrak{K}^{(n)}, \mathfrak{T}_1^{(n)}, \mathfrak{T}_2^{(n)}, \mathfrak{S}^{(n)}(\mathfrak{A}|\mathfrak{B})]$ feltételes valószínűségi mezők DESCARTES szorzata. RYLL-NARDZEWSKI említett tétele szerint $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{P}(A|B)]$ eleget tesz az 1. és 2. feltételeknek, továbbá eleget tesz a $\mathsf{H}^* = \mathfrak{I}^{(1)} * \mathfrak{I}^{(2)} * \ldots$ halmazon kívül (ahol $\mathfrak{I}^{(n)}$ a (0, 1) intervallum) a 4. feltételnek és $[\mathsf{V}, \mathbf{T}_1^*, \mathbf{T}_2^*, \mathbf{P}^*]$ a $[\mathsf{H}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2\, \mathbf{P}]$ feltételes valószínűségi mezőbe beágyazott feltételes valószínűségi mező. Ha mármost teljesül a következő feltétel a $[\mathsf{V}, \mathbf{T}_1^*, \mathbf{P}_{(A)}^*]$ KOLMOGOROV-féle valószínűségi mezőn értelmezett $\xi_n$ valószínűségi változókra:

$$\sup_{x_1, \ldots, x_{n-1}} \frac{\mathbf{P}^*(a < \xi_n < b|\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_{n-1} = x_{n-1})}{\mathbf{P}^*(a < \xi_n < b)} - 1 \leqq \lambda_n \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

minden $a$ és $b > a$-ra és $\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n < \infty$, akkor a $\xi_n$ változók sorozatát majdnem függetlennek nevezzük. Ez esetben könnyen belátható, hogy a $\xi_n$ változók értelmezése kiterjeszthető $\mathsf{H}$ egy olyan $C$ halmazára, amelyre $\mathsf{V} \subseteqq C$

és $\mathbf{P}(V|C) < 0$, úgy, hogy azon a $\xi_n$ változók függetlenek legyenek. Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk. Legyen $x_1$ tetszőleges, $\mathbf{P}(\xi_2 < x_2) = F_2(x_2)$ és $\mathbf{P}(\xi_2 < x_2 | \xi_1 = x_1) = F_2(x_2|x_1)$. Legyen

$$\vartheta_2 = \frac{1}{1+\lambda_2} \quad \text{és} \quad G_{x_1}(x_2) = \frac{F_2(x_2) - \vartheta_2 F_2(x_2|x_1)}{1-\vartheta_2},$$

akkor $G_{x_1}(x_2)$ egy eloszlásfüggvény és a 3. lemma szerint megadható az $1 \leqq x_2 \leqq 1+\lambda_2$ intervallumon egy olyan $\xi_2(x_1, x_2)$ változó, amelynek eloszlásfüggvénye $G_{x_1}(x_2)$. Ilyen módon kiterjesztve $\xi_2$ értelmezését az $(1, 1+\lambda_2)$ intervallumra, $\xi_2$ független lesz $\xi_1$-től, mivel $C_1$-gyel jelölve a $I_1 * I_2$ halmazt, és $C_2$-vel az $I_1 * (0, 1+\lambda_2)$ halmazt

$$\mathbf{P}(\xi_2 < y | \xi_1 = x_1, C_2) = F_2(y|x_1)\vartheta_2 + G_{x_1}(y)(1-\vartheta_2) = F_2(y).$$

Ezt az eljárást folytatva, kiterjeszthetjük a $\xi_n$ változók értelmezését a $C = (0, 1) * (0, 1+\lambda_2) * \cdots * (0, 1+\lambda_n) * \cdots$ halmazra, úgy, hogy azok függetlenek legyenek; mivel $\mathbf{P}(C_1|C) = \prod_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+\lambda_n} > 0$ ezzel be van bizonyítva a következő

7. TÉTEL: *A 6. tétel érvényes azon megszorítás nélkül is, hogy a $\xi_n$ változók diszkrét eloszlásúak.*

## *4. §. Alkalmazások a* MARKOV*-láncok és a sztochasztikus folyamatok elméletében*

Az előzőkben kifejtett elméletnek érdekes alkalmazási lehetőségei vannak a MARKOV-láncok elméletében. Homogén, megszámlálhatóan végtelen sok állapottal biró MARKOV-féle láncok egy általános típusánál a szó közönséges értelmében vett stacionér eloszlás nem létezik, azonban létezik *nem normálható stacionér eloszlás*. Legyenek a MARKOV-lánc állapotai $A_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ és $P_{jk}$ jelentse az $A_j$ állapotból az $A_k$ állapotba való átmenet valószínűségét. Akkor mondjuk, hogy MARKOV-láncnak nem normálható stacionér határeloszlása van, ha megadhatók olyan $Q_k (k = 1, 2, \ldots)$ nemnegatív számok, amelyekre teljesülnek a

$$Q_k = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j P_j \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

egyenletek és $\sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \infty$. Erre a legegyszerűbb példa a következő*: egy rendszer lehetséges állapotait az $1, 2, \ldots, n, \ldots$ számokkal jellemezzük, $P_{jk}$ jelentse a rendszernek a $j$-edik állapotból a $k$-adik állapotba egy lépésben

* Lásd T. E. HARRIS és H. ROBBINS [11] továbbá C. DERMAN, *Proc. Amer. Math. Soc.* 5 (1954) 332—334.

való átmenetelének valószínűségét és legyen a

$$\Pi = (P_{jk})$$

végtelen mátrix duplán sztochasztikus, vagyis nemcsak sorösszegei, hanem oszlopösszegei is legyenek 1-gyel egyenlők. Ilyen például a következő mátrix:

$$\Pi = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & \dots \\ c_2 & c_1 & c_4 & c_3 & c_6 & c_5 & c_8 & c_7 & \dots \\ c_3 & c_4 & c_1 & c_2 & c_7 & c_8 & c_5 & c_6 & \dots \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_8 & c_7 & c_6 & c_5 & \dots \\ c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\ c_6 & c_5 & c_8 & c_7 & c_2 & c_1 & c_4 & c_3 & \dots \\ c_7 & c_8 & c_5 & c_6 & c_3 & c_4 & c_1 & c_2 & \dots \\ c_8 & c_7 & c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

ahol $c_n \geqq 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1$.

Akkor ha $p_{jk} > 0$ $(j, k = 1, 2, \dots)$, az

$$x_k = \sum_{j=1}^{\infty} x_j p_{jk}$$

egyenletrendszernek nem lehet olyan megoldása, amelyre $x_k \geqq 0$ és $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = 1$; ezzel szemben $x_k = c > 0$ $(k = 1, 2, \dots)$ egy megoldás; ugyanis, ha $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = 1$, akkor $x_k \to 0$ és így van az $x_k$ számok között maximális. Ha $x_m$ egy ilyen, akkor ez csak úgy lehetséges, ha $x_k = x_m = c$ $(k = 1, 2, \dots)$; ez valóban megoldás, de nem tesz eleget a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = 1$ feltételnek.

Ebben az esetben az összes állapotok ú. n. visszatérő ritka állapotok (l. pl. [5] XIV. fejezet), tehát ha $P_{jk}^{(n)}$ jelenti a $j$-edik állapotból a $k$-adik állapotba $n$ lépésben való átmenet valószínűségét, akkor

$$\lim_{n \to \infty} P_{jk}^{(n)} = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \dots)$$

és bár bármely állapotba előbb vagy utóbb a rendszer 1 valószínűséggel visszatér, a visszatérés időtartamának (lépésszámának) várható értéke végtelen. Ez esetben tehát közönséges értelemben vett stacionér eloszlás nem létezik, de létezik nem normálható stacionér eloszlás, mégpedig az, amelynél az összes $Q_k$ számok egyenlőek.

A nem normálható stacionér eloszlás bizonyos értelemben a MARKOV-lánc feltételes határeloszlásrendszerét szolgáltatja, abban az esetben, ha a

$$Q_k = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j P_{jk}$$

egyenletrendszernek eleget tevő pozitív $Q_k$ számokra teljesülnek a következő összefüggések is:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{ij}^{(n)}}{P_{ik}^{(n)}} = \frac{Q_j}{Q_k} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots; \quad i = 1, 2, \ldots)$$

Ez esetben a MARKOV-lánc feltételes határeloszlásrendszere

$$\mathfrak{S}(\mathcal{A} \mid \mathcal{B}) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{A}\mathcal{B}} Q_j}{\sum_{j \in \mathcal{B}} Q_j}$$

ahol $\mathcal{A}$ a természetes számok egy tetszőleges részhalmaza, $\mathcal{B}$ pedig a természetes számok halmazának olyan részhalmaza, amelyre $\sum_{j \in \mathcal{B}} Q_j > 0$.

Vizsgáljuk meg példaként közelebbről az egydimenziós bolyongás példáját. Egy, az egyenesen bolyongó pont koordinátáját a $t = n$ időpontban jelölje $\zeta_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; tegyük fel, hogy a $\xi_n = \zeta_n - \zeta_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ valószínűségi változók teljesen függetlenek és egyforma eloszlásúak; ebben az esetben a $\zeta_n$ változók időben homogén additiv MARKOV-láncot alkotnak. Tegyük fel, hogy a $\zeta_n$ változók lehetséges értékei mind egész számok és a $\xi_n$ változók szimmetrikus eloszlásúak. Jelöljék $\pm k_1, \pm k_2, \ldots, \pm k_j, \ldots$ azokat az egész számokat, amelyeket $\xi_n$ pozitív valószínűséggel felvesz és legyen

$$p_r = \mathbf{P}(\xi_n = k_r) = \mathbf{P}(\xi_n = -k_r) \, (r = 1, 2, \ldots);$$

tegyük fel, hogy a $k_r$ és $p_r$ számsorozatokra teljesülnek a következő feltételek:

1. a $k_r$ számok legnagyobb közös osztója 1;
2. a $k_r$ számok között van páros szám;
3. $\mathbf{D}^2(\xi_n) = 2 \sum_{r=1}^{\infty} p_r k_r^2 = D^2 < \infty$.

Legyen

$$\varphi(t) = 2 \sum_{r=1}^{\infty} p_r \cos k_r t$$

a $\xi_n$ változók karakterisztikus függvénye, akkor a feltevéseink szerint $\varphi(0) = 1$, $|\varphi(t)| < 1$ ha $t \not\equiv 0 \bmod 2\pi$,

$$\varphi'(0) = \mathbf{M}(\xi_n) = 0, \quad \varphi''(0) = -D^2 \quad \text{és} \quad \varphi(t + 2\pi) = \varphi(t).$$

Mivel $\zeta_n - \zeta_0 = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$, $\zeta_n$ karakterisztikus függvénye a $\zeta_0 = j$ feltétel mellett $\varphi^n(t) e^{itj}$ és így

$$(1) \qquad P_{jk}^{(n)} = \mathbf{P}(\zeta_n = k \mid \zeta_0 = j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^n(t) \cos (k - j) t \, dt$$

Mármost egy LAPLACE-tól származó módszerrel a jobboldalán álló integrálok aszimptotikus kifejezése egyszerűen megadható (1. pl. [5] V. fej. 1. §

1. tétel) és így azt kapjuk, hogy

$$P_{jk}^{(n)} \approx \frac{1}{D\sqrt{2\pi n}}$$

és így

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{jk}^{(n)}}{P_{jl}^{(n)}} = 1 \tag{2}$$

$j, k$ és $l$ tetszőleges rögzített értékeire.* (2)-ből következik, hogy bár $\zeta_n$-nek a határeloszlása nem létezik, létezik $\zeta_n$ feltételes határeloszlása, amennyiben

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}(\zeta_n = k_m | \zeta_0 = j)}{\sum_{h=1}^{r} \mathbf{P}(\zeta_k = k_h | \zeta_0 = j)} = \frac{1}{r} \qquad (m = 1, 2, \ldots, r) \tag{3}$$

akárhogyan is választjuk a $k_1, k_2, \ldots, k_r$ egymástól különböző egész számokat. (3) azonnal következik (2)-ből, mivel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}(\zeta_n = k_m | \zeta_0 = j)}{\sum_{h=1}^{r} \mathbf{P}(\zeta_n = k_h | \zeta_0 = j)} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_{jk_m}^{(n)}}{\sum_{h=1}^{r} P_{jk_h}^{(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum_{h=1}^{r} \frac{P_{jk_h}^{(n)}}{P_{jk_m}^{(n)}}} = \frac{1}{\sum_{h=1}^{r} 1} = \frac{1}{r}$$

Eredményünk interpretálására vezessük be a feltételes ergodicitás fogalmát. A $\zeta_n$ valószínűségi változók alkossanak MARKOV-láncot, és legyen

$$\mathfrak{P}^{(n)}(\mathcal{A} | z) = \mathbf{P}(\zeta_n \in \mathcal{A} | \zeta_0 = z)$$

ha $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}_1$ ahol $\mathfrak{T}_1$ a $\zeta_n$ változók $\mathcal{H}$ értékkészletének azon részhalmazaiból álló BOREL-féle halmaztest, amelyre vonatkozólag a $\zeta_n$ változók mérhetőek. *Ha megadható $\mathfrak{T}_1$-nek egy olyan $\mathfrak{T}_2$ részhalmaza, hogy amennyiben $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}_1$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{T}_2$ és $z \in \mathcal{H}$ akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{P}^{(n)}(\mathcal{A}\mathcal{B} | z)}{\mathfrak{P}^{(n)}(\mathcal{B} | z)} = \mathfrak{P}(\mathcal{A} | \mathcal{B})$$

*ahol $\mathfrak{P}(\mathcal{A} | \mathcal{B})$ nem függ $z$-től, és $[\mathcal{H}, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{P}(\mathcal{A} | \mathcal{B})]$ egy feltételes valószínűségi mező, akkor azt mondjuk, hogy a $\{\zeta_n\}$ MARKOV-lánc feltételesen ergodikus, és a $\mathfrak{P}(\mathcal{A} | \mathcal{B})$ feltételes eloszlásrendszert a* MARKOV-*lánc feltételes határeloszlásrendszerének nevezzük.* A fentebb tárgyalt példában $\mathcal{H}$ az egész számok halmaza, $\mathfrak{T}_1$ a $\mathcal{H}$ halmaz összes részhalmazainak halmaza, $\mathfrak{T}_2$ pedig $\mathcal{H}$ összes véges és nem üres részhalmazainak halmaza és $\mathfrak{P}(\mathcal{A} | \mathcal{B}) = \frac{\nu(\mathcal{A}\mathcal{B})}{\nu(\mathcal{B})}$ ahol $\nu(\mathcal{C})$ jelenti a $\mathcal{C}$ halmaz elemeinek számát.

Megjegyzendő, hogy ha egy MARKOV-lánc feltételesen ergodikus, akkor feltételes határeloszlásrendszere mindenképpen előállítható a 1. §. 15. tételben szereplő módon. Ez következik az 1. §-ban CSÁSZÁR ÁKOS tételéhez fűzött

* ERDŐS PÁL és K. L. CHUNG [19] munkájukban (2) érvényességét általánosabb feltételek mellett mutatták ki: náluk a változók szórásának létezése nincsen kikötve.

megjegyzésből. Bizonyos feltételek mellett ennél több is igaz, mégpedig $\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ előállítható egyetlen $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ mérték segítségével $\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{\mathcal{Q}(\mathcal{A}\mathcal{B})}{\mathcal{Q}(\mathcal{B})}$ alakban, ahol $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ egy nemnegatív és teljesen additív halmazfüggvény és $\mathcal{Q}(\mathcal{B})>0$ ha $\mathcal{B}\in\mathfrak{T}_2$. Ez az eset áll fenn például a fentebb tárgyalt bolyongási problémáknál. CSÁSZÁR ÁKOS említett másik tételéből következik, hogy például ha a MARKOV-lánc állapotainak $\mathcal{H}$ halmaza megszámlálható, $\mathfrak{T}_1$ $\mathcal{H}$ összes részhalmazaiból, $\mathfrak{T}_2$ pedig $\mathcal{H}$ összes nem üres részhalmazaiból áll, és $\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})>0$ ha $\mathcal{B}\in\mathfrak{T}_2$ és $\mathcal{A}\mathcal{B}$ nem üres, akkor $\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{\mathcal{Q}(\mathcal{A}\mathcal{B})}{\mathcal{Q}(\mathcal{B})}$.

Bizonyos megszorítások mellett kimutatható a feltételes ergodicitás többdimenziós bolyongási problémák és általánosabb, nem additív MARKOV-láncok esetében is.

Úgy látszik, hogy itt igen sok fontos összefüggés vár még feltárásra.

Stacionér MARKOV-láncoknál más értelemben is beszélhetünk feltételes határeloszlásról. Tegyük fel, hogy a $\zeta_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ nemnegatív egész értékű változók stacionér MARKOV-láncot alkotnak, amely irreducibilis és amelynek összes állapotai visszatérők, és jelentse $\eta_N(\mathcal{A})$ azt, hogy a $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_N$ változók értékei közül hány esik a nemnegatív egész számokból álló $\mathcal{A}$ halmazba és legyen $\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{\eta_N(\mathcal{A}\mathcal{B})}{\eta_N(\mathcal{B})}$, ha $\eta_N(\mathcal{B})>0$ és $\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B})=0$, ha $\eta_N(\mathcal{B})=0$, vagyis jelentse $\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ az $\mathcal{A}$ eseménynek a $\mathcal{B}$ eseményre vonatkozó feltételes relatív gyakoriságát a MARKOV-láncot alkotó kísérletsorozat első $N$ kísérlete során, azon feltevés mellett, hogy $\zeta_0 = i$. K. L. CHUNG egy tételéből [17] következik, hogy

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to\infty}\gamma_N(\mathcal{A}|\mathcal{B})\right) = \mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = 1,$$

ahol

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{\sum_{j\in\mathcal{A}\mathcal{B}} E_{ij}}{\sum_{j\in\mathcal{B}} E_{ij}}$$

és

$$E_{ij} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} P_{jj}^{(k)}}{\sum_{k=0} P_{ii}^{(k)}} \tag{4}$$

és ezek a határértékek mindig léteznek és pozitívok*; ha az összes állapotok

* A fentebb tárgyalt bolyongási problémáknál $E_{ij}=1$. (4)-re vonatkozólag lásd A. N. KOLMOGOROV [20] munkáját, továbbá W. DOEBLIN [21] munkáját és végül K. L. CHUNG [22] közleményét, amely felhívja a figyelmet arra, hogy a $\lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)}/P_{kk}^{(n)}$ határértékek létezésének kérdése az általános esetben nincsen eldöntve.

visszatérő gyakori állapotok, akkor a $\sum_{j=i}^{\infty} E_{ij}$ sorok konvergensek és így a MARKOV-lánc határeloszlása létezik és $\mathfrak{S}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ az ezen határeloszlás által származtatott feltételes eloszlásrendszer; ha az összes állapotok visszatérő ritka állapotok, akkor a $\sum_{j=1}^{\infty} E_{ij}$ sorok divergálnak és így a $\mathfrak{S}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ feltételes eloszlásrendszer nem generálható egy közönséges eloszlás által.

K. L. CHUNG azt is bebizonyította, hogy az $E_{ik}$ számok mindig eleget tesznek az

$$E_{ik} = \sum_{j=1}^{\infty} E_{ij} P_{jk}$$

egyenletrendszernek, vagyis az $E_{ik}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ számok a $\Sigma E_{ik} = +\infty$ esetben a MARKOV-lánc nem-normálható stacionér eloszlását alkotják.

Nézzünk most egy példát a sztochasztikus folyamatok elméletéből feltételes határeloszlásokra vonatkozólag. Vizsgáljunk egy olyan folyamatot, amelyben $\zeta_1 = \xi_1$, $\zeta_2 = \xi_1 + \xi_2, \ldots$, $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n + \cdots$ időpontokban történik egy-egy esemény, ahol $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ egyforma $F(x)$ eloszlásfüggvényű nemnegatív és független valószínűségi változók. Legyen $\tau > 0$ és legyen $\zeta_{n-1} < \tau < \zeta_n$, továbbá $\zeta_n - \tau = \vartheta(\tau)$. Mármost a $\tau$ pontot válasszuk ki találomra a $(0, t)$ intervallumon, vagyis legyen $\tau$ a $(0, t)$-ben egyenletes eloszlású valószínűségi változó és legyen $\delta_t = \vartheta(\tau)$. Számítsuk ki $\delta_t$ eloszlásfüggvényét. W. FELLER kimutatta, hogy ha

$$\int_0^{\infty} x\,dF(x) = \int_0^{\infty} (1 - F(x))\,dx = m$$

véges, akkor $\vartheta(t)$ és $\delta_t$ határeloszlásának eloszlásfüggvénye, ha $t \to \infty$

$$H(x) = \frac{1}{m} \int_0^{x} (1 - F(u))\,du.$$

TAKÁCS LAJOS [13] mutatott rá arra a paradox jelenségre, hogy ha $\sigma$ az $F(x)$ eloszlásfüggvény szórása:

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} (x - m)^2\,dF(x),$$

a $H(x)$ eloszlásfüggvény várható értéke $\frac{m^2 + \sigma^2}{2m}$, vagyis $m$-nél nagyobb is lehet, ha $\sigma > m$, sőt, $\infty$ is lehet, ha $\sigma = \infty$. Ezzel szemben, abban az esetben, ha $m = \infty$, $\delta_t$-nek a határeloszlása nem létezik, pontosabban $\mathbf{P}(\delta_t < x) \to 0$, ha $0 < x < \infty$ és $t \to \infty$. Ezzel szemben $\delta_t$ feltételes eloszlásának létezik a határértéke, mégpedig fennáll a következő

1. TÉTEL. *Legyen* $G(x)=\int_0^x (1-F(t))dt$, *és tegyük fel, hogy*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xG'(x)}{G(x)}=0.$$

*Akkor*

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(\delta_t<x\,|\,\delta_t<y)=\frac{G(x)}{G(y)},\quad \text{ha}\quad 0<x\leqq y.$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $F_n(u)$ az $F(u)$ függvény $n$-szeres kompozíciója és

$$\sum_{n=1}^{\infty}F_n(u)=\Phi(u),$$

akkor

$$\mathbf{P}(\delta_t<x\,|\,\delta_t<y)=\frac{\alpha_x(t)}{\alpha_y(t)},$$

ahol

$$\alpha_x(t)=\int_0^t\beta_x(u)\,du\quad\text{és}\quad\beta_x(u)=\int_0^u\{F(v+x)-F(v)\}\,d_v\Phi(u-v).$$

Számítsuk ki $\beta_x(u)$ LAPLACE-transzformáltját, amelyet $\psi_x(s)$-sel jelöljünk. Legyen

$$\varphi(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}\,dF(x),$$

akkor

$$\psi_x(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}\beta_x(t)\,dt=\varphi(s)\frac{e^{sx}-1}{s}+\frac{\varphi(s)}{1-\varphi(s)}\int_0^x e^{s(x-v)}(1-F(v))\,dv,$$

ennélfogva $\psi_x(s)\to\infty$, ha $s\to 0$, feltéve, hogy $m=\infty$. Mivel $\beta_x(t)\geqq 0$, $\alpha_x(t)$ monoton növekvő és

$$\psi_x(s)=\int_0^{\infty}e^{-ts}\beta_x'(t)\,dt=\int_0^{\infty}e^{-ts}\,d\alpha_x(t).$$

Nyilvánvaló, hogy ha $s>0$, $\psi_x(s)$ pozitiv és monoton csökkenő függvény. Legyen $\psi_x(s)=\frac{1}{s}L_x\left(\frac{1}{s}\right)$; ekkor egy ismert TAUBER típusú tétel szerint (lásd: HARDY [14] 7. fej. 11. §. 108. tétel) ha teljesül az

$$L_x(cz)\approx L_x(z),\ \text{ha}\ c>0\ \text{és}\ z\to\infty$$

feltétel, akkor következik, hogy

$$\alpha_x(t)\approx L_x(t),\ \text{ha}\ t\to\infty.$$

Az $L_x(cz)\approx L_x(z)$ feltétel teljesül, ha $\lim_{x\to\infty}\frac{xG'(x)}{G(x)}=0$, Ugyanis

$$\frac{L_x(cz)}{L_x(z)}\approx\frac{1-\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{c\left[1-\varphi\left(\frac{1}{cz}\right)\right]},$$

másrészt viszont

$$\frac{1-\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{c\left[1-\varphi\left(\frac{1}{cz}\right)\right]}=\frac{\int_0^\infty (1-F(t))e^{-\frac{t}{z}}dt}{\int_0^\infty (1-F(t))e^{-\frac{t}{cz}}dt}$$

és így

$$\frac{e^{-\frac{A}{z}}}{1+\frac{czG'(A)e^{-\frac{A}{cz}}}{G(A)}}\leqq\frac{1-\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{c\left[1-\varphi\left(\frac{1}{cz}\right)\right]}\leqq\frac{1+\frac{e^{-\frac{A}{z}}G'(A)z}{G(A)}}{e^{-\frac{A}{cz}}}$$

ahol $A>0$ tetszőleges.

Legyen $A=\varepsilon z$ és végezzük el a $z\to\infty$ határátmenetet; figyelembevéve, hogy feltevéseink szerint $\lim_{A\to\infty}\frac{AG'(A)}{G(A)}=0$, következik, hogy

$$e^{-\varepsilon}\leqq\varliminf_{z\to\infty}\frac{1-\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{c\left(1-\varphi\left(\frac{1}{cz}\right)\right)}\leqq\varlimsup_{z\to\infty}\frac{1-\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{c\left(1-\varphi\left(\frac{1}{cz}\right)\right)}\leqq e^{\frac{\varepsilon}{c}}.$$

Mivel $\varepsilon>0$ tetszőleges, következik, hogy

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1-\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{c\left(1-\varphi\left(\frac{1}{cz}\right)\right)}=1.$$

Ilyen módon valóban teljesül az $L_x(cz)\approx L_x(z)$ feltétel, ha $c>0$ és $z\to\infty$, és így az említett TAUBER-tétel szerint $\alpha_x(t)\approx L_x(t)$. Hasonlóképpen látható be, hogy $\alpha_y(t)\approx L_y(t)$. Ennélfogva

$$\frac{\alpha_x(t)}{\alpha_y(t)}\approx\frac{L_x(t)}{L_y(t)},$$

és mivel

$$\lim_{t\to\infty}\frac{L_x(t)}{L_y(t)}=\frac{G(x)}{G(y)},$$

tételünk állítása azonnal következik.

Megjegyzendő, hogy abban az esetben, ha $m=\int_0^\infty x\,dF(x)=G(\infty)$ létezik, akkor $G(x)$ korlátos és mivel

$$x(1-F(x))\leqq 2\int_{\frac{x}{2}}^{x}(1-F(u))\,du,$$

tehát

$$\lim_{x\to\infty} xG'(x)=0,$$

és így a $\lim_{x\to\infty}\frac{xG'(x)}{G(x)}=0$ feltétel teljesül; mivel továbbá ez esetben $G(\infty)=$ $=m=-\varphi'(0)$, tehát a fenti bizonyításból következik, hogy ebben az esetben

$$\lim_{t\to\infty} L_x(t)=\frac{G(x)}{m}$$

és így

$$\lim_{t\to\infty}\alpha_x(t)=\frac{G(x)}{m}$$

vagyis speciális esetként nyerjük az ismert FELLER-féle eredményt.*

Megjegyzendő, hogy az előbb alkalmazott TAUBER-tétel alkalmazható magára $\Phi(t)$-re is. Abból, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st}\,d\Phi(t)=\frac{\varphi(s)}{1-\varphi(s)}=\frac{1}{s}L\left(\frac{1}{s}\right)$$

ahol

$$L(z)=\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{\frac{1}{z}\left(1-\varphi\left(\frac{1}{z}\right)\right)} \quad \text{és} \quad L(cz)\approx L(z), \quad \text{ha} \quad c>0$$

és $z\to\infty$, továbbá figyelembe véve, hogy $\Phi(t)$ monoton nemcsökkenő, következik, hogy

$$\Phi(t)\approx\frac{1}{1-\varphi\left(\frac{1}{t}\right)}.$$

Mivel az is belátható, hogy $\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi(t-u)}{\Phi(t)}=1$, ha $u$ tetszőleges rögzített pozitív szám, következik, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t g(u)\frac{\Phi(t-u)}{\Phi(t)}\,du=\int_0^\infty g(u)\,du,$$

ha $g(u)$ nemnegatív és integrálható függvény, amelyre $\int_0^\infty g(u)\,du$ véges.

* Abban az esetben, amikor $G(\infty)$ véges, több is igaz, mégpedig az, hogy $\lim_{x\to\infty}\beta_x(t)=\frac{G(x)}{m}$ feltéve, hogy $F(x)$ nem rácsos eloszlású. Az $m=\infty$ esetben ennek megfelelő tétel érvényességének eldöntése igen érdekes volna.

Figyelembe véve, hogy

$$\int_0^t \left( \int_0^u \{F(x+v)-F(v)\}\, d_v \Phi(u-v) \right) du = \int_0^t (F(x+u)-F(u))\, \Phi(t-u)\, du,$$

következik, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(\delta_t < x) \frac{t}{\Phi(t)} = G(x),$$

tehát

$$\mathbf{P}(\delta_t < x) \approx \frac{G(x)\,\Phi(t)}{t} \approx \frac{G(x)}{t\left(1-\varphi\left(\frac{1}{t}\right)\right)}$$

és így valóban

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(\delta_t < x) = 0,$$

ha

$$G(\infty) = \infty,$$

tehát $\delta_t$ közönséges határeloszlása nem létezik.

Megjegyzendő, hogy ebből a meggondolásból egy újabb bizonyítást nyerhetünk az 1. tételre.

*Magyar Tudományos Akadémia*
*Alkalmazott Matematikai Intézete*

IRODALOM

[1] A. N. Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, Berlin, 1933.
[2] P. Halmos, Measure theory, van Nostrand, New-York, 1951.
[3] J. L. Doob, Stochastic processes, Wiley, New-York, 1953.
[4] С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1946. (4. kiadás.)
[5] Rényi A.: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
[6] B. V. Gnyegyenko—A. N. Kolmogorov: Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai, Akadémiai Kiadó, Budapest. 1951.
[7] Rényi A. К теорий предельных теории для сумм независимых случайных величин. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1 (1950) 99—108.
[8] A. N. Kolmogorov: Egy tétel a feltételes várható értékek konvergenciájáról és annak néhány alkalmazása. I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952. 377—386.*
[9] В. А. Рохлин: Об основных понятиях теорий меры. Мат. Сборник 25 (67) (1949), 107—150.
[10] C. Ryll Nardzewski: On quasi-compact measures. Fund. Math. 40 (1953) 125—130.

* E. Marczewski volt szíves felhívni figyelmemet a következő dolgozatra: E. Sparre Andersen—B. Jessen: Some limit theorems on integrals in an abstract set, Kgl. Danske Vidensk. Selskab. Mat. Fys. Medd. 22. No. 14. (1946) 1—29., amely hasonló problémákkal foglalkozik, mint Kolmogorov [8] munkája.

[11] T. E. Harris—H. Robbins: Ergodic theory of Markov chains admitting an infinite invariant measure, Proc. Nat. Acad. Sci. 39 (1953) 860—864.
[12] W. Feller: On the integral equation of renewal theory. Ann. Math. Statistics. 12 (1941) 243—267. (l. még a következő dolgozatokat: S. Täcklind: Elementare Behandlung vom Erneuerungsproblem, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1944, 1–15. és Fourier-analitische Behandlung vom Erneuerungsproblem, u. o. 1945. 101—105., továbbá J. L. Doob Renewal theory from the point of view of the theory of probability Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948) 422—438).
[13] Takács L.: Egy új módszer rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalásánál. AMI Közleményei II. köt. (1953) 135—163. Budapest.
[14] G. H. Hardy: Divergent series. Oxford, 1949.
[15] H. Reichenbach, Wahrscheinlichkeitslehre, A. W. Sijthoff, Leiden, 1935.
[16] K. L. Chung, Contributions to the theory of Markov chains. Trans. Amer. Math. Soc. 76 (1954). 397—419.
[17] M. Fréchet, Des familles et fonctions additives d'ensemble abstraits, Fundamenta Mathematicae 4 (1923) 329—365, o. 48. tétel, 364.
[18] H. Hahn és A. Rosenthal, Set functions, New Mexico, 1948, 48.
[19] Erdös Pál és K. L. Chung, Probability limit theorems assuming only the firts moment I. Memoirs of the Amer. Math. Soc. No. 6. 1952.
[20] А. Н. Колмогоров, Цепы Маркова со счётным множеством возможных состояний, Бюлл. М. Г. У. 1 (1937).
[21] W. Doeblin, Sur deux problèmes de M. Kolmogoroff concernant les chaines denombrables, Bull. Soc. Math. de France 66 (1938) 210—220.
[22] K. L. Chung, An ergodic theorem for stationary Markov chains with a countable number of states, Proceedings International Congress of Math. Cambridge (USA) 1950, Amer. Math. Soc. 1952. I. kötet 568.

# *HOZZÁSZÓLÁS*

CSÁSZÁR ÁKOS
a matematikai tudományok doktora:

## A feltételes valószínűségi mezőkről

Legyen $H$ tetszőleges halmaz, $T_1$ a $H$ halmaz részhalmazaiból álló Borel-féle halmaztest, $T_2$ pedig $T_1$-nek egy részhalmaza. A $P(A|B)$ kétváltozós halmazfüggvény legyen értelmezve $A \in T_1$, $B \in T_2$ esetén.

Rényi Alfréd a következő három axiómát teszi fel:

I. $P(A|B) \geqq 0$ és $P(B|B) = 1$.
II. Rögzített $B \in T_2$ mellett $P(A|B)$ mint $A$ függvénye teljesen additív.
III. $A \in T_1$, $C \in T_1$, $B \in T_2$, $BC \in T_2$ esetén

$$P(A|BC)\,P(B|C) = P(AB|C).$$

Rögtön látható, hogy I. és II. alapján III. egyenértékű a következő két axiómával:

$III_1$. $A \in T_1$, $B \in T_2$ esetén $P(A|B) = P(AB|B)$.
$III_2$. $A \in T_1$, $B \in T_2$, $B' \in T_2$, $A \subset B \subset B'$ esetén

$$P(A|B)\,P(B|B') = P(A|B').$$