Egy kombinatorikai probléma, amely a lucerna nemesítésével kapcsolatban merült fel

RÉNYI ALFRÉD

Bevezetés

A Martonvásári Mezőgazdasági Kutatóintézet néhány év előtt az Alkalmazott Matematikai Intézethez fordult, a következő problémával: nagyszámú lucerna fajtát kívánnak elvetni olymódon, hogy minden fajtából néhány sort vetnek el, mégpedig úgy, hogy bármely két fajta keresztezõdése lehetséges legyen. Mivel a beporzást méhek végzik, és a méhek nem repülnek nagyobb távolságot leszállás nélkül, ehhez az szükséges, hogy bármely két fajta egymástól bizonyos d távolságon belül előforduljon, vagyis bármely két fajta előforduljon olyan két sorban, amelyeket egymástól legfeljebb $r-1$ sor választ el, ahol $r=\left[\frac{d}{\delta}\right]$ és δ jelöli két sor távolságát. A probléma abban áll, hogyan lehet adott n számú fajta — és adott megengedett d távolság — esetében ezt minél kevesebb vetőmaggal, tehát minél kevesebb vetéssorral megoldani.

A kérdés matematikailag nyilvánvalóan a következőképpen fogalmazható meg: keresendő az $1, 2, \ldots, n$ számokból álló olyan, lehetőleg rövid számsorozat, amelyben az $1, 2, \ldots, n$ számok közül bármely kettő előfordul olyan helyzetben. hogy azokat egymástól legfeljebb $r-1$ szám választja el ($r=1, 2, \ldots$; $n=r+2, r+3, \ldots$). Például, ha $n=8$ és $r=2$, akkor egy ilyen minimális sorozat a következő:

$$1, 2, 3, 4, 5, 1, 6, 7, 2, 5, 8, 7, 3, 4, 6, 8, 1 \tag{1}$$

Az (1) sorozat 17 számból áll, az 1-es háromszor, a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számok mindegyike kétszer fordul benne elő, és az $1, 2, \ldots, 8$ számokból kiválasztható 28 számpár mindegyike előfordul az (1) sorozatban, olyan helyzetben, hogy vagy szomszédosak, vagy csak egy szám választja el őket (a (3, 4), az (1, 6), és az (5, 7) számpárok kétszer is előfordulnak ilyen helyzetben). Az $n=8$ és $r=2$

esetre vonatkozólag az (1) sorozat nyilván a lehető legrövidebb ilyen sorozat; ugyanis egy, a sorozatban előforduló és nem az első két vagy az utolsó két helyen álló számnak négy olyan szomszédja van, amelyet tőle legfeljebb egy szám választ el, a második és az utolsó előtti helyen álló számnak három ilyen szomszédja, végül az első és az utolsó helyen álló számnak két ilyen szomszédja van. Mivel minden számjegynek az összes előfordulási helyen összeszámolva a fenti értelemben vett szomszédjait, ezek száma összesen legalább 7 kell hogy legyen, minden számjegynek legalább kétszer elő kell fordulnia, vagyis a sorozat tagjainak a száma nem lehet kevesebb, mint $2 \cdot 7 + 3 = 17$, és az (1) sorozat éppen ennyi tagból áll.

A kérdés teljes megoldásához nyilván arra volna szükség, hogy bármely n-re és r-re legalább egy minimális sorozatot meg tudjunk adni. Gyakorlati szempontból kielégítő egy olyan szerkesztési módszer is, amely bármely n-re és r-re egy olyan sorozatot szolgáltat, amely nem lényegesen hosszabb a minimális sorozatnál. Annnak idején egy ilyen, gyakorlatilag kielégítő módszert adtunk meg a Martonvásári Intézetnek, amelyet ott azóta is alkalmaznak. A módszer közzétételével azért vártunk, mert úgy gondoltuk, hogy idővel a probléma teljes megoldását is megtaláljuk. Azóta valóban előbbre jutottunk a kérdés megoldása terén, és bár a probléma teljes megoldásától még távol vagyunk, több szempont is szól amellett, hogy az elért szerény eredményeket összefoglaljuk. A kérdés ugyanis bizonyos érdeklődésre tarthat számot abból a szempontból, hogy egy gyakorlati feladat meglehetősen bonyolult kombinatorikai kérdésre vezet és a kérdés megoldása érdekes példája annak, hogy a számelmélet teljesen elvontnak látszó tételei, mint például *Thue* tétele, vagy az a tétel, hogy x^3 és $(x+1)^3$ között mindig van törzsszám, $(x = 1, 2, \ldots,)$, gyakorlati alkalmazást találhat. Másrészt a kérdés matematikai szempontból sem érdektelen, és talán e közlemény felkelti mások érdeklődését is és ezúton elvezet a probléma teljes megoldásához.

1. §. *Alsó becslések*

A rövidség kedvéért néhány jelölést és definiciót vezetünk be: Jelentsen $S(n, r)$ egy tetszőleges olyan, az $1, 2, \ldots, n$ számokból álló számsorozatot, amelyben az $1, 2, \ldots, n$ számok közül kiválasztható $\binom{n}{2}$ számpár mindegyike legalább egyszer előfordul olyan helyzetben, ahol őket legfeljebb $r-1$ közbeeső szám választja el $(r = 1, 2, \ldots; n = r+2, r+3, \ldots)$. Egy S sorozat hosszát jelölje

$H(S)$ és legyen $M(n,r) = \min H(S(n,r))$, vagyis $M(n,r)$ az $S(n,r)$ sorozatok hosszának minimuma. Ha S_1 és S_2 két számsorozat, jelölje S_1+S_2 azt a sorozatot, amelyet úgy nyerünk, hogy S_1-et leírjuk, és S_1 jobb végéhez csatoljuk az S_2 sorozatot. Egy számsorozat kiválasztott tagjától jobbra (balra) álló számok közül azokat, amelyeket a kiválasztott tagtól legfeljebb $r-1$ szám választ el, a kiválasztott szám jobboldali (baloldali) r-szomszédjainak nevezzük, a jobb- és baloldali r-szomszédokat együtt a kiválasztott tag r-szomszédainak nevezzük. Jelölje végül $[a]$ az a valós szám egész részét, $\{a\}$ pedig a legkisebb a-nál nem kisebb egész számot. Ebben a §-ban kézenfekvő alsó becsléseket adunk $M(n,r)$-re vonatkozólag. Itt és a következőkben feltesszük, hogy $n \geqq r+2$, mivel az $n \leqq r+1$ eset triviális.[1]

1. tétel.

$$M(n,r) \geqq \left\{ \frac{r(r+1)+n(n-1)}{2r} \right\}. \tag{2}$$

Bizonyítás: Ha egy számsorozat N tagból áll, és $N \geqq r+2$, akkor abban az első $N-r$ tagnak rendre r jobboldali r-szomszédja van, az $N-r+j$-edik tagnak $(j=1,2,\dots,r)$ $r-j$ jobboldali r-szomszédja van, tehát a sorozat összes tagjai jobboldali r-szomszédjai számának összege $(N-r)r+\frac{r(r-1)}{2}=\frac{r(2N-r-1)}{2}$. Másrészt egy $S(n,r)$ sorozat az $1,2,\dots,n$ számok közül kiválasztható $\binom{n}{2}$ számú (i,j) számpár mindegyikét tartalmazza olyan helyzetben, ahol az i és a j számok közül az egyiknek a másik jobboldali r-szomszédja, vagyis kell, hogy teljesüljön az

$$\frac{r(2H(S(n,r))-r-1)}{2} \geqq \binom{n}{2}$$

egyenlőtlenség, amelyből $H(S(n,r)) \geqq \frac{r(r+1)+n(n-1)}{2r}$ és így az 1. tétel már következik.

Bizonyos esetekben valamivel jobb alsó becslést ad a következő

2. tétel:

$$M(n,r) \geqq n\left\{ \frac{n-1}{2r} \right\}. \tag{3}$$

[1] Ugyanis ha $n \leqq r+1$, akkor maga az $1,2,\dots,n$ sorozat $S(n,r)$ sorozat és egyben a legrövidebb ilyen sorozat, tehát $M(n,r)=n$, ha $n \leqq r+1$.

Bizonyítás: Egy tetszőleges számnak legfeljebb $2r$ r-szomszédja van; ha tehát egy $S(n, r)$ sorozatban az $1, 2, \ldots, n$ számjegyek egyike, pl. a k szám x-szer szerepel, akkor kell, hogy $x \cdot 2r \geqq n-1$ legyen, mivel a vizsgált k jegy r-szomszédai között az $1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$ számjegyek mindegyikének elő kell fordulnia. Így tehát kell, hogy $x \geqq \left\{\frac{n-1}{2r}\right\}$ és így $M(n, r) \geqq n\left\{\frac{n-1}{2r}\right\}$ legyen.

Megjegyzés: Ha pl. $n=23$ és $r=2$, akkor

$$\left\{\frac{n(n-1)+r(r+1)}{2r}\right\}=128 \quad \text{és} \quad n\left\{\frac{n-1}{2r}\right\}=138,$$

tehát a 2. tétel valamivel jobb becslést ad. Ezzel szemben, ha $n=16$ és $r=4$ akkor

$$\left\{\frac{n(n-1)+r(r+1)}{2r}\right\}=33, \quad \text{és} \quad n\left\{\frac{n-1}{2r}\right\}=32,$$

tehát ebben az esetben az 1. tétel ad jobb becslést. A 2. tételben szereplő becslés még valamit javítható, ha figyelembe vesszük, hogy az első r és az utolsó r tagnak $2r$-nél kevesebb r-szomszédja van. Így például ha $r=2$ és $n \equiv 0 \bmod 4$, akkor $M(n, 2) \geqq n\left\{\frac{n-1}{4}\right\}+1$. Ezt a következőképpen láthatjuk be: ha a sorozat balszélén álló szám x-szer fordul elő, akkor a szélső helyzetben csak 2 2-szomszédja van, vagyis teljesülnie kell a $4(x-1)+2 \geqq n-1$, vagyis az $x \geqq \left\{\frac{n+1}{4}\right\}$ egyenlőtlenségnek és így

$$M(n, 2) \geqq (n-1)\left\{\frac{n-1}{4}\right\}+\left\{\frac{n+1}{4}\right\}$$

egyenlőtlenségnek. Mivel ha $n \equiv 0 \bmod 4$ akkor $\left\{\frac{n+1}{4}\right\}=\left\{\frac{n-1}{4}\right\}+1$ következik, hogy ez esetben $M(n, 1) \geqq n\left\{\frac{n+1}{4}\right\}+1$.

Ha például $n=8$ és $r=2$, akkor az 1. tételből $M(8, 2) \geqq 16$, a 2. tételből is $M(8, 2) \geqq 16$ adódik, — míg a 2. tétel most említett élesítéséből $M(8, 2) \geqq 17$ adódik; láttuk a bevezetésben, hogy 17-tagú $S(8, 2)$-sorozat valóban megadható. A 2. tétel hasonló élesítésével az általános esetben nem foglalkozunk.

2. §. *Felső becslések*

Tegyük fel, hogy adott n-re és r-re megkonstruáltunk egy minimális hosszúságú $S(n, r)$-sorozatot. Ezt a sorozatot, amelyet $S^*(n. r)$-rel jelölünk, kiegészíthetjük $S(n+1, r)$-sorozattá, a következőképpen: először is feltehetjük, hogy $S^*(n, r)$ utolsó r eleme mind különböző, mert ha egy szám $S^*(n, r)$ utolsó r eleme között legalább kétszer fordul elő, akkor ezek közül az egyik elhagyható volna, és a sorozat még mindig $S(n, r)$ sorozat maradna, vagyis $S^*(n, r)$ nem volna minimális hosszúságú $S(n, r)$-sorozat. Mármost legyen $S^*(n, r)$ utolsó r eleme $a_1, a_2, \ldots, a_r$, ahol tehát az a_j ($j=1, 2, \ldots r$) számok különbözők; az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a_j = n+1-j$, ($j=1, 2, \ldots, r$). Csatoljuk $S^*(n, r)$-hez a következő $\Delta(n, r)$ sorozatot:

$$n+1, 1, 2, \ldots, 2r, n+1, 2r+1, \ldots, 4r, n+1, \ldots, n-r,$$

ha $n-r \equiv h \bmod 2r$, ahol $0 < h \leqq r$, illetve az

$$n+1, 1, 2, \ldots, 2r, n+1, 2r+1, \ldots, 4r, n+1, \ldots, n-r, n+1$$

sorozatot, ha $n-r \equiv h \bmod 2r$, ahol $r < h \leqq 2r$.

Ebben a sorozatban tehát két $n+1$-est mindig $2r$ különböző szám választ el, és így ebben a sorozatban az $1, 2, \ldots, n-r$ számok mindegyike valamelyik $n+1$-nek r-szomszédja. A $\Delta(n, r)$ sorozat tagjainak a száma

$$n-r+1+\left\{\frac{n-2r}{2r}\right\}$$

ugyanis ha $n-r=2mr+h$ és $0<h \leqq r$, akkor az $n+1$ szám $\Delta(n, r)$-ben $m+1$-szer fordul elő, ha pedig $r<h \leqq 2r$, akkor $m+2$-szer, és

$$\left\{\frac{n-2r}{2r}\right\} = \left\{\begin{matrix} m \\ m+1 \end{matrix}\right\} \text{ ha } n-r=2mr+h \text{ és } \left\{\begin{matrix} 0<h \leqq r \\ r<h \leqq 2r \end{matrix}\right.$$

Ennélfogva

$$H(\Delta(n, r)) = (n-r+1)+\left\{\frac{n-2r}{2r}\right\}$$

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

3. tétel.

$$M(n+1, r) \leqq M(n, r)+n-r+1+\left\{\frac{n-2r}{2r}\right\}. \tag{4}$$

A 3. tétel segítségével egy felső becslés nyerhető $M(n, r)$-re, ha $M(m, r)$-et, vagy annak egy felső becslését egy $m < n$-re ismerjük. Például, mint láttuk, $M(8, 2) = 17$, ennélfogva a 3. tétel szerint $M(9, 2) \leqq 17 + 7 + 1 = 25$, és

$$1, 2, 3, 4, 5, 1, 6, 7, 2, 5, 8, 7, 3, 4, 6, 8, 1. 9, 2, 3, 4, 5, 9, 6, 7, \quad (5)$$

egy $S(9, 2)$-sorozat. Valójában $M(9, 2) \leqq 22$. Ezt a következőképpen láthatjuk be:

A (1) alatti sorozatnak hagyjuk el az utolsó elemét, az 1-est, és csatoljuk hozzá a következő sorozatot: 9, 1, 2, 3, 4, 9, 5, 7. Ekkor a sorozat 24 tagúvá válik; azonban, mivel az 1, 2, 3, 4 számsorozat a hozzácsatolt részben előfordul, a sorozat elejéről 1 és 2 elhagyhatók és így a következő 22 tagú $S(9, 2)$ sorozatot nyerjük:

$$3, 4, 5, 1, 6. 7, 2, 5, 8, 7, 3, 4, 6, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 9, 5, 7. \quad (6)$$

Határozzuk meg most $M(n, 1)$ pontos értékét. Érvényes a következő

*4. tétel**;

$$M(n, 1) = \begin{cases} \binom{n}{2} + 1, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ \binom{n}{2} + \frac{n}{2}, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases} \quad (7)$$

Bizonyítás: Vizsgáljuk először páratlan n-ek esetét. Nyilván az 1231 sorozat a legrövidebb $S(3, 1)$-sorozat és így $M(3, 1) = 4$. Tegyük fel, hogy már bebizonyítottuk, hogy $M(2k-1, 1) = \binom{2k-1}{2} + 1$ és legyen $S^*(2k-1, 1)$ egy minimális hosszúságú $S(2k-1, 1)$-sorozat. Abból, hogy $H(S^*(2k-1, 1)) = \binom{2k-1}{2} + 1$, következik, hogy $S^*(2k-1, 1)$-ben minden $(i. j)$ pár $(i, j = 1, 2, \ldots, 2k-1; i \neq j)$ pontosan egyszer fordul elő. Ez csak úgy lehetséges, hogy $S^*(2k-1, 1)$-ben az $1, 2, \ldots, 2k-1$ számok mindegyike egy kivétellel pontosan $k-1$-szer fordul elő, az egyik pedig k-szor és ez a k-szor előforduló szám áll $S^*(2k-1, 1)$ elején és végén; az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ez a

* A 4. tétel páratlan n-re vonatkozó állítása ekvivalens a teljes gráf bejárására vonatkozó jólismert gráfelméleti tétellel. (l. pl. D. König: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig 1936. 20. o.) A dolgozatban tárgyalt problémakör gráfelméleti tárgyalása esetleg újabb eredményekhez is vezethet.

szám az 1-es; csatoljuk most $S^*(2k-1, 1)$-hez a következő Δ_{2k+1} sorozatot:

$$2k, 2, 2k+1, 3, 2k, 4, 2k+1, 5, \ldots, 2k+1, 2k-1, 2k, 2k+1, 1.$$

Könnyű belátni, hogy az $S^*(2k-1, 1)+\Delta_{2k+1}$ sorozat $S(2k+1, 1)$ sorozat és tagjainak száma

$$\binom{2k-1}{2}+1+2(2k-1)+1=\binom{2k+1}{2}+1.$$

Tehát $M(2k+1, 1) \leqq \binom{2k+1}{2}+1$. Azonban $S(2k+1, 1)$-ben az $1, 2, \ldots, 2k+1$ számok mindegyike legalább k-szor elő kell, hogy forduljon, és az a szám, amely az első helyen áll, legalább $k+1$-szer kell, hogy előforduljon, hiszen minden számnak legalább $2k$ első szomszédja kell, hogy legyen, vagyis $M(2k+1, 1) \geqq (2k+1)k+1 = \binom{2k+1}{2}+1$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $M(2k+1, 1) = \binom{2k+1}{2}+1$ vagyis a 4. tétel páratlan számokra vonatkozó állítását.

A mondottakból következik, hogy páratlan n-re léteznek *optimális* $S(n, 1)$ sorozatok, amelyekben tehát bármely (i, j) számpár $(i, j=1, 2, \ldots, n; i \neq j)$ pontosan egyszer fordul elő szomszédként. Például, kiindulva az $1, 2, 3, 1$ $S(3, 1)$ sorozatból $1, 2, 3, 1, 4, 2, 5, 3, 4, 5, 1$ optimális $S(5, 1)$ sorozatot és ebből az

$$1, 2, 3, 1, 4, 2, 5, 3, 4, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 6, 4, 7, 5, 6, 7, 1 \tag{8}$$

optimális $S(7, 1)$ sorozatot kapjuk.

Most vizsgáljuk meg páros n esetét.

Mindenek előtt nyilvánvaló, hogy egy $S(2k, 1)$ sorozat nem lehet optimális, ha $k \geqq 2$, vagyis olyan, amelyben bármely két szám pontosan egyszer fordul elő szomszédos helyzetben. Ugyanis egy $S(2k, 1)$ sorozatban, ha $k \geqq 2$, van olyan szám, amely a sorozatnak sem első, sem utolsó eleme, és egy ilyen számnak mindig páros számú szomszédja van. A 2. tételből következik, hogy

$$M(2k, 1) \geqq 2k^2 = \binom{2k}{2}+\frac{2k}{2},$$

tehát a (7) alattinál kisebb értéke $M(2k, 1)$-nek nem lehet. Másrészt ha $S^*(2k-1, 1)$ egy minimális $S(2k-1, 1)$ sorozat, amely 1-essel végződik, és Δ_{2k}-val jelöljük a

$$2k, 2, 3, 2k, 4, 5, 2k, 6, 7, \ldots, 2k\; 2k-2, 2k-1, 2k$$

sorozatot, $S^*(2k-1, 1)+\Delta_{2k}$ egy $S(2k, 1)$ sorozat és

$$H(S^*(2k-1, 1)+\Delta_{2k})=\binom{2k-1}{2}+1+3k-2=\binom{2k}{2}+\frac{2k}{2}.$$

Ezzel a 4. tételt páros n-re is igazoltuk.

Minimális hosszúságú (és egyben optimális) $S(2k+1, 1)$ sorozatok szerkesztésére egy másik eljárást is megadunk, abban az esetben, ha $2k+1=p$ törzsszám. Ez az eljárás azért érdekes, mert ez általánosítható azután tetszőleges r-re $S(p, r)$ sorozatok szerkesztésére. Legyen tehát p páratlan törzsszám, $p'=\frac{p-1}{2}$ és $a_k\equiv\frac{1}{k} \mod p$ $(k=1, 2, \ldots, p')$ és képezzük a következő sorozatot (minden szám $\mod p$ redukálandó úgy, hogy 1 és p közé essék):

$$1, 2, \ldots, p, a_2, 2a_2, \ldots, pa_2, a_3, 2a_3, \ldots, pa_3, \ldots, a_{p'}, 2a_{p'}, \ldots, pa_{p'}, 1. \tag{9}$$

A (9) sorozatnak $pp'+1=\binom{p}{2}+1$ tagja van: könnyen belátható, hogy ebben a sorozatban bármely (i, j) számpár $(i, j=1, 2, \ldots, p;$ $i\neq j)$ egyszer és csak egyszer fordul elő egymás mellett.

Ezt a következőképpen láthatjuk be: a $\pm a_1, \pm a_2, \pm a_3, \ldots, \pm a_{p'}$ számok mind különbözőek $\mod p$ ugyanis nyilván $a_h\not\equiv a_k \mod p$, ha $h\neq k$, másrészt ha $a_h\equiv -a_k \mod p$ volna, akkor $\frac{1}{h}+\frac{1}{k}=$ $=\frac{h+k}{hk}\equiv 0 \mod p$ és így $h+k\equiv 0 \mod p$ volna, de ez lehetetlen, mivel $2\leqq h+k\leqq p-1$. Ennélfogva a $0, \pm a_1, \pm a_2, \ldots, \pm a_{p'}$ számok között a $0, 1, 2, \ldots, p-1$ számok mindegyike (és mindegyik egyszer) előfordul $\mod p$. Itt tulajdonképpen *Thue* egy ismert tételének (l. pl. H. *Scholz,* Einführung in die Zahlentheorie, Göschen Bd. 1131., 45. o.) egy speciális esetéről van szó. *Thue* tétele a következőképpen szól:

Legyen p tetszőleges páratlan törzsszám, a és b legyen két egész szám, $(1<a<p, 1<b<p)$, amelyekre $ab>p$. Akkor bármely z egész számhoz találhatók olyan x és y egész számok, hogy $-a<x<+a$ és $1\leqq y<b$, továbbá $z\equiv\frac{x}{y} \mod p$.

A tételből speciális esetként $\left((a=2, b=\frac{p+1}{2}\right)$ következik tehát, hogy bármely z egész szám előállítható $z\equiv\frac{x}{y} \mod p$ alakban, ahol $x=\pm 1$ vagy $x=0$ (a $z=0$ esetben) és $1 \leqq y \leqq p'$. Tehát bármely i-hez és j-hez, ha $i \not\equiv j \mod p$, található olyan y $(1 \leqq y \leqq p')$, hogy $i-j \equiv \frac{1}{y} \mod p$ vagy $i-j \equiv -\frac{1}{y} \mod p$. Mármost legyen $m \equiv yj \mod p$ és $1 \leqq m < p$, akkor tehát $j \equiv ma_y$ és $i \equiv (m+1)a_y \mod p$ vagy $i \equiv (m-1)a_y \mod p$ és így a $p, a_y, 2a_y, \ldots (p-1)a_y, pa_y$ számsorozatban, (amelyben minden szám a vele $\mod p$ kongruens és 1 és p közé eső számmal pótlandó), i és j szomszédos helyzetben előfordulnak. Így például ha $p=7$, a következő $S(7, 1)$ sorozatot nyerjük:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 4, 1, 5, 2, 6, 3, 7, 5, 3, 1, 6, 4, 2, 7, 1 \tag{10}$$

Most térjünk vissza az általános tételre. Thue tétele $r > 1$-re is felhasználható $S(n, r)$ sorozatok konstruálására, abban az esetben, ha n törzsszám. Ezen az úton a következő tételt nyerjük:

5. *tétel: Ha p páratlan törzsszám, és $r < p$, akkor*

$$M(p, r) \leqq \left(\left\{\frac{p+1}{r+1}\right\}-1\right)(p+r-1)+1. \tag{11}$$

Bizonyítás: Legyen $a_k \equiv \frac{1}{k} \mod p$ és $1 \leqq a_k < p$, ha $k=1, 2, \ldots, p' = \left\{\frac{p+1}{r+1}\right\}-1.$

Képezzük a következő Δ_{pk} sorozatokat:

$$a_k, 2a_k, 3a_k, \ldots, pa_k, a_k, 2a_k, \ldots, ra_k \tag{12}$$

és ezeket a Δ_{pk} sorozatokat $(k=1, 2, \ldots, p')$ írjuk egymás után. Az így kapott $\sum_{k=1}^{p'} \Delta_{pk}$ sorozat $S(p, r)$ sorozat. Ugyanis, ha i és j két tetszőleges szám, $1 \leqq i < j \leqq p$, akkor Thue tételét az $a=r+1$, $b=\left\{\frac{p+1}{r+1}\right\}=p'+1$ esetre alkalmazva, következik, hogy találhatók olyan $x(-r \leqq x \leqq +r)$ és olyan $y(1 \leqq y \leqq p')$ egész számok, hogy

$$i-j \equiv \frac{x}{y} \mod p.$$

Ha most $m \equiv jy \mod p$ $(1 \leqq m \leqq p)$, akkor tehát $j \equiv ma_y \mod p$ és $i \equiv (m+x)a_y \mod p$ és így a Δ_{py} sorozatban i és j r-szomszédok. Mivel Δ_{py} tagjainak száma $p+r$, tehát

$$H\left(\sum_{k=1}^{p'} \Delta_{pk}\right) = \left(\left\{\frac{p+1}{r+1}\right\}-1\right)(p+r).$$

Az eredmény még egy keveset élesíthető; ehhez azt kell csak észrevennünk, hogy a Δ_{pk} sorozatok helyett egymás mellé illeszthetjük a következő $\Delta_{pk}^{(hk)}$ sorozatokat:

$$(h_k+1)a_k, (h_k+2)a_k, \ldots, pa_k, a_k, 2a_k, \ldots (r+h_k)a_k \qquad (13)$$

ahol h_k tetszőleges pozitív egész szám, és képezhetjük belőlük az

$$S^*(p,r) = \sum_{k=1}^{p'} \Delta_{pk}^{(h_k)} \qquad (14)$$

sorozatot. Mármost h_k értéket mindig választhatjuk úgy, hogy teljesüljön a $(h_k+1)a_k \equiv (r+h_{k-1})a_{k-1} \bmod p$ kongruencia. Ehhez ugyanis csak az szükséges, hogy teljesüljön a

$$h_k \equiv k a_{k-1}(r+h_{k-1}) - 1 \equiv \frac{k}{k-1}(r+h_{k-1}) - 1 \bmod p$$

kongruencia; ez esetben azonban $\Delta_{pk}^{(h_k)}$ első tagja meg fog egyezni $\Delta_{pk-1}^{(h_{k-1})}$ utolsó tagjával és így $\Delta_{pk}^{(h_k)}$ első tagja kihagyható a sorozatból, ha $k = 2, 3, \ldots p'$; az ilyen módon nyert $S^*(p,r)$ sorozatra nyilván

$$H(S^*(p,r)) = \left(\left\{\frac{p+1}{r+1}\right\} - 1\right)(p+r-1)+1.$$

Ezzel az 5. tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzendő, hogy a gyakorlatban gyakran blokkokra kell szétvágni az $S(n,r)$ sorozatot, ugyanis nincs hely arra, hogy az összes barázdák egy vonalban helyezkedjenek el. A fent adott szerkesztés lehetővé teszi a kérdés megoldását ebben az esetben is, ugyanis a $\Delta_{pk}^{(h_k)}$ sorozatoknak nem szükségképpen kell egymáshoz csatlakozniok, kerülhetnek külön blokkokba. Ez esetben természetesen a $\Delta_{pk}^{(h_k)}$ sorozatok utolsó tagjának elhagyása nem lehetséges.

Lehetséges, hogy az így konstruált sorozatban további felesleges tagok is vannak. Ezt a konstrukció során mindig meg kell figyelni. Így például legyen $p=11$ és $r=4$, akkor $\left\{\frac{p+1}{r+1}\right\} = 3$ és így, mivel $\frac{1}{2} \equiv 6 \bmod 11$,

$$\left(\left\{\frac{11+1}{4+1}\right\} - 1\right)(11+4-1)+1 = 29$$

és konstrukciónk a következő 29 tagú sorozatot szolgáltatja:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 1, 2, 3, 4, 10, 5, 11,$$
$$6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5, 11. \qquad (15)$$

A 2. tétel szerint $M(11, 4) \geqq 11 \left\{\frac{10}{8}\right\} = 22$; ebből sejthető, hogy még néhány tag elhagyható a sorozatból; valóban, az első helyen álló 1-es, a második helyen álló 2-es, a 16-ik helyen álló 10-es és a 29-ik helyen álló 11-es elhagyható, és így a következő 25 tagú $S(11, 4)$ sorozatot nyerjük:

$$3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 11, 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5 \quad (16)$$

Ez a sorozat azonban még így sem a legrövidebb, ugyanis a következő sorozat:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 10, 11, 9, 4, 5, 6, 7, 8, 10. 11 \quad (17)$$

pontosan 22 tagból áll, tehát minimális hosszúságú $S(11, 4)$ sorozat

A most tárgyalt példa azt is megmutatja, hogy egy tetszőleges eljárással egy $S(n, r)$ sorozatot konstruálva azt utólag mindig tanácsos megvizsgálni, hogy nincsenek-e benne elhagyható tagok; nem igaz azonban az, hogy ha egy $S(n, r)$ sorozat egy tagja sem hagyható el, akkor az minimális sorozat.

Az 5. tétel bizonyításánál alkalmazott konstrukció segítségével bármely n-re és r-re megadható egy nem túlságosan hosszú $S(n, r)$ sorozat. Az eljárás a következő:

a) megkeressük a legnagyobb törzsszámot, amely nem nagyobb n-nél, jelöljük ezt p-vel. b) a fent megadott eljárással konstruálunk egy $S(p, r)$ sorozatot. c) ebből elhagyjuk a felesleges tagokat, d) a 3. tétel bizonyítása során alkalmazott eljárás ismételt felhasználásával az $S(p, r)$ sorozatot előbb $S(p+1, r)$ sorozattá, azután $S(p+2, r)$ sorozattá, ... végül $S(n, r)$ sorozattá alakítjuk át, minden lépés után elhagyva a felesleges tagokat. Például ha $n = 21$ és $r = 6$, a következőképpen járunk el: a legnagyobb törzsszám 21 alatt a 19, mivel $\left\{\frac{19+1}{6+1}\right\} = 3, p' = 2$ és mivel $\frac{1}{2} \equiv 10 \bmod 19$. tehát

$$\begin{gathered}1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,\\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 16, 7, 17, 8, 18, 9, 19, 10, 1, 11, 2, 12, 3, 13,\\ 4, 14, 5, 15, 6, 16, 7, 17, 8, 18\end{gathered}$$

egy 49 tagú $S(19, 6)$ sorozat; ebből az utolsó helyen álló 18-as, és a 47-ik helyen álló 17-es, továbbá a 45-ik helyen álló 16-os elhagyható; az így kapott 46 tagú

$$\begin{gathered}1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,\\ 1, 2,, 3, 4, 5, 6, 16, 7, 17, 8, 18, 9, 19, 10, 1, 11, 2, 12, 3,13,\\ 4, 14, 5, 15, 6, 7, 8\end{gathered}$$

sorozathoz hozzáfűzzük a 20, 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 20, 19, 15-tagú sorozatot és így egy 61 tagú

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 16, 7, 17, 8, 18, 9, 19, 10, 1, 11, 2, 12, 3, 13, 4, 14, 5, 15, 6, 7, 8, 20, 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 20, 19

$S(20, 6)$-sorozatot kapunk. Az így kapott 61 tagú $S(20, 6)$ sorozathoz csatoljuk hozzá a

21, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 21, 13, 14, 15

17-tagú sorozatot, akkor egy 78 tagú $S(21, 6)$-sorozatot nyerünk. Ebből a sorozatból azonban nyilvánvalóan elhagyhatók az elején álló 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 és a 13-ik helyen álló 13-as, és így egy 69 tagú $S(21, 6)$ sorozatot nyerünk.

Az 5. tétel segítségével bebizonyítjuk a következő tételt:

6. tétel:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M(n, r)}{n^2} \leqq \frac{1}{r+1} \quad (r=2, 3, \ldots) \tag{18}$$

Bizonyítás: Legyen n egy tetszőleges egész szám, legyen p_n a legnagyobb n-nél nem nagyobb törzsszám, akkor az 5. tétel szerint (ha $n \geqq r+2$)

$$M(p_n, r) \leqq \left(\left\{\frac{p_n+1}{r+1}\right\}-1\right)p_n + r - 1) + 1 \leqq \frac{(n+1)(n+r)}{r+1}$$

Másrészt a 3. tétel szerint

$$M(n, r) \leqq M(p_n, r) + \sum_{m=p_n}^{n-1}\left(m - r + 1 + \left\{\frac{m-2r}{2r}\right\}\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{(n+1)(n+r)}{r+1} + (n-p_n)\left(n - r + \frac{n}{2r}\right). \tag{19}$$

Az analitikus számelméletből ismeretes*, hogy megadható olyan α $(0<\alpha<1)$ szám, és olyan $C>0$ n-től független állandó, hogy elég nagy n-re $n-p_n < Cn^\alpha$. Ennélfogva (19)-ből

$$\frac{M(n, r)}{n^2} \leqq \frac{1}{r+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{r}{n}\right) + \left(1+\frac{1}{2r}\right)C\cdot n^{\alpha-1} \tag{20}$$

* Ugyanis Ingham [2] bebizonyította, hogy x^3 és $(x+1)^3$ között mindig van törzsszám, ha x elég nagy egész szám. Ennélfogva, ha n elég nagy és x a legnagyobb egész szám, amelyre $(x+1)^2 \leqq n$, akkor van olyan p_n, amelyre $x^3 < p_n \leqq (x+1)^3$, tehát $n-p_n \leqq (x+2)^3 - x^3 \leqq 6x^2 + 12x + 8 \leqq 26x^2$. Mivel $x^3 \leqq n$ tehát $x^2 \leqq n^{\frac{2}{3}}$ és így $n - p_n \leqq 26 n^{\frac{2}{3}}$.

és így

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M(n,r)}{n^2} \leqq \frac{1}{r+1} \tag{21}$$

Összehasonlításul mondjuk ki a következő tételt is, amely akár az 1. akár a 2. tételből következik:

7. tétel:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{M(n,r)}{n^2} \geqq \frac{1}{2r} \tag{22}$$

Nyitott kérdés, hogy létezik-e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M(n,r)}{n^2} = \mu \tag{23}$$

és ha igen, mi az értéke. A 6. és 7. tételek szerint, (ha létezik) μ értéke $\frac{1}{2r}$ és $\frac{1}{r+1}$ közé esik. Amennyiben sikerülne bebizonyítani, hogy $\mu = \frac{1}{2r}$, ez azt jelentené, hogy bármely nagy n-re megadható olyan $S(n,r)$ sorozat, amelyben az ismétlődő r-szomszédságok száma az összes r-szomszédságok számához képest elhanyagolhatóan kicsiny, ezzel szemben $\mu > \frac{1}{2r}$ azt jelentené, hogy ez nem lehetséges. Úgy látszik, hogy ha $r \geqq 3$, a második lehetőség áll fenn, ezt azonban eddig nem sikerült bebizonyítanom.*

* N. G. de Bruijn (Amsterdam) bebizonyította, hogy ha $r = 2$, akkor $\mu = \frac{1}{4} = \frac{1}{2r}$. (Szóbeli közlés). de Bruijn bizonyítása, melyet szíves hozzájárulásával itt közlök, a következő: Legyen $n = 2p$. ahol $p = 2k + 1$ törzsszám; jelölje A_s az $1, s+1, 2s+1, \ldots, ns+1, (n+1)s+1$ számokból álló sorozatot (minden szám mod n redukálandó) és jelentse S az $A_1, A_3, A_5 \ldots, A_p$ sorozatok egyesitését. Bebizonyítjuk, hogy S $S(n,2)$ sorozat. Legyen i és j két tetszőleges egész szám $(1 \leqq i < j \leqq n)$ és legyen $j - i = d$. Ha d páratlan és $d \leqq p$, i és j szomszédosak az A_d sorozatban; ha d páratlan és $p < d$, akkor j és i szomszédok az A_{n-d} sorozatban. Ha d páros és $d \equiv 2 \bmod 4$, akkor i és j másodszomszédok az $A_{\frac{d}{2}}$ sorozatban, végül ha $d \equiv 0 \bmod 4$, akkor j és i másodszomszédok az $A_{\frac{n-d}{2}}$ sorozatban. Másrészt $H(S) = \left(\frac{p+1}{2}\right)(n+2) = \frac{(n+2)^2}{4}$. Ingham tételének alkalmazásával (ugyanúgy mint a 6. tétel bizonyításában) adódik, hogy $\limsup_{n\to\infty} \frac{M(n,2)}{n^2} \leqq \frac{1}{4}$ és így a 7. tétel figyelembevételével, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{M(n,2)}{n^2} = \frac{1}{4}$.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ КОМБИНАТОРИКИ

А. Реньи

Резюме

Нижеследующая проблема комбинаторики встречалась в ходе исследования вопроса облагораживания люцерны:

Пусть $M(n, r)$ означает длину наикратчайшей из последовательностей чисел, состоящих из чисел $1, 2, \ldots, n$, в которых каждая пара чисел i, j (при $1 \leqq i < j \leqq n$) не меньше чем один раз находится в таком положении, в котором их разделяют не больше чем на $r-1$ элемента последовательности. Определить точное значение $M(n, r)$, или же хорошее верхнее приближение этого значения, а также дать метод, при помощи которого можно для произвольных чисел n и r построить последовательность минимальной длины, обладающую указанными свойствами, или же последовательность, длина которой не значительно больше минимальной. Статья содержит несколько неравенств для значений $M(n, r)$, а также несколько построений. Легко видеть, что при нечетных n, $M(n, 1) = \binom{n}{2} + 1$ и $M(n, 1) = \binom{n}{2} + \frac{n}{2}$ при n четных. Это равносильно одной общеизвестной теореме теории графов. В статье доказывается, что

$$\frac{1}{2r} \leqq \lim_{n \to \infty} inf \frac{M(n,r)}{n^2} \leqq \limsup_{n \to \infty} \frac{M(n,r)}{n^2} \leqq \frac{1}{r+1}.$$

Однако, не исследуется вопрос о существовании предела

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M(n,r)}{n^2}$$

и о его значении.

ON A COMBINATORICAL PROBLEM

The following combinatorical problem arose im connection with the selection of alfalfa: let $M(n, r)$ denote the number of elements of the shortest sequence consisting of the numbers $1, 2, \ldots, n$ in which each pair of integers (i, j) $(1 \leqq i < j \leqq n)$ occurs at least once in such a position, where they are separated by not more then $r-1$ elements of the sequence. It is required either to find the exact value of $M(n, r)$, or at least a good upper estimation of $M(n, r)$, as well as a method of constructing to any pair of integers n and r a sequence with the property mentioned above, and of minimal length, or a sequence which is not essentially longer than the minimal one. The paper contains some inequalities concerning $M(n, r)$ and some constructions. It is easy to see, that $M(n, 1) = \binom{n}{2} + 1$ if n is odd and $M(n, 1) = \binom{n}{2} + \frac{n}{2}$ if n is even. This is equivalent with a well-known theorem on graphs. It is shown that

$$\frac{1}{2r} \leqq \liminf_{n \to \infty} \frac{M(n,r)}{n^2} \leqq \limsup_{n \to \infty} \frac{M(n,r)}{n^2} \leqq \frac{1}{r+1} \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

It remains an open question whether $\lim \frac{M(n,r)}{n^2}$ exists and if it exists, what is its value.