BIZONYOS TRIGONOMETRIKUS RENDSZEREK TELJESSÉGÉRŐL

CZIPSZER JÁNOS és RÉNYI ALFRÉD

Bevezetés

K. SAJDUKOV egy cikkében [1] a

$$\{\cos(k+\tau)x, \sin(k+\tau)x\} \quad (k=0,1,2,\ldots), \tau = \text{konst.} \tag{1}$$

rendszer $L^2[-\pi, \pi]$-beli teljességét vizsgálja, és erre nézve a következő tételt bizonyítja be:

Az (1) rendszer $L^2[-\pi, \pi]$-ben teljes, ha $\tau \leqq \frac{2}{3}$, de nem teljes, ha $\tau > \frac{3}{4}$.

A jelen dolgozatban hasonló, azonban lényegesen általánosabb problémával foglalkozunk. A

$$\begin{aligned}
&C(\tau): \{\cos(k+\tau)x\} \quad (k=0,1,2,\ldots),\\
&C_1(\tau): \{1, \cos(k+\tau)x\} \quad (k=0,1,2,\ldots),\\
&S(\tau): \{\sin(k+\tau)x\} \quad (k=0,1,2,\ldots),\\
&CS(\tau): \{\cos(k+\tau)x, \sin(k+\tau)x\} \quad (k=0,1,2,\ldots),\\
&C_1S(\tau): \{1, \cos(k+\tau)x, \sin(k+\tau)x\} \quad (k=0,1,2,\ldots)
\end{aligned}$$

rendszerek zártságát fogjuk vizsgálni a következő függvényterekben: A p-edik hatványukkal integrálható függvények terében, L^p-ben, ahol $1 \leqq p < \infty$ és a folytonos függvények terében, C-ben. (Függvényen mindig komplex értékű függvényt értünk.) Ha a $C(\tau)$, $C_1(\tau)$ $S(\tau)$ rendszerekről van szó, akkor mindig úgy értendő a dolog, hogy a szóbajövő függvények értelmezési tartománya a $[0, \pi]$ intervallum; ha a $CS(\tau)$ vagy a $C_1S(\tau)$ rendszerről van szó, akkor $[-\pi, \pi]$ az értelmezési tartomány.* Ahol szükséges, hogy ezt külön kihangsúlyozzuk, ott az $L^p[0, \pi]$, $C[0, \pi]$ ill. az $L^p[-\pi, \pi]$, $C[-\pi, \pi]$ jelölésekkel fogunk élni. Az eredményeket a dolgozat végén táblázatos formában foglaljuk össze. Teljes választ fogunk adni arra a kérdésre, hogy ezek a függvényrendszerek milyen komplex τ értékekre zártak valamelyik L^p-ben vagy C-ben és melyekre nem zártak, eközben eldöntjük azt a SAJDUKOV által nyitva hagyott kérdést,

* A problémát RÉNYI ALFRÉD vetette fel. Tőle származik az 1. §. 1. pontja. A dolgozat többi része CZIPSZER JÁNOStól származik. K. SAJDUKOV cikkéről csak a jelen cikk 1. §-ának elkészítése után értesültünk.

hogy az (1) rendszer $\frac{2}{3} < \tau \leqq \frac{3}{4}$-re teljes-e L^2-ben? Az $S(\tau)$ rendszer esetén még a 0 helyen eltűnő folytonos függvények terében, C^0-ban való zártságot is eldöntjük. (Erre csak azért van szükség, hogy $C(\tau)$-ról és $S(\tau)$-ról az egyik alábbi megjegyzés alapján áttérhessünk $CS(\tau)$-ra és $C_1S(\tau)$-ra, amikor ezeknek a rendszereknek $C[-\pi, \pi]$-beli zártságát vizsgáljuk.)

Emlékeztetünk a zártság definíciójára. Egy függvényrendszert egy lineáris normált függvénytérben (l. [2], 53. o.) akkor nevezünk zártnak, ha a rendszer elemei beletartoznak a térbe és a rendszer elemeinek lineáris kombinációival a tér bármely eleme tetszőleges pontossággal approximálható. Az L^p $(1 \leqq p < \infty)$, az L^∞, a C és a C^0 terekben a normát a szokott módon értelmezzük, tehát ha általában az alapintervallumot $[a, b]$-vel jelöljük, akkor

$$\|f\| = [\int_a^b |f|^p]^{\frac{1}{p}} \quad L^p\text{-ben} \quad (1 \leqq p < \infty),$$

$$\|f\| = \underset{a \leqq x \leqq b}{\text{Vrai max}} \quad L^\infty\text{-ben},$$

$$\|f\| = \max_{a \leqq x \leqq b} |f| \quad C\text{-ben és } C^0\text{-ban}.$$

Minthogy azok a rendszerek, amelyeket vizsgálunk, folytonos függvényekből állanak, és az alapintervallum véges, azért ezek a függvények beletartoznak az összes L^p-terekbe és a C térbe, s így a felvetett problémának mindenesetre van értelme.

A részletes tárgyalás során elég, ha csak a $C(\tau)$, $C_1(\tau)$ és az $S(\tau)$ rendszerekre szorítkozunk. Elég tudniillik ezen rendszerek zártságát eldönteni, mert innen a $CS(\tau)$ és $C_1S(\tau)$ rendszerek zárt vagy nem zárt volta már egyszerűen következik. Csupán a következő két triviális tételre kell hivatkoznunk:

1. Legyen Ω egy $L^p[-a, a]$-ba $(1 \leqq p \leqq \infty, a > 0)$ tartozó, páros és páratlan függvényekből álló rendszer. Ω_1-gyel, ill. Ω_2-vel jelöljük azon függvények összességét, amelyek a $[0, a]$ intervallumon vannak értelmezve, és ott Ω valamelyik páros, ill. páratlan függvényével megegyeznek. Akkor Ω_1 és Ω_2 függvényei beletartoznak $L^p[0, a]$-ba, továbbá Ω akkor és csak akkor zárt $L^p[-a, a]$-ban, ha Ω_1 és Ω_2 mindketten zártak $L^p[0, a]$-ban.

2. Legyen Ω $C[-a, a]$-ba tartozó, páros és páratlan függvényekből álló rendszer. Ω_1-gyel, ill. Ω_2-vel jelöljük azon függvények összességét, amelyek a $[0, a]$ intervallumon vannak értelmezve és ott Ω valamelyik páros ill. páratlan függvényével megegyeznek. Akkor Ω_1 függvényei $C[0, a]$-ba, Ω_2 függvényei $C^0[0, a]$-ba tartoznak, továbbá Ω akkor és csak akkor zárt $C[-a, a]$-ban, ha Ω_1 zárt $C[0, a]$-ban és Ω_2 zárt $C^0[0, a]$-ban.

Tudvalevő, hogy ha Ω egy H lineáris normált függvénytér egy részhalmaza, akkor Ω akkor és csak akkor zárt H-ban, ha a 0-n kívül nincs olyan H-n értelmezett lineáris operáció, amelyik Ω minden függvényén eltűnik (l. [2], 58. o.). Ezen zártsági kritérium birtokában feladatunk a következőképpen fogalmazható:

El kell döntenünk, hogy adott p mellett melyek azok a τ értékek, melyekre nincs L^p-n értelmezett nem azonosan 0 lineáris operáció, amelyik a vizsgált függvényrendszeren eltűnik, és hogy melyek azok a τ értékek, melyekre nincs olyan C-n értelmezett lineáris operáció, amelyik a vizsgált függvényrendszeren eltűnik anélkül, hogy azonosan 0 lenne. $S(\tau)$ esetén még ugyanezt a vizsgálatot a C^0 térben is megejtjük. Mármost tudvalevő, (l. [3], [4] és [5]) hogy minden L^p-n $(1 \leqq p < \infty)$ értelmezett A lineáris operáció

$$Af = \int_0^\pi fg, \; f \in L^p$$

alakban írható, ahol g az $L^{\frac{p}{p-1}}$ ill. $p=1$ esetén az L^∞ tér valamelyik eleme, és minden C-n értelmezett A lineáris operáció

$$Af = \int_0^\pi f d\alpha, \; f \in C$$

alakban írható, ahol $\alpha(x)$ korlátos variációjú, a π helyen eltűnő, $0 < x < \pi$-re az $\alpha(x) = \dfrac{\alpha(x+0)+\alpha(x-0)}{2}$ feltétellel normált függvény. A továbbiakban az ilyen tulajdonságú $\alpha(x)$ függvények összeségét V térnek fogjuk nevezni. A V térben a normát a szokott módon értelmezzük: α normája egyenlő α totális variációájával. A lineáris operációt generáló $g(x)$ ill. $\alpha(x)$ függvényt a lineáris operáció nullfüggvénytől eltekintve egyértelműen meghatározza, s az operáció normája megegyezik $g(x)$ ill. $\alpha(x)$ normájával. Megjegyezzük, hogy a V térben az azonosan 0-n kívül nincs is más nullfüggvény. A C^0 térben értelmezett lineáris operációk is egy V-beli $\alpha(x)$ súlyfüggvénnyel képezett Stieltjes-integrál alakjában állíthatók elő, most azonban $\alpha(0)$-t tetszőlegesen felvehetjük, $\alpha(x)$ csak a $0 < x \leqq \pi$ intervallumon van egyértelműen meghatározva.* Ha előírjuk, hogy $\alpha(0) = \alpha(+0)$ legyen, akkor ezzel $\alpha(x)$ már egyértelműen meg van határozva a lineáris operáció által, és a lineáris operáció normája megegyezik $\alpha(x)$ normájával. V-nek a 0 helyen folytonos függvényei egy alteret alkotnak, amelyet V^0-lal jelölünk. Fordítva: minden L^q-beli $\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\right)$, V-beli és V^0-beli függvény L^p-ben ill. C-ben ill. C^0-ban egy lineáris operációt generál nyilvánvaló értelemben. L^q, V és V^0 elemei és az L^p-n, ill. C-n, ill. C^0-on értelmezett lineáris operációk tehát kölcsönösen egyértelműen felelnek meg egymásnak, úgy, hogy a megfeleltetésnél a norma és a lineáris struktúra változatlan marad.

* Ez az állítás ugyanúgy bizonyítható, mint a C-re vonatkozó Riesz-féle tétel, sőt abból könnyen le is vezethető.

Állapodjunk meg a következő definíciókban:

Feltesszük, hogy az összes szóba jövő függvények értelmezési tartománya egy véges $[a, b]$ intervallum. Legyen H egy normált lineáris függvénytér. Legyen Ω a függvények valamilyen halmaza. Azt mondjuk, hogy Ω H-ra nézve teljes, ha

1. $\int_a^b fg$ létezik valahányszor $f \in \Omega$ és $g \in H$ és ha

2. $\int_a^b fg = 0$ minden $f \in \Omega$-ra és egy $g \in H$-ra maga után vonja, hogy $\|g\| = 0$.* [Vö. [6], 45. o.].

Azt mondjuk, hogy Ω a H súlytérre nézve teljes, ha 1. $\int_a^b f dg$ létezik, valahányszor $f \in \Omega$ és $g \in H$ és ha 2. $\int_a^b f dg = 0$ (ahol $g \in H$) minden $f \in \Omega$-ra maga után vonja, hogy $\|g\| = 0$.

A zérónormájú függvényt nullfüggvénynek nevezzük. $f \equiv 0$ csak azt jelöli, hogy f nullfüggvény, nem pedig azt, hogy f minden x helyen nulla. A tárgyalásból mindig világosan ki fog derülni, hogy az „f nullfüggvény" állítás melyik H tér metrikája szerint értendő. Ha $f \in H$ és $g \in H$ és vannak olyan α, β számok, melyekre $\|\alpha f + \beta g\| = 0$ és $\alpha\beta \neq 0$, akkor azt mondjuk, hogy f és g lényegében azonosak H-ban.

Ha az f és g függvények szorzatának integrálja 0, akkor azt mondjuk, hogy f ortogonális g-re és fordítva. Ha egy f függvény ortogonális egy függvényhalmaz mindegyik elemére, akkor azt mondjuk, hogy f ortogonális az illető halmazra. Ha $\int_a^b f dg = 0$, akkor azt mondjuk, hogy f ortogonális a g súlyfüggvényre vagy, hogy a g súlyfüggvény ortngonális f-re. Ha $\int_a^b f dg = 0$ valahányszor f valamilyen H halmaz eleme, akkor azt mondjuk, hogy a g súlyfüggvény ortogonális a H halmazra.

A fent említett zártsági kritérium ezen definíciók és az idézett tételek felhasználásával a bennünket érdeklő esetekben a következőképpen fogalmazható meg:

Egy függvényrendszer akkor és csak akkor zárt $L^p[0, \pi]$-ben ($1 \leq p < \infty$), ill. $C[0, \pi]$-ben, ill. $C^0[0, \pi]$-ben, ha ő beletartozik $L^p[0, \pi]$-be, ill. $C[0, \pi]$-be, ill. $C^0[0, \pi]$-be és teljes $L^q[0, \pi]$-re $\left(q = \frac{p}{p-1}\right)^{**}$, ill. V-re ill. V^0-ra nézve.

* $\|g\|$-val g H-beli normáját jelöljük.

** $p = 1$ esetén $q = \infty$.

Az 1. §-ban a Parseval-egyenlőségre és egy integrálformulára támaszkodva bebizonyítjuk SAJDUKOV idézett tételének egy élesítését. A 2. §-ban eldöntjük, hogy a $C(\tau)$, $C_1(\tau)$ és $S(\tau)$ függvényrendszerek egy tetszőleges adott q-ra* $(1 \leqq q \leqq \infty)$ milyen τ-kra teljesek L^q-ra nézve, továbbá milyen τ-kra teljesek V-re és $S(\tau)$ esetén V^0-ra nézve. A 3. §-ban a zártsággal foglalkozunk.

1. §.

1.

Bebizonyítjuk a következő tételt:

Ha $\operatorname{Re}\tau \leqq \frac{3}{4}$, *akkor* $C(\tau)$ *és* $S(\tau)$ *teljes* L^2*-ben.*

BIZONYÍTÁS: Vezessük be az $\alpha = \operatorname{Re}\tau$ jelölést. Tegyük fel, hogy $f(x)$ négyzetesen integrálható és ortogonális $C(\tau)$-ra, azaz

$$\int_0^\pi f(x)\cos(k+\tau)x\,dx = \int_0^\pi f(x)\cos\tau x\cos kx\,dx - \int_0^\pi f(x)\sin\tau x\sin kx\,dx = 0$$

$$(k=0,1,2,\ldots).$$

Legyen

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos\tau x\cos kx\,dx.$$

Akkor

$$f(x)\cos\tau x \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx \qquad (0 \leqq x \leqq \pi), \tag{2}$$

$$f(x)\sin\tau x \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k\sin kx \qquad (0 \leqq x \leqq \pi). \tag{3}$$

Írjuk fel a Parseval-egyenlőséget erre a két Fourier-sorra:

$$\int_0^\pi |f(x)|^2|\cos\tau x|^2dx = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2, \int_0^\pi |f(x)|^2|\sin\tau x|^2dx = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2.$$

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet:

$$\int_0^\pi |f(x)|^2(|\cos\tau x|^2 - |\sin\tau x|^2)\,dx = \int_0^\pi |f(x)|^2\cos^2\alpha x - \sin^2\alpha x)\,dx =$$

$$= \int_0^\pi |f(x)|^2\cos 2\alpha x\,dx = 0.$$

* Megjegyzendő, hogy az L-re nézve való teljességre a zártság eldöntésénél nem lesz szükség.

Ha $|\alpha| \leqq \frac{1}{4}$, akkor $\cos 2\alpha x$ a $0 < x < \pi$ intervallumon pozitív, s így $f(x)$ szükségképpen m. m. 0. Következésképp $C(\tau)$ teljes L^2-re nézve, ha $|\mathrm{Re}\,\tau| \leqq \frac{1}{4}$.

Szorozzuk meg (2)-t $\cos\frac{x}{2}$-vel, (3)-at $\sin\frac{x}{2}$-vel, és adjuk a kettőt össze, majd szorozzuk meg (2)-t $-\sin\frac{x}{2}$-vel, (3)-at $\cos\frac{x}{2}$-vel, és adjuk a kettőt össze:

$$f(x)\cos\left(\tau-\frac{1}{2}\right)x \sim \sum_{1}^{\infty} a_k \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x \qquad (0 \leqq x \leqq \pi), \tag{4}$$

$$f(x)\sin\left(\tau-\frac{1}{2}\right)x \sim \sum_{1}^{\infty} a_k \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x \qquad (0 \leqq x \leqq \pi). \tag{5}$$

Könnyen belátható, hogy ezeket a formális átalakításokat jogos volt elvégezni abban az értelemben, hogy (4) és (5) jobboldalai $f(x)\cos\left(\tau-\frac{1}{2}\right)x$ ill. $f(x)\sin\left(\tau-\frac{1}{2}\right)x$ Fourier-sorai a $[0, \pi]$ intervallumon ortogonális $\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x$ $(k=1,2,\ldots)$ ill. $\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x$ $(k=1,2,\ldots)$ rendszer szerint. Ezek a rendszerek teljesek $L^2[0,\pi]$-re nézve. Ez az állítás ekvivalens azzal, hogy a $\left\{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x, \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right\}$ $(k=1,2,\ldots)$ rendszer teljes $L^2[-\pi,\pi]$-re nézve, ez pedig ekvivalens azzal, hogy az $e^{i\left(k-\frac{1}{2}\right)x}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ rendszer teljes $L^2[-\pi,\pi]$-re nézve. Ez azonban nyilván igaz, mert ha $g(x) \in L^2[-\pi,\pi]$ és

$$g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\left(k-\frac{1}{2}\right)x},$$

akkor

$$g(x)e^{i\frac{x}{2}} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

s az e^{ikx} függvények teljessége miatt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2,$$

azaz az $e^{i\left(k-\frac{1}{2}\right)x}$ rendszerre érvényes a Parseval-egyenlőség, s így az valóban teljes.

Tehát a $\left\{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right.$ és a $\left.\left\{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right\}\right.$ rendszerek is teljesek $L^2[0, \pi]$-re nézve. Így a (4) és (5) sorfejtésekre érvényes a Parseval-egyenlőség:

$$\int_0^\pi |f(x)|^2\left|\cos\left(\tau-\frac{1}{2}\right)x\right|^2 dx=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2 \text{ és } \int_0^\pi |f(x)|^2\left|\sin\left(\tau-\frac{1}{2}\right)x\right|^2 dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2.$$

Innen

$$\int_0^\pi |f(x)|^2\left\{\left|\cos\left(\tau-\frac{1}{2}\right)x\right|^2-\left|\sin\left(\tau-\frac{1}{2}\right)x\right|^2\right\}dx=$$

$$=\int_0^\pi |f(x)|^2\left\{\cos^2\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)x-\sin^2\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)x\right\}dx=$$

$$\int_0^\pi |f(x)|^2\cos(2\alpha-1)x\,dx=0.$$

Ha $\frac{1}{4}\leqq\alpha\leqq\frac{3}{4}$, akkor $\cos(2\alpha-1)x$ a $0<x<\pi$ intervallumon pozitív, s így szükségképpen $f(x)=0$ m. m. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $C(\tau)$ L^2-re nézve teljes, ha $\frac{1}{4}\leqq \operatorname{Re}\tau\leqq\frac{3}{4}$.

Hátra van még az az eset, amikor $\alpha<-\frac{1}{4}$. Legyen n olyan pozitív egész szám, melyre $-\frac{1}{4}\leqq\alpha+n\leqq\frac{3}{4}$. A már bizonyítottak szerint $C(\tau+n)$ teljes L^2-re nézve, s azért $C(\tau+n)\subset C(\tau)$ miatt $C(\tau)$ is teljes L^2-re nézve.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $C(\tau)$ teljes L^2-re nézve, ha $\operatorname{Re}\tau\leqq\frac{3}{4}$.

Teljesen hasonlóan bizonyítható ugyanez $S(\tau)$-ra is, de ahelyett, hogy a fenti bizonyítást megismételnénk, parciális integrálás segítségével is könnyen beláthatjuk, hogy $S(\tau)$ teljessége L^2-re nézve következik $C(\tau)$ teljességéből.

2.

Most megmutatjuk, hogy $C(\tau)$ nem teljes L^2-re nézve, ha $\operatorname{Re}\tau>\frac{3}{4}$. Ez abból a tényből következik, hogy $\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2}$ ortogonális $C(\tau)$-ra, ha $\operatorname{Re}\tau>\frac{1}{2}$

s ez a függvény négyzetesen integrálható, ha $\operatorname{Re}\tau > \frac{3}{4}$. Ennek igazolására a következő integrálformulára hivatkozunk:

$$\int_0^\pi \cos^{a-1}\frac{x}{2}\cos b\frac{x}{2}\,dx = \frac{2\pi\Gamma(a)}{2^a\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a-b+1}{2}\right)},$$

ha $\operatorname{Re} a > 0$ és $\frac{1}{\Gamma(z)} = 0$, ha z $\Gamma(z)$-nek pólusa továbbá a $\cos^{a-1}\frac{x}{2}$ és a 2^a hatványok a főértéket jelentik. (L. [7] 189. o. és [8] 108. o.).

Az idézetteknél valamivel rövidebben a következőképpen számítható ki a baloldali integrál. Legyen $\operatorname{Re} b > \operatorname{Re} a - 1 > -1$. A $z = e^{ix}$ helyettesítéssel

$$I = \int_0^\pi \cos^{a-1}\frac{x}{2}\cos b\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{a-1}\frac{x}{2}e^{ib\frac{x}{2}}\,dx = \frac{1}{2^a}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\frac{1-a+b}{2}x}(1+e^{ix})^{a-1}\,dx =$$

$$= -\frac{i}{2^a}\int_C z^{-\frac{a-b+1}{2}}(1+z)^{a-1}\,dz,$$

ahol C a pozitív irányítású egységkört jelenti. Ha az integrációs utat az ábra szerint deformáljuk és $r \to 0$, azt kapjuk, hogy

$$I = -\frac{i}{2^a}\int_{-1}^{0}|x|^{-\frac{a-b+1}{2}}(1+x)^{a-1}\,dx\,\sin\left(\frac{a-b+1}{2}\pi\right)2i =$$

$$= \frac{2}{2^a}\sin\left(\frac{a-b+1}{2}\pi\right)\int_0^1 x^{-\frac{a-b+1}{2}}(1-x)^{a-1}\,dx =$$

$$= \frac{2}{2^a}\sin\left(\frac{a-b+1}{2}\pi\right)B\left(\frac{1-a+b}{2}, a\right) =$$

$$= \frac{2}{2^a}\sin\left(\frac{a-b+1}{2}\pi\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1+b-a}{2}\right)\Gamma(a)}{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\pi\Gamma(a)}{2^a\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a-b+1}{2}\right)}.$$

Analitikus folytatással a formula érvényessége kiterjeszthető a $\operatorname{Re} b \leqq \operatorname{Re} a - 1$ esetre is.

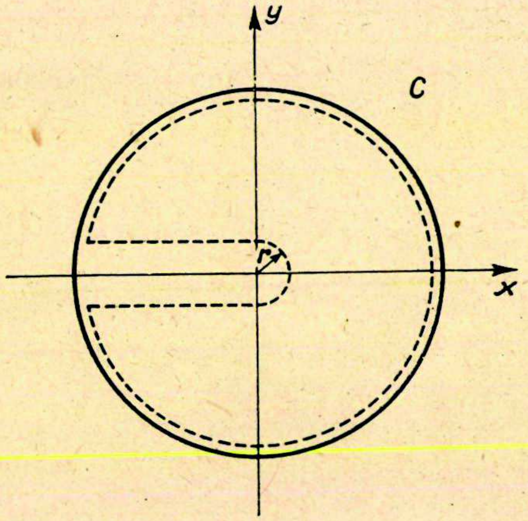
Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

I. TÉTEL. *$C(\tau)$ L^2-re nézve akkor és csak akkor teljes, ha* $\mathrm{Re}\,\tau \leqq \frac{3}{4}$.

Innen rögtön következik a

II. TÉTEL. *$CS(\tau)$ L^2-re nézve akkor és csak akkor teljes, ha* $\mathrm{Re}\,\tau \leqq \frac{3}{4}$ *(Sajdukov tételének élesítése).*

A II. tételre adott fenti bizonyításunk SAJDUKOV bizonyításától teljesen eltérő és annál lényegesen egyszerűbb.



1. ábra

2. §.

1.

Ebben a paragrafusban már arra a sokkal általánosabb kérdésre kívánunk válaszolni, hogy a $C(\tau)$, $C_1(\tau)$ és $S(\tau)$ rendszerek mikor teljesek L^q-ra nézve, ahol $1 \leqq q \leqq \infty$.

Előrebocsátunk egy segédtételt, amely a továbbiak során alapvető szerepet fog játszani.

1. SEGÉDTÉTEL. *Legyen H normált lineáris függvénytér és legyen Ω egy függvényrendszer. Tegyük fel, hogy Ω-t alkalmas n számú $g_1, g_2, \ldots g_n$ függvénnyel kibővítve, H-ra nézve teljes rendszert kapunk. (Nem tesszük fel, hogy a g-k nem elemei Ω-nak.) Azt állítjuk, hogy H-nak Ω-ra ortogonális függvényei legfeljebb n-dimenziós halmazt alkotnak. Ugyanez igaz akkor is, ha H Ω-ra nézve súlytér.*

BIZONYÍTÁS: Ha a segédtétel nem igaz, akkor meg lehet adni $n+1$ számú lineárisan független, Ω-ra ortogonális $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ függvényt H-ban.

Ha a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ számok a

$$\sum_{\nu=1}^{n+1}\left(\int_a^b f_\nu g_\mu\right) x_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

egyenletrendszer egy nem triviális megoldását jelentik, akkor $\sum_{\nu=1}^{n+1} c_\nu f_\nu$ ortogonális az $\{\Omega, g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ rendszerre, s így ezen rendszer teljessége miatt $\sum_{\nu=1}^{n+1} c_\nu f_\nu$ nullfüggvény, ami' viszont az f-ek lineáris függetlensége miatt lehetetlen. Minthogy a fenti egyenletrendszernek mindig van nem triviális megoldása, azért ellentmondásra jutottunk, amivel a segédtétel első részét bebizonyítottuk. Ha H súlytér, a bizonyítás ugyanúgy megy.

Külön kiemeljük az 1. segédtétel következő speciális esetét:

1′ SEGÉDTÉTEL. *Ha egy Ω függvényrendszer egy függvény adjunkciójával egy lineáris normált H (súly-)függvénytérre nézve teljessé tehető, akkor H lényegében legfeljebb csak egy Ω-ra ortogonális (súly-)függvényt tartalmaz.*

Ebben a paragrafusban többször hallgatólagosan fel fogjuk használni a következő tényeket:

Ha egy függvényrendszer egy függvénytérre nézve teljes, akkor annak minden alterére nézve is teljes. Ha egy függvényrendszerhez nem található rá ortogonális, korlátos variációjú folytonos súlyfüggvény, akkor nincs rá ortogonális integrálható függvény sem.

Ebben a paragrafusban mindvégig feltesszük, hogy $\tau \neq 0, -1, -2, \ldots,$ hacsak az ellenkezőjét explicite ki nem kötjük.

2.

Meg fogjuk mutatni, hogy $\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2}$ bizonyos értelemben az egyedüli $C(\tau)$-ra ortogonális függvény, ha α nem túl nagy. Tegyük fel, hogy $\frac{3}{4} < \alpha \leqq \frac{7}{4}$. Akkor a I. tétel szerint $C(\tau-1)$ teljes L^2-re nézve. Minthogy $C(\tau-1) = \{\cos(\tau-1)x\} + C(\tau)$, azért ez azt jelenti, hogy $C(\tau)$ már egy függvény adjunkciójával L^2-re nézve teljessé tehető, s így az 1′ segédtétel értelmében $\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2}$ lényegében az egyedüli olyan négyzetesen integrálható függvény, amely $C(\tau)$-ra ortogonális. Ebből az észrevételünkből és a I. tételből következik a

2. SEGÉDTÉTEL. *Ha $\alpha < 1$, nincs $C(\tau)$-ra ortogonális, 0-tól különböző korlátos függvény. Ha $1 \leqq \alpha \leqq \frac{7}{4}$, $\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2}$ lényegében az egyedüli $C(\tau)$-ra ortogonális, korlátos függvény.*

3.

Tegyük fel, hogy $f(x) \in V^0, f(x) \neq 0$ és hogy az $f(x)$ súlyfüggvény ortogonális $S(\tau)$-ra. Az ortogonalitás miatt parciális integrálással adódik, hogy

$$0 = \int_0^\pi \sin(k+\tau)x\,df(x) = [f(x)\sin(k+\tau)x]_0^\pi - (k+\tau)\int_0^\pi f(x)\cos(k+\tau)x\,dx.$$

Innen $k+\tau \neq 0$ miatt

$$\int_0^\pi f(x)\cos(k+\tau)x\,dx = 0.$$

Tehát $f(x)$ ortogonális $C(\tau)$-ra. Jegyezzük még meg, hogy $f(x)$ korlátos. A 2. segédtétel szerint, ha $\alpha < 1$, akkor

$$f(x) = 0 \quad \text{m. m.}$$

$f(x) \in V^0$ miatt innen következik, hogy

$$f(x) = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq \pi),$$

amivel bebizonyítottuk, hogy $\alpha < 1$ esetén $S(\tau)$ V^0-ra nézve teljes. Ha $1 \leqq \alpha \leqq \frac{7}{4}$, ugyancsak a 2. segédtétel szerint konstans szorzótól eltekintve

$$f(x) = \cos^{2\tau-2}\frac{x}{2} \quad \text{m. m.}$$

Megint $f(x) \in V^0$ miatt innen következik, hogy

$$f(x) = \cos^{2\tau-2}\frac{x}{2} \qquad (0 \leqq x < \pi).$$

Ha $\alpha = 1$, de $\tau \neq 1$, akkor $\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2}$-nek nincs a π helyen baloldali határértéke, s így a tett feltevéseknek eleget tevő $f(x)$ függvény nem létezik. Ha $\tau = 1$, adódik, hogy

$$f(x) = 1, \quad \text{ha} \quad 0 \leqq x < \pi \quad \text{és} \quad f(\pi) = 0.$$

Ez a függvény valóban beletartozik V^0-ba és mint súlyfüggvény ortogonális $S(1)$-re. A továbbiakban ezt a függvényt $p(x)$-szel fogjuk jelölni. Ha $1 < \alpha \leqq \frac{7}{4}$, akkor adódik, hogy

$$f(x) = \cos^{2\tau-2}\frac{x}{2} \qquad (0 \leqq x \leqq \pi),$$

s ez a függvény valóban beletartozik V^0-ba és mint súlyfüggvény ortogonális $S(\tau)$-ra, ha $\alpha > 1$.

Foglaljuk össze ezeket az észrevételeket:

3. SEGÉDTÉTEL. *Ha $\alpha \leqq 1$ és $\tau \neq 1$, akkor nincs* S(τ)*-ra ortogonális, V^0-beli* 0*-tól különböző súlyfüggvény.* $p(x)$ *lényegében az egyedüli V^0-beli*

$S(1)$-re ortogonális súlyfüggvény. Ha $\alpha > 1$, a $\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2}$ súlyfüggvény beletartozik V^0-ba és ortogonális $S(\tau)$-ra. Ha $1 < \alpha \leqq \frac{7}{4}$, lényegében ez az egyedüli $S(\tau)$-ra ortogonális súlyfüggvény V^0-ban.

Innen rögtön adódik a következő

4. SEGÉDTÉTEL. *$\alpha \leqq 1$ esetén nincs $S(\tau)$-ra ortogonális integrálható függvény. Ha $\alpha > 1$, akkor*

$$\frac{d}{dx}\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2} = -(\tau-1)\cos^{2\tau-3}\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$S(\tau)$-ra ortogonális integrálható függvény és ha $1 < \alpha \leqq \frac{7}{4}$, akkor lényegében ez az egyedüli $S(\tau)$-ra ortogonális, integrálható függvény.

Ez a függvény $\alpha > 1$ esetén akkor és csak akkor korlátos, ha $\alpha \geqq \frac{3}{2}$ és a q-adik hatványa $(1 \leqq q < \infty)$ akkor és csak akkor integrálható, ha $\alpha > \frac{3}{2} - \frac{1}{2q}$.

Ha $\tau = 0, -1, -2, \ldots$, akkor ismeretes, hogy $S(\tau)$ L-re nézve teljes. A V^0 súlytérre nézve azonban nem teljes, mert $p(x)$ mint súlyfüggvény ortogonális $S(\tau)$-ra.

$S(\tau)$ semmilyen τ-ra nem teljes V-re nézve, mert a 0 hely karakterisztikus függvénye beletartozik V-be és ortogonális $S(\tau)$-ra.

Fenti eredményeinket a következő tételben foglaljuk össze:

III. TÉTEL. *$S(\tau)$ semmilyen τ-ra nem teljes a V súlytérre nézve. $S(\tau)$ V^0-ra nézve akkor és csak akkor teljes, ha $\mathrm{Re}\,\tau \leqq 1$ és $\tau \neq 1, 0, -1, -2, \ldots$ $S(\tau)$ L^q-ra nézve $(1 \leqq q < \infty)$ akkor és csak akkor teljes, ha $\mathrm{Re}\,\tau \leqq \frac{3}{2} - \frac{1}{2q}$. $S(\tau)$ L^∞-re nézve akkor és csak akkor teljes, ha $\mathrm{Re}\,\tau < \frac{3}{2}$.*

4.

Tegyük fel, hogy $f(x) \in V, f(x) \not\equiv 0$ és, hogy $f(x)$ ortogonális $C_1(\tau)$-ra. Akkor

$$\int_0^\pi df(x) = 0 \text{ és } \int_0^\pi \cos(k+\tau)x\,df(x) = [\cos(k+\tau)x f(x)]_0^\pi +$$

$$+(k+\tau)\int_0^\pi \sin(k+\tau)x f(x)\,dx = 0.$$

Innen $f(0)=f(\pi)=0$, továbbá $k+\tau\neq 0$ miatt

$$\int_0^\pi f(x)\sin(k+\tau)x\,dx=0,$$

azaz $f(x)$ ortogonális $S(\tau)$-ra. Minthogy $f(x)$ korlátos, azért a III. tétel szerint ilyen $f(x)$ $\alpha<\frac{3}{2}$ esetén nem létezhet. Tegyük most fel, hogy $\frac{3}{2}\leqq\alpha\leqq 2$. Akkor a III. tétel szerint $S(\tau-1)$ L-re nézve teljes. Tehát az $S(\tau)$ rendszer a $\sin(\tau-1)x$ függvény adjungálásával L-re nézve teljessé tehető, s így az 1′ segédtétel értelmében L-ben lényegében csak egy $S(\tau)$-ra ortogonális függvény létezhet. A 4. segédtétel szerint $\cos^{2\tau-3}\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$ ortogonális $S(\tau)$-ra, ha $\alpha>1$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\frac{3}{2}\leqq\alpha\leqq 2$ esetén lényegében ez az egyedüli integrálható, $S(\tau)$-ra ortogonális függvény. Tehát konstans szorzótól eltekintve

$$f(x)=\cos^{2\tau-3}\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\qquad(0<x<\pi),$$

ha $\frac{3}{2}\leqq\alpha\leqq 2$. Ha $\alpha=\frac{3}{2}$, de $\tau\neq\frac{3}{2}$, akkor a feltevéseknek eleget tevő $f(x)$ függvény nem létezhet, mert $\cos^{2\tau-3}\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$-nek nincs a π helyen baloldali határértéke. Ha $\tau=\frac{3}{2}$, akkor adódik, hogy

$$f(x)=\sin\frac{x}{2}\qquad(0\leqq x<\pi),$$
$$f(\pi)=0.$$

Ez a függvény valóban V-beli és mint súlyfüggvény $C_1\left(\frac{3}{2}\right)$-re ortogonális. Ha $\frac{3}{2}<\alpha\leqq 2$, akkor adódik, hogy

$$f(x)=\cos^{2\tau-3}\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\qquad(0\leqq x\leqq\pi),$$

s ez a függvény valóban beletartozik V-be és mint súlyfüggvény $C_1(\tau)$-ra ortogonális, ha $\alpha>\frac{3}{2}$. Ezzel bebizonyítottuk a következő segédtételt:

5. SEGÉDTÉTEL. *Ha* $\alpha<\frac{3}{2}$ *vagy ha* $\alpha=\frac{3}{2}$, *de* $\tau\neq\frac{3}{2}$, *akkor nincs* $C_1(\tau)$*-ra ortogonális V-beli, nem* 0 *súlyfüggvény. A* π *helyen eltűnő, a* $0\leqq x<\pi$ *intervallumon* $\sin\frac{x}{2}$*-vel egyenlő függvény lényegében az egyedüli*

$C_1\left(\frac{3}{2}\right)$*-re ortogonális súlyfüggvény. Ha* $\alpha > \frac{3}{2}$, $\cos^{2\tau-3}\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$ *V-beli,* $C_1(\tau)$*-ra ortogonális súlyfüggvény. Ha* $\frac{3}{2} < \alpha \leqq 2$, *lényegében ez az egyedüli V-beli,* $C_1(\tau)$*-ra ortogonális súlyfüggvény.*

Az 5. segédtételből közvetlenül folyik a

6. SEGÉDTÉTEL. *Ha* $\alpha \leqq \frac{3}{2}$, *nincs* $C_1(\tau)$*-ra ortogonális integrálható függvény. Ha* $\alpha > \frac{3}{2}$, *a*

$$\frac{d}{dx}\cos^{2\tau-3}\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = (\tau-1)\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2} - \frac{2\tau-3}{2}\cos^{2\tau-4}\frac{x}{2}$$

függvény integrálható és ortogonális $C_1(\tau)$*-ra. Ha* $\frac{3}{2} < \alpha \leqq 2$, *lényegében ez az egyedüli ilyen tulajdonságú függvény.*

Jegyezzük meg, hogy $(\tau-1)\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2} - \frac{2\tau-3}{2}\cos^{2\tau-4}\frac{x}{2}$ $\alpha > \frac{3}{2}$ esetén akkor és csak akkor korlátos, ha $\alpha \geqq 2$ és akkor és csak akkor integrálható a q-adik hatványával, ha $\alpha > 2 - \frac{1}{2q}$ $(1 \leqq q < \infty)$.

Ismeretes, hogy ha $\tau = 0, -1, -2, \ldots$, akkor $C(\tau)$ V-ben teljes.

Az 5. és 6. segédtételekből és ezen két utóbbi megjegyzésünkből következik a

IV. TÉTEL. $C_1(\tau)$ *akkor és csak akkor teljes V-re nézve, ha* $\mathrm{Re}\,\tau \leqq \frac{3}{2}$, *de* $\tau \neq \frac{3}{2}$. $C_1(\tau)$ *akkor és csak akkor teljes* L^q*-ra nézve* $(1 \leqq q < \infty)$, *ha* $\mathrm{Re}\,\tau \leqq 2 - \frac{1}{2q}$. $C_1(\tau)$ *akkor és csak akkor teljes* L^∞*-re nézve, ha* $\mathrm{Re}\,\tau < 2$.

5.

Végezetül a $C(\tau)$ rendszer teljességét vizsgáljuk meg. Legyen először $-\frac{1}{2} < \alpha \leqq \frac{1}{2}$, de $\tau \neq \frac{1}{2}$. Akkor $\frac{1}{2} < \alpha + 1 \leqq \frac{3}{2}$, de $\tau + 1 \neq \frac{3}{2}$ s így a IV. tétel szerint a $C_1(\tau+1)$ rendszer V-re nézve teljes. Az 1′ segédtétel szerint akkor lényegében legfeljebb csak egy $C(\tau+1)$-re ortogonális súlyfüggvény létezik V-ben; ez nyilván $-\int_x^\pi \cos^{2\tau}\frac{t}{2}\,dt$, hiszen tudjuk, hogy $\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2}$ ortogonális $C(\tau)$-ra, ha $\mathrm{Re}\,\tau > \frac{1}{2}$. Minthogy egyrészt $C(\tau) = \{\cos\tau x\} + C(\tau+1)$, másrészt pedig

$$\int_0^\pi \cos\tau x \, d\left[-\int_x^\pi \cos^{2\tau}\frac{t}{2}\,dt\right] = \int_0^\pi \cos\tau x \cos^{2\tau}\frac{x}{2}\,dx = \frac{\pi}{4^\tau} \neq 0$$

(l. 11. old.), azért ha $-\frac{1}{2} < \alpha \leqq \frac{1}{2}$ és $\tau \neq \frac{1}{2}$, akkor nincsen $C(\tau)$-ra ortogonális, 0-tól különböző V-beli súlyfüggvény.

A $C_1\left(\frac{1}{2}\right)$ rendszer a IV. tétel szerint V-re nézve teljes. Így az 1′ segédtétel szerint $p(x)$ lényegében az egyedüli $C\left(\frac{1}{2}\right)$-re ortogonális súlyfüggvény.

Ha $\frac{1}{2} < \alpha$, akkor $-\int_x^\pi \cos^{2\tau-2}\frac{t}{2}\,dt$ $C(\tau)$-ra ortogonális súlyfüggvény V-ben.

Ha $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$, akkor $C_1(\tau)$ IV. szerint V-re nézve teljes, s így az 1′ segédtétel szerint $-\int_x^\pi \cos^{2\tau-2}\frac{t}{2}\,dt$ lényegében az egyedüli $C(\tau)$-ra ortogonális súlyfüggvény V-ben.

Ha $\alpha \leqq -\frac{1}{2}$ és $\tau \neq -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots$ akkor van olyan n egész szám, amelyre $-\frac{1}{2} < \alpha + n \leqq \frac{1}{2}$, de $\tau + n \neq \frac{1}{2}$. Akkor viszont a fentiek szerint $C(\tau + n)$ V-re nézve teljes, s így a fortiori $C(\tau)$ is.

Ha még figyelembe vesszük, hogy $C\left(\frac{1}{2}\right) = C\left(-\frac{1}{2}\right) = C\left(-\frac{3}{2}\right) = \ldots$, akkor kimondhatjuk a következő segédtételt:

7. SEGÉDTÉTEL. *Ha $\alpha \leqq \frac{1}{2}$ és $\tau \neq \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$, akkor $C(\tau)$ V-re nézve teljes. $p(x)$ lényegében az egyedüli $C\left(\frac{1}{2} - k\right)$-ra $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ ortogonális súlyfüggvény V-ben. Ha $\alpha > \frac{1}{2}$, $-\int_x^\pi \cos^{2\tau-2}\frac{t}{2}\,dt$ $C(\tau)$-ra ortogonális súlyfüggvény V-ben. Ha $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$, lényegében ez az egyedüli $C(\tau)$-ra ortogonális, V-beli súlyfüggvény.*

Innen rögtön következik a

8. SEGÉDTÉTEL. *Ha* $\alpha \leqq \frac{1}{2}$, *nincs* $C(\tau)$*-ra ortogonális integrálható, 0-tól különböző függvény. Ha* $\alpha > \frac{1}{2}$, $\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2}$ *ortogonális* $C(\tau)$*-ra. Ha* $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$, *lényegében ez az egyedüli* $C(\tau)$*-ra ortogonális, integrálható függvény.*

A $\cos^{2\tau-2}\frac{x}{2}$ függvény akkor és csak akkor korlátos, ha $\alpha \geqq 1$, és akkor és csak akkor tartozik L^q-ba $(1 \leqq q < \infty)$, ha $\alpha > 1 - \frac{1}{2q}$.

Ismeretes, hogy ha $\tau = 0, -1, -2, \ldots$, akkor $C(\tau)$ V-re nézve teljes. Ezzel bebizonyitottuk a következő tételt:

V. TÉTEL. $C(\tau)$ *akkor és csak akkor teljes V-re nézve, ha* $\operatorname{Re}\tau \leqq \frac{1}{2}$, *de* $\tau \neq \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$ $C(\tau)$ *akkor és csak akkor teljes* L^q*-ra nézve, ha* $\operatorname{Re}\tau \leqq 1 - \frac{1}{2q}$ $(1 \leqq q < \infty)$. $C(\tau)$ *akkor és csak akkor teljes* L^∞*-re nézve, ha* $\operatorname{Re}\tau < 1$.

6.

Ha egy függvényrendszer teljes, de akármelyik függvényét elhagyva a maradékrendszer már nem teljes, akkor azt mondjuk, hogy a rendszer exakte teljes, pontosabban, hogy a rendszer exakte teljes arra a H függvénytérre nézve, amelyre a teljességet vonatkoztatjuk. Ebben a pontban megmutatjuk, hogy a vizsgált trigonometrikus rendszerek, ha teljesek, akkor exakte is teljesek, hacsak α nem kisebb, mint a teljesség határát jelző α érték minusz 1. Ez az állítás még nem egészen pontos, alább közöljük a pontos tételt.

Itt meg kell jegyeznünk, hogy az exaktság vizsgálatánál a $C(\tau)$, $C_1(\tau)$ stb. függvényrendszereket nem mint függvényhalmazokat, hanem mint függvénysorozatokat tekintjük, s egy függvényt annyiszor számítunk egy rendszerhez, ahányszor az előfordul, ha k befutja a $0, 1, 2, \ldots$ értékeket. Így pl. $C\left(\frac{1}{2}\right)$ V-re nézve exakte teljes, de $C\left(-\frac{1}{2}\right)$ nem, jóllehet $C\left(\frac{1}{2}\right)$ és $C\left(-\frac{1}{2}\right)$ ugyanazokból a függvényekből áll.

VI. TÉTEL. α. 1. $C(\tau)$ *V-re nézve akkor és csak akkor exakte teljes, ha* $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\tau \leqq \frac{1}{2}$, *de* $\tau \neq \frac{1}{2}$. 2. $C(\tau)$ L^q*-ra nézve* $(1 \leqq q < \infty)$ *akkor* *és csak akkor exakte teljes, ha* $-\frac{1}{2q} < \operatorname{Re}\tau \leqq 1 - \frac{1}{2q}$. 3. $C(\tau)$ L^∞*-re nézve akkor és csak akkor exakte teljes, ha* $0 \leqq \operatorname{Re}\tau < 1$.

β. 1. $C_1(\tau)$ V*-re nézve akkor és csak akkor exakte teljes, ha* $\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\tau \leqq \frac{3}{2}$, *de* $\tau \neq \frac{3}{2}$ *és még ha* $\tau = \frac{1}{2}$. 2. $C_1(\tau)$ L^q*-ra nézve* $(1 \leqq q < \infty)$ *akkor és csak akkor exakte teljes, ha* $1 - \frac{1}{2q} < \operatorname{Re}\tau \leqq 2 - \frac{1}{2q}$. 3. $C_1(\tau)$ L^∞*-re nézve akkor és csak akkor exakte teljes, ha* $1 \leqq \operatorname{Re}\tau < 2$.

γ. 1. $S(\tau)$ *akkor és csak akkor exakte teljes* V^0*-ra nézve, ha* $0 < \operatorname{Re}\tau \leqq 1$ *és* $\tau \neq 1$. 2. $S(\tau)$ L^q*-ra nézve* $(1 \leqq q < \infty)$ *akkor és csak akkor exakte teljes, ha* $\frac{1}{2} - \frac{1}{2q} < \operatorname{Re}\tau \leqq \frac{3}{2} - \frac{1}{2q}$. 3. $S(\tau)$ L^∞*-re nézve akkor és csak akkor exakte teljes, ha* $\frac{1}{2} \leqq \operatorname{Re}\tau < \frac{3}{2}$.

BIZONYÍTÁS: Minthogy a közölt 9 állítás bizonyítása egymáshoz teljesen hasonló, megelégszünk γ. 1. bizonyításával.

A III. tétel miatt a $0 < \operatorname{Re}\tau \leqq 1$, $\tau \neq 1$ feltétel szükségessége nyilvánvaló. Megmutatjuk, hogy ez a feltétel elégséges is.

Tekintsük a $0 < \operatorname{Re}\tau \leqq 1$, $\tau \neq 1$ feltevés mellett az $S(\tau + k + 1)$ rendszert, ahol k nemnegatív egész szám. A 3. segédtétel szerint

$$\operatorname{Re}\tau + \nu + 1 > 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, k)$$

miatt a

$$\cos^{2\tau}\frac{x}{2}, \cos^{2\tau+2}\frac{x}{2}, \ldots, \cos^{2\tau+2k}\frac{x}{2} \tag{6}$$

súlyfüggvények rendre ortogonálisak az $S(\tau+1), S(\tau+2), \ldots, S(\tau+k+1)$ rendszerekre, s így mindnyájan ortogonálisak ezen rendszerek legkisebbikére, $S(\tau+k+1)$-re. Teljesen nyilvánvaló, hogy a (6) függvények V^0-ban lineárisan függetlenek. Következésképp V^0-nak $S(\tau+k+1)$-re ortogonális altere legalább $k+1$ dimenziós. Az 1. segédtétel értelmében akkor $S(\tau+k+1)$ k számú függvény adjunkciójával V^0-ra nézve semmiképp sem tehető teljessé, s így az $\{S(\tau+k+1), \sin\tau x, \sin(\tau+1)x, \ldots, \sin(\tau+k-1)x\} = S(\tau) - \{\sin(k+\tau)x\}$ rendszer V^0-ra nézve nem teljes. Tehát $S(\tau)$ tetszőleges elemét elhagyva a maradékrendszer már V^0-ra nézve nem teljes, s éppen ezt kellett bizonyítani.

3. §.

1.

A III., IV., V. és VI. tételek alapján most már kimondhatjuk a vizsgált függvényrendszerek zártságáról szóló tételt. Az „exakt zártság" fogalmát az exakt teljességhez teljesen hasonló módon értelmezzük. Ahelyett, hogy azt mondanók, hogy egy függvényrendszer egy térben exakte zárt, röviden azt mondjuk, hogy a függvényrendszer exakt az illető térben. Könnyebb áttekinthetőség kedvéért a tételt táblázatos alakban közöljük. A bevezetőben mondottak alapján, a fenti tételekből a $CS(\tau)$ és $C_1S(\tau)$ rendszerek zártsági viszonyai is könnyen kiolvashatók. Külön kiemeljük a következő tételt:

VII. TÉTEL. *A* $\cos \tau x, \sin \tau x, \cos (1+\tau)x, \sin (1+\tau)x, \ldots$ *függvények lineáris kombinációival akkor és csak akkor lehet minden folytonos függvényt a* $[-\pi, \pi]$ *intervallumon tetszőleges pontossággal egyenletesen approximálni, ha* $\mathrm{Re}\, \tau \leqq \frac{1}{2}$ *és* 2τ *nem egész szám. Ha a fenti rendszerhez még az* $f(x) \equiv 1$ *függvényt is hozzávesszük, akkor az approximálhatóság feltétele az, hogy* $\mathrm{Re}\, \tau \leqq 1$ *legyen, és hogy* τ *ne legyen egész szám.*

2.

Legyen Ω a véges $[a, b]$ intervallumon értelmezett korlátos és integrálható függvényeknek egy halmaza. Ismeretes, hogy ha Ω zárt L^p-ben, akkor zárt $L^{p'}$-ben is, ha $1 \leqq p' < p \leqq \infty$. Így található egy olyan $1 \leqq \gamma \leqq \infty$ szám, amely elválasztja egymástól azokat a p értékeket, melyekre Ω L^p-ben zárt és amelyekre nem zárt. Ha Ω semelyik L^p térben sem zárt, legyen $\gamma = 1$; ha mindegyik L^p térben $(1 \leqq p < \infty)$ zárt, legyen $\gamma = \infty$. Mármost Ω zártsági fokát $\varrho(\Omega)$-t a következő szimbólummal értelmezzük:

$\varrho(\Omega) = \gamma$, ha Ω L^γ-ban zárt;

$\varrho(\Omega) = \gamma - 0$, ha Ω L^γ-ban zárt.

Ezen fogalom birtokában pl. a $CS(\tau)$ és a $C_1S(\tau)$ rendszerek zártságára vonatkozó tétel a következőképpen fogalmazható meg:

$$\varrho[CS(\tau)] = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,\mathrm{Re}\, \tau - 1}, & \text{ha } \dfrac{1}{2} < \mathrm{Re}\, \tau < 1, \\ 1 - 0, & \text{ha } \mathrm{Re}\, \tau = 1, \\ \infty - 0, & \text{ha } \mathrm{Re}\, \tau \leqq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

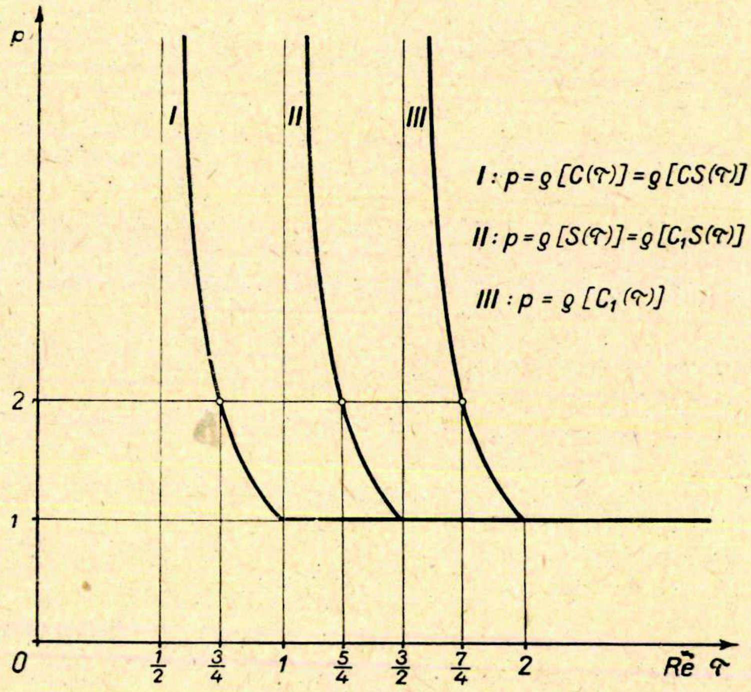
$$\varrho[C_1S(\tau)] = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,\mathrm{Re}\, \tau - 2}, & \text{ha } 1 < \mathrm{Re}\, \tau < \dfrac{3}{2}, \\ 1 - 0, & \text{ha } \mathrm{Re}\, \tau = \dfrac{3}{2}, \\ \infty - 0, & \text{ha } \mathrm{Re}\, \tau = 1. \end{cases}$$

A zártságra vonatkozó tétel

	akkor és csak akkor zárt				akkor és csak akkor exakt			
	$C[0,\pi]$-ben, ha	$C^0[0,\pi]$-ben, ha	$L^p[0,\pi]$-ben $(1<p<\infty)$, ha	$L[0,\pi]$-ben, ha	$C[0,\pi]$-ben, ha	$C^0[0,\pi]$-ben, ha	$L^p[0,\pi]$-ben $(1<p<\infty)$, ha	$L[0,\pi]$-ben, ha
$C(\tau)$	$\operatorname{Re}\tau \leqq \frac{1}{2}$, de $\tau \neq \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$	——	$\operatorname{Re}\tau \leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{2p}$.	$\operatorname{Re}\tau < 1$.	$-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\tau \leqq \frac{1}{2}$, de $\tau \neq \frac{1}{2}$.	——	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2p} < \operatorname{Re}\tau \leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{2p}$.	$0 \leqq \operatorname{Re}\tau < 1$.
$C_1(\tau)$	$\operatorname{Re}\tau \leqq \frac{3}{2}$, de $\tau \neq \frac{3}{2}$.	——	$\operatorname{Re}\tau \leqq \frac{3}{2}+\frac{1}{2p}$.	$\operatorname{Re}\tau < 2$.	$\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\tau \leqq \frac{3}{2}$, de $\tau \neq \frac{3}{2}$, továbbá, ha $\tau = \frac{1}{2}$.	——	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2p} < \operatorname{Re}\tau \leqq \frac{3}{2}+\frac{1}{2p}$.	$1 \leqq \operatorname{Re}\tau < 2$.
$S(\tau)$	semmilyen τ-ra sem zárt $C[0,\pi]$-ben.	$\operatorname{Re}\tau \leqq 1$, de $\tau \neq 1, 0, -1, -2, \ldots$	$\operatorname{Re}\tau \leqq 1+\frac{1}{2p}$.	$\operatorname{Re}\tau < \frac{3}{2}$.	semmilyen τ-ra sem exakt $C[0,\pi]$-ben.	$0 < \operatorname{Re}\tau \leqq 1$, de $\tau \neq 1$.	$\frac{1}{2p} < \operatorname{Re}\tau \leqq 1+\frac{1}{2p}$.	$\frac{1}{2} \leqq \operatorname{Re}\tau < \frac{3}{2}$.

	akkor és csak akkor zárt			akkor és csak akkor exakt		
	$C[-\pi,\pi]$-ben, ha	$L^p[-\pi,\pi]$-ben $(1<p<\infty)$, ha	$L[-\pi,\pi]$-ben, ha	$C[-\pi,\pi]$-ben, ha	$L^p[-\pi,\pi]$-ben $(1<p<\infty)$, ha	$L[-\pi,\pi)$-ben, ha
$CS(\tau)$	$\operatorname{Re}\tau \leqq \frac{1}{2}$, de $\tau \neq \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \ldots$	$\operatorname{Re}\tau \leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{2p}$.	$\operatorname{Re}\tau < 1$.	$0 < \operatorname{Re}\tau \leqq \frac{1}{2}$, de $\tau \neq \frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2p} < \operatorname{Re}\tau \leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{2p}$.	$\frac{1}{2} \leqq \operatorname{Re}\tau < 1$.
$C_1S(\tau)$	$\operatorname{Re}\tau \leqq 1$, de $\tau \neq 1, 0, -1, -2, \ldots$	$\operatorname{Re}\tau \leqq 1+\frac{1}{2p}$.	$\operatorname{Re}\tau < \frac{3}{2}$.	$\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\tau \leqq 1$, de $\tau \neq 1$, továbbá ha $\tau = \frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2p} < \operatorname{Re}\tau \leqq 1+\frac{1}{2p}$.	$1 \leqq \mathrm{R}\,\tau < \frac{3}{2}$.

Ha ϱ-t nem mint szimbólumot, hanem mint számot tekintjük, akkor ϱ-t mint τ függvényét ábrázolhatjuk mindaddig, amíg ϱ véges:



2. ábra

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] K. Sajdukov, Egy trigonometrikus rendszer teljességéről, *Uszp. Mat. Nauk*, Tom VIII (1953), 143—153. (oroszul).

[2] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.

[3] F, Riesz, Untersuchungen über Systeme interierbarer Funktionen, *Math. Annalen*, 69 (1910), 449—497.

[4] F. Riesz, Sur les opérations fonctionelles linéaires, *Comptes Rendus Akad. Sci.* Paris, 149 (1909), 974—977.

[5] F. Riesz, Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations, *Annales Ecole Norm. Sup.*, 3, 31 (1914), 9—14.

[6] S. Kaczmarz—H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa—Lwow, 1935.

[7] G. L. Dirichlet, Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen, Braunschweig (1904).

[8] W. Gröbner und N. Hofreiter, Integraltafel II. Bestimmte Integrale, Wien und Innsbruck, 1950.