

SZÉNSZEMCSÉS ELLENÁLLÁSOK VIZSGÁLATA VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI MÓDSZERREL

RÉNYI ALFRÉD

A rádiótechnikában használatos szénszemcsés ellenállások egyrészt kolloid-grafitból vagy koromból álló szénport, másrészt szigetelő műanyagot (fenolgyanta) és (esetleg) kristályos töltőanyagot tartalmaznak. Az ellenállások gyártása úgy történik, hogy a poralakú szigetelő anyagot a szénporral és (esetleg) a poralakú töltőanyaggal elkeverik, a keverékhez acetont adagolnak a keverés nagyobb homogenitásának biztosítása céljából, majd az acetont elpárologtatják. Az így nyert port magas nyomáson és magas hőmérsékleten összeprésselik. A kapott ellenállásanyagot az üzeminél magasabb feszültségen „formálják“, ami közben vezetőképessége általában kismértékben még növekszik.

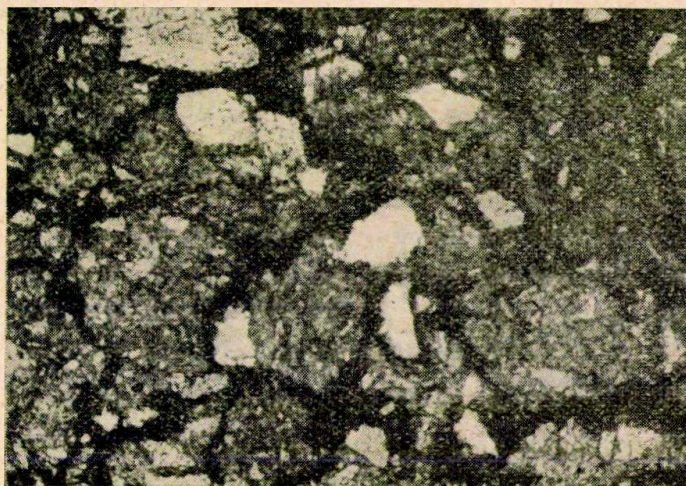
A szénszemcsés ellenállások gyártásánál fontos és nem teljesen megoldott probléma az ellenállás kívánt értékének biztosítása. A gyártási szórás igen nagy, és nem ismeretesek elméletileg megalapozott összefüggések arra vonatkozólag, hogy a szénszemcsés ellenállások (fajlagos) vezetőképessége hogyan függ a szénpor mennyiségének a szigetelőanyag mennyiségéhez való viszonyától, és a szénszemcsék nagyságától, illetve nagyság szerinti eloszlásától.

A Híradástechnikai Ipari Kutató Intézet az ezirányban folyó kutatásokkal kapcsolatban (lásd [1], [2]) 1955-ben felkérte Intézetünket, hogy foglalkozzon a szénszemcsés ellenállások matematikai elméletével. Intézetünkben a problémával kapcsolatban két irányban indult meg a kutatás. A vizsgálatok egy része az áramnak egy-egy szénszemcsében való terjedését tette vizsgálat tárgyává, vagyis a kérdést „mikroszkópiusan“ tárgyalta. E vizsgálatokkal PÁL SÁNDOR foglalkozott, aki első közelítésben a szénszemcséket gömböknek tekintette és az egyes gömbökön belüli potenciáeloszlást a potenciálemélet klaszikus módszereivel vizsgálta. Ezirányú érdekes vizsgálatai a kérdés megoldásához önmagukban nem voltak elegendők. A szénszemcsés ellenállás vezetőképességét ugyanis igen nagy mértékben befolyásolja a szénszemcsék elhelyezkedése, az egy-egy szemcsével „szomszédos“ szemcsék száma és a „szomszédos“ szemcsék közötti távolság. A „szomszédos“ kifejezést itt és a következőkben abban az értelemben használjuk, hogy két szénszemcsét akkor nevezünk szomszédosnak, ha olyan közel vannak, hogy az áram az egyikről a másikra közvetlenül átterjedhet. Tekintettel a szénszemcsék óriási számára és elhelyezkedésük teljesen szabálytalan, véletlenszerű jellegére, kézenfekvő volt a kérdést más oldalról, a valószínűségi számítás módszereivel megközelíteni próbálni. A vizsgálatok megmutatták, hogy csak a szénszemcsés ellen-

állások valószínűségszámítási vizsgálata vezethet el ezen ellenállások „makroszkópikus“ elméletéhez, amely a „mikroszkópikus“ elmélet lényeges és nélkülözhetetlen kiegészítése, és a folyamat leírásában a „makroszkópikus“ elmélet játssza a döntő szerepet. Jelen közleményben kizárólag e második irányú vizsgálatok eddigi eredményeit ismertetjük.

Az eredetileg kitűzött célt egyelőre nem értük el; más szempontból azonban a vizsgálatok eredeti célkitűzésein túlmenő eredményekhez jutottunk. Az eredeti célkitűzés ugyanis a szénszemcsés ellenállások vezetőképességére vonatkozó *kvantitativ* összefüggés felállítása volt; bár a keresett kvantitativ összefüggést ezideig nem sikerült tisztázni, azonban a számítások várakozáson felül bizonyos kvalitatív összefüggések felismeréséhez nyújtottak segítséget. Ez a következőképpen történt. Eleinte abból a feltevésből indultunk ki, hogy a szénszemcsék úgy oszlanak el a szigetelő anyagban, mintha teljesen véletlenszerűen, egyenletes valószínűség-sűrűséggel helyezték volna el őket. Mászóval, feltettük, hogy a szemcsék középpontjai a Poisson-féle eloszlásnak megfelelően helyezkednek el a rendelkezésre álló térben, oly módon, hogy bármely térrészbe eső szénszemcsék számának várható értéke arányos az illető térrész köbtartalmával, és az arányossági tényező az egész ellenálláson belül állandó. E feltevés és a szénszemcsék nagyságára, továbbá két szomszédos szemcse közötti maximális távolságra vonatkozó adatok alapján az az eredmény adódott, hogy a szénszemcsés ellenállások csak abban az esetben bírnak pozitív vezetőképességgel, ha a szénszemcsék össztömegének a szigetelő anyag össztömegéhez való viszonya egy nagyságrenddel nagyobb a ténylegesen használt ellenállásokban fennálló aránynál. Mászóval, az elmélet arra az eredményre vezetett, hogy a gyakorlatban használt szénszemcsés ellenállások vezetőképessége 0, illetve ellenállása végtelen nagy kellene, hogy legyen. Az elmélet és a tények ellentmondása nyilvánvalóvá tette, hogy az alapfeltevések egyikének tévesnek kell lennie. Mivel a szén és a szigetelő anyag aránya (2%—5%) feltétlenül pontosnak volt tekintendő, és a szénszemcsék átlagos nagysága (300 Å) is elég megbízhatóan meg volt határozva, s a nyert ellenállás értéke 2% széntartalom mellett 10^8 — 10^9 Ohm, 5% széntartalom mellett 10^2 — 10^3 Ohm határok közé esett, csak az a két lehetőség maradt nyitva, hogy vagy a szemcsék egyenletes eloszlására vonatkozó feltevés nem teljesül, vagy az egymástól a feltételezettnél lényegesen nagyobb távolságra eső szemcsék között is fellép vezetés. Annak ellenére, hogy a két szomszédos szemcse közötti, a vezetést még lehetővé tevő maximális távolság közvetlenül nem mérhető és ezen távolságra a számítások során felvett érték hipotétikus, a fellépett ellentmondás azon magyarázatát, hogy e távolságot becsültük meg helytelenül, a számítások tüzetesebb analízise alapján el kellett vetni. A vezetést még lehetővé tevő távolságot két „szomszédos“ szemcse között eredetileg 3 Å nagyságrendűnek vettük fel. A tények és az elmélet közötti ellentmondás kiküszöböléséhez ezt az értéket az átlagos szemnagyság kb. háromszorosával, pl. 300 Å átlagos szemcse nagyság mellett közel kb. 1000 Å-mel kellett volna pótolni. Ilyen „nagy“ távolságra fekvő szemcsék közötti vezetés feltételezése azonban már irreálisnak látszik. Nem maradt tehát más kiút az ellentmondásból; mint a fentemlített első lehetőség, hogy tudniillik a szénszemcsék nem egyenletes sűrűséggel oszlanak el. A szóban forgó szénszemcsés ellenállások metszeteinek a Híradástechnikai Ipari Kutató Intézet által elvégzett mikroszkópikus vizsgálata hamarosan megerősítette, hogy valóban ez a helyzet. Kiderült ugyanis, hogy a szénszemcsék nem oszlanak el egyenletesen az

ellenálláson belül, hanem rétegesen helyezkednek el, amely rétegek behálózzák az ellenállás egész térfogatát. Ezekben a vékony rétegekben a szén szemcsék magas koncentrációja tapasztalható, míg a rétegeken kívül szén szemcsék alig láthatók. Jól látható ez az alábbi fényképfelvételen, amely a Híradástechnikai Ipari Kutató Intézetben készült a Műszaki Egyetem Műanyagipari Tanszékén készített metszetről. A kép százötvenszeres nagyításban mutatja a metszetet. A képen



látható fekete „erek” a szén szemcsékben dús részek, a szürke „szigetek” a fenolgyanta tömbök, míg a világos foltok a töltőanyag.

A réteges struktúra nyilván az ellenállások készítési módjával függ össze. Nem feladatunk itt annak megállapítása, hogy a gyártási folyamat mely fázisában és milyen okok hatására történik meg ez a rétegződés. Annyi nyilvánvaló, hogy a műanyag-por szemcséi lényegesen (kb. két nagyságrenddel) nagyobbak a szén szemcséknél, a szén szemcsék csak a műanyag-por szemcsék felületén helyezkednek el és (nyilván a préseléskor) összefüggő rétegekké állnak össze, amely rétegek behálózzák az egész ellenállást. Mi itt csak annak megállapítására szorítkozhatunk, hogy az említett rétegződés teljes mértékben megmagyarázza a számítások paradox eredményét. A szén szemcsés ellenállások réteges struktúrájának felismeréséből kiindulva KATONA JÁNOS laboratóriumvezetőnek a Híradástechnikai Kutató Intézetben sikerült a gyártási eljárás módosításával finomabb strukturájú szén szemcsés ellenállásokat készíteni. Azt tapasztalta, hogy e finomabb strukturájú ellenállások vezetőképessége 2%—5% széntartalom esetében már valóban 0 volt, és pl. a 10^2 — 10^3 Ohm érték csak 14% széntartalomnál adódott. Ugyanakkor az új eljárással készített ellenállások szórása csökkent és javultak az ellenállás fizikai jellemzői (zajfeszültség, frekvencia- és feszültség-függőség, ellenállási hőmérséklet együttható, stb.). Így tehát az elmélet látszólagos ellentmondása a tapasztalattal segítséget nyújtott a szén szemcsés ellenállások struktúrájának megismeréséhez, amennyiben tüzetesebb kísérleti vizsgálatok elvégzésére ösztönözte a kutatókat, továbbá e vizsgálatok eredményeképpen lehetőséget adott új felismerésekre és ennek alapján az ellenállások minőségének javítására és szórásának csökkentésére.

A dolgozatban tárgyalt probléma gyakorlati jelentősége mellett tehát elvi érdekességgel is bír, mégpedig két szempontból is. Először is szép példája annak, hogy milyen jó szolgálatot tehet a valószínűség számítás bizonyos technológiai problémáknál, klasszikus módszerekkel áttekinthetetlen strukturájú

szemcsés anyagok fizikai tulajdonságainak vizsgálatánál. Másrészt érdekes példa arra, hogy a matematikai módszerek segítséget és ösztönzést nyújthatnak bizonyos kvalitatív összefüggések feltárásához is, az elméleti és tapasztalati adatok ellentmondása okainak felderítése útján. Tekintettel a kérdés elvi érdekességére és tanulságos voltára, a következőkben igyekszünk a kérdést oly módon tárgyalni, hogy a tárgyalás a lehető legkevesebb előismerettel megérthető legyen, és e felhasznált matematikai megfontolásokat olyan részletesen ismertetjük, hogy azokat a matematikában kevés gyakorlattal rendelkező olvasó is követni tudja.

A szénszemcséket a következőkben gömbalakúaknak tekintjük, azonban nem tesszük fel, hogy e gömbök egyforma nagyságúak. A megfontolásokban szerepet fog játszani a szemcsék átlagos sugara, amelyet \bar{r} -sal jelölünk, továbbá a szemcsesugár négyzetének átlaga, amelyet $\overline{r^2}$ -sal jelölünk, hasonlóképpen a szemcsesugár köbének átlaga, amelyet $\overline{r^3}$ -sal jelölünk. Ha $f(r)$ jelöli a gömbök sugara eloszlásának sűrűségfüggvényét, vagyis, ha feltesszük, hogy annak a valószínűsége, hogy egy találmra választott szemcse sugara r és $r + \Delta r$ közé essék (Δr -ben magasabbrendű tagoktól eltekintve) $f(r)\Delta r$, akkor

$$(1) \quad \bar{r} = \int_0^{\infty} r f(r) dr,$$

hasonlóképpen

$$(2) \quad \overline{r^2} = \int_0^{\infty} r^2 f(r) dr$$

és

$$(3) \quad \overline{r^3} = \int_0^{\infty} r^3 f(r) dr.$$

Nilvánvaló, hogy ha \bar{v} jelenti az átlagos szemcséköbtartalmat, akkor

$$(4) \quad \bar{v} = \frac{4\pi}{3} \overline{r^3}.$$

(Megjegyzendő, hogy általában $\overline{r^3}$ nem egyenlő $(\bar{r})^3$ -nel, hasonlóképpen $\overline{r^2}$ nem egyenlő $(\bar{r})^2$ -nel. Ezek a mennyiségek akkor és csak akkor egyenlők, ha az összes gömbök egyenlő sugarúak. Így tehát csak ebben az esetben lesz az átlagos szemcséköbtartalom egyenlő az átlagos sugarú szemcse köbtartalmával.)

Ami az $f(r)$ sűrűségfüggvényt illeti, az jó közelítéssel lognormálisnak volna vehető, vagyis feltehetnénk, hogy

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma r} e^{-\frac{\left(\log \frac{r}{\mu}\right)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{ha } r > 0,$$

ahol μ és σ pozitív állandók. Ez a törvényszerűség lép fel ugyanis a legtöbb anyag szemcsenagyság szerinti eloszlásánál. A jelen dolgozatban közölt megfontolások azonban az $f(r)$ függvény konkrét jellegétől teljesen függetlenek, és bármely szemcsemegoszlás mellett érvényesek. Éppen ezért a következőkben nem is tesszük fel, hogy az $f(r)$ függvényt ismerjük.

Tegyük fel, hogy a szemcsék térfogati sűrűsége p , vagyis, hogy tetszőleges, egy átlagos nagyságú szemcséhez képest nagy kiterjedésű V térfogatú térrészben található szénszemcsék össztérfogatának várható értéke pV . Ha λ jelenti az egységnyi térfogatú térrészbe eső középpontú szemcsék számának várható értékét, és elhanyagolva azt a körülményt, hogy a V térfogatú térrész szélén elhelyezkedő szemcsék egy része kinyúlhat a vizsgált térrészből (ami gyakorlatilag lényegtelen, ha a vizsgált térrész pl. egy kocka, amelynek élhosszúsága nagyságrendekkel nagyobb az átlagos szemcsesugárnál), akkor

$$(5) \quad p = \lambda \bar{v} = \frac{4\pi\lambda}{3} \bar{r}^3.$$

A kapott adatok szerint p értéke az eddig ténylegesen használt kísérleti ellenálláspéldányoknál 0,02 és 0,05 közé esik, vagyis az ellenállások anyagának 2–5%-át teszik ki a szénszemcsék. Egy r_1 és egy r_2 sugarú szemcsét „szomszédosnak” fogunk nevezni, ha középpontjaik távolsága legfeljebb $r_1 + r_2 + \delta$, ahol $\delta > 0$ egy megadott állandó.¹⁾ Mint említettük, a szakemberek véleménye szerint δ kb. 3Å nagyságrendűnek veendő.

Jelölje most 2ν egy találmásra választott szemcsével a fenti értelemben szomszédos szemcsék számának várható értékét. A ν szám nyilván az $f(r)$ eloszlástól (elsősorban annak \bar{r} középpértékétől), továbbá p -tól és δ -tól függ. Azzal a kérdéssel, hogy ν hogyan számítható ki, alább még foglalkozni fogunk. Egyelőre tegyük fel, hogy ν értékét már meghatároztuk és vizsgáljuk meg, hogy ez esetben hogyan határozható meg az ellenállás vezetőképessége. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az ellenállás téglalakú, amelynek két átellenes lapja egy-egy fémlappal érintkezik; vizsgáljuk az áram útját a két fémlap között. Vegyünk fel egy (x, y, z) koordinátarendszert, úgy, hogy az egyik fémlap a $z=0$ síkon fekszik, míg a másik, vele párhuzamos fémlap a $z=1$ síkon helyezkedik el. Szimmetria-okokból nyilvánvaló, hogy egy tetszőleges az ellenállás belsejében levő szemcsével „szomszédos” szemcsék közül azok számának várható értéke, amelyek középpontjának z -koordinátája nagyobb, illetve kisebb, mint a vizsgált szemcsé középpontjának z -koordinátája, ν -vel egyenlő. Vagyis ν -vel egyenlő a „felülről” érintkező szomszédos szemcsék átlagos száma, és hasonlóképpen ν -vel egyenlő az „alulról” érintkező szomszédos szemcsék átlagos száma is. Az áram terjedését a szénszemcsés ellenállásban a *láncreakciók* elmélete alapján tárgyaljuk. Első pillanatra ez meglepőnek tűnhet, azonban az analógia valójában igen kézenfekvő. Az áram nyilván eljut az alsó fémlappal szomszédos összes szénszemcsékre. Minden ilyen szemcséből továbbjut az áram az illető szemcsével „felülről” szomszédos szemcsékbe, amelyek száma szemcséről-szemcsére véletlenszerűen változik, csak e szám átlaga, ν ismeretes; ezen szemcsékből továbbjut az azokkal „felülről” szomszédos szemcsékbe, és így tovább. Azokon a szemcseláncon keresztül, amelyek nem szakadnak meg, az áram eljut a felső fémlaphoz. A jelenség matematikai szempontból teljesen analóg bármely más láncreakcióval, pl. azzal, amely egy reaktorban megy végbe, ahol egy neutron elhasít egy atommagot, abból bizonyos számú neutron lép ki, ezek mindegyike (meghatározott valószínűséggel) egy-egy újabb atommagot fog elhasítani, és így tovább. Lehetséges, hogy ez a lánc előbb-utóbb elakad, de lehet-

¹⁾ Elképzelhető volna olyan hipotézis is, hogy δ bizonyos mértékig függ r_1 -től és r_2 -től, azonban eredményeinken ez keveset változtatna, csak a számítás válna bonyolultabbá.

séges, hogy állandóan folytatódik. A mi esetünkben a lánc megszakadása azt jelenti, hogy az áram nem jut el az alsó fémlapról a felső fémlapra. A láncreakciók elméletéből (lásd pl. [3], 496—500. oldalak) ismeretes, hogy egy lánc megszakadásának valószínűsége 1-gyel egyenlő, vagyis bizonyosnak vehető, ha $\nu < 1$, míg e valószínűség 1-nél kisebb, ha $\nu > 1$; ez esetben annak a valószínűsége, hogy egy szemcse mind az alsó, mind pedig a felső fémlappal össze legyen kötve (vagyis folyjék rajta keresztül áram)

$$(6) \quad W = (1-w)^2,$$

ahol w azon feltevés mellett, hogy a szemcsék a Poisson-eloszlás szerint helyezkednek el, a

$$(7) \quad w = e^{\nu(w-1)}$$

egyenlet egyetlen 0 és 1 közé eső megoldása.²⁾ Az ellenállás vezetőképessége tehát 0-val egyenlő, ha $\nu < 1$, és pozitív, ha $\nu > 1$.

Vizsgáljuk most meg, hogyan függ ν értéke az $f(r)$ sűrűségfüggvénytől, illetve annak bizonyos jellemző adataitól, továbbá a p és δ változóktól. Vegyük szemügyre egy r_1 sugarú P_1 középpontú szemcsét. Ez a szemcse feltevésünk szerint „szomszédos” mindazokkal az r_2 sugarú szemcsékkal, amelyek P_2 középpontja beleesik egy az r_1 sugarú gömb P_1 középpontja körüli $r_1 + r_2 + \delta$ sugarú gömbbe. Persze, ha P_2 a P_1 körüli $r_1 + r_2$ sugarú gömb belsejében van, akkor a két gömb egymásba hatol. Ha a gyártási folyamat során nem préselnék a szóbanforgó szénszemcsés ellenállásokat, akkor tehát azt kellene feltennünk, hogy a P_2 pont a P_1 pont körüli $r_1 + r_2$ és $r_1 + r_2 + \delta$ sugarú gömbök által alkotott gömbhéjban helyezkedik el. Mivel azonban a szénszemcsés ellenállások anyagát préselik, amelynek során az egyes szemcsék deformálódhatnak, sokkal realisabb megengedni, hogy P_2 bárhol elhelyezkedhessék a P_1 körüli $r_1 + r_2 + \delta$ sugárral rajzolt gömbön belül. (E feltevés egyébként, amennyiben az eredményt egyáltalán befolyásolja, csak abban nyilvánulhat meg, hogy a „szomszédok” átlagos számára vonatkozólag a valódinál egy kevéssel nagyobb értéket kapunk.) A mondottakból nyilvánvaló, hogy

$$(8) \quad 2\nu = \frac{4\pi\lambda}{3} \int_0^\infty \int_0^\infty (r_1 + r_2 + \delta)^3 f(r_1) f(r_2) dr_1 dr_2.$$

Elvégezve az integráljel alatt álló köbreemelést és tagonként integrálva adódik, hogy

$$(9) \quad 2\nu = \frac{4\pi\lambda}{3} (2\bar{r}^3 + 6\bar{r} \cdot \bar{r}^2 + 6\delta(\bar{r}^2 + \bar{r}^2) + 6\delta^2\bar{r} + \delta^3).$$

Figyelembe véve (5)-öt, következik, hogy bevezetve a

$$(10) \quad \mathcal{G}_1 = \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}^2}{\bar{r}^3}, \quad \mathcal{G}_2 = \frac{(\bar{r})^3}{\bar{r}^3} \quad \text{és} \quad \eta = \frac{\delta}{\bar{r}}$$

²⁾ A (7) egyenlet w gyökét explicit alakban a következőképpen állíthatjuk elő:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu^{n-1} e^{-\nu n} n^{n-1}}{n!} \quad (\nu > 1).$$

jelöléseket

$$(11) \quad v = p(1 + 3\mathcal{G}_1 + 3(\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2)\eta + 3\mathcal{G}_2\eta^2 + \frac{1}{2}\mathcal{G}_2\eta^3).$$

Mármost, a jól ismert Hölder-féle egyenlőtlenség a $p = 3$, $q = \frac{3}{2}$ esetben azt mondja, hogy

$$(12) \quad \left| \int_0^{\infty} a(r)b(r)dr \right| \leq \left(\int_0^{\infty} |a(r)|^3 dr \right)^{1/3} \cdot \left(\int_0^{\infty} |b(r)|^{3/2} dr \right)^{2/3}.$$

Alkalmazva (12)-t az $a(r) = f(r)^{1/3}$, $b(r) = f(r)^{2/3} \cdot r^2$ függvényekre és figyelembe véve, hogy

$$\int_0^{\infty} f(r)dr = 1,$$

kapjuk, hogy

$$(13) \quad \bar{r}^2 \leq (\bar{r}^3)^{2/3}.$$

Alkalmazva (12)-t az $a(r) = f(r)^{1/3}$, $b(r) = f(r)^{2/3} \cdot r$ függvényekre, kapjuk, hogy

$$(14) \quad \bar{r} \leq (\bar{r}^3)^{1/3}.$$

Összeszorozva (13)-at és (14)-et, adódik, hogy

$$(15) \quad \mathcal{G}_1 \leq 1,$$

míg (14)-ből közvetlenül adódik, hogy

$$(16) \quad \mathcal{G}_2 \leq 1,$$

(15) és (16) figyelembevételével kapjuk, hogy

$$(17) \quad v \leq p \left(4 + 6\eta + 3\eta^2 + \frac{\eta^3}{2} \right),$$

vagyis

$$(18) \quad v \leq \frac{p}{2} (2 + \eta)^3.$$

Ha $\eta \leq 1$, akkor (18)-ból

$$(19) \quad v \leq 14p,$$

tehát csak akkor lehet $v > 1$, ha $p > 1/14 \cong 0,07\dots$, míg a megadott adatok, vagyis $\eta \leq 1/100$ mellett csak akkor lehet $v > 1$, ha $p > 2/(2,01)^3 = 0,246\dots$. Ha tehát $\eta \approx 0,01$, akkor a szénnek a szénszemcsés ellenállás anyagának közel 25%-át, míg ha $\eta \approx 1$, legalább 7%-át kellene kitennie, míg a szén tényleges 2–5% térfogati sűrűsége esetében az ellenállás vezetőképességére mindkét esetben 0 adódik. Mint említettük, a kísérletek azt mutatták, hogy finomabb strukturája szénszemcsés ellenállások esetében (amelyekben a műanyag nem áll össze tömbökké) a tapasztalatok ezt igazolták. Az, hogy a dolgozat elején leírt gyártási eljárással készített ellenállások az elméletnek látszólag ellentmondó módon viselkednek, teljesen érthetővé válik, ha figyelembe vesszük, amit a mikroszkópikus felvételek megerősítettek, hogy szinte a teljes szén-

mennyiség az ellenállás térfogatának egy törtrészét, pl. q -adrészét kitevő össz-térfogatú rétegekben helyezkedik el. Ez esetben ugyanis e rétegekben a szén relatív koncentrációja a tényleges koncentráció $1/q$ -szorososa lesz, és így azt kapjuk, hogy $\eta \approx 0,01$ mellett akkor lehetséges vezetés, ha $p/q > 0,246$, vagyis $p > 0,246 q$. Ily módon már a tapasztalatokkal teljesen összhangban álló eredményt kapunk. Némiképpen bonyolítja a helyzetet, hogy a valóságban q értéke nyilvánvalóan függ p értékétől. q reális értékét (illetve p -től való függését) kísérleti úton kell megállapítani, ami, bár nem könnyű, de elvégezhető feladat.

A fent közölt ν -re vonatkozó számítás lényegesen egyszerűsödik, ha az összes szemcséket egyenlő sugarú gömböknek tekintjük. Ha a szemcsék mind \bar{r} sugarú gömbök, akkor (8) helyett a

$$(8^*) \quad 2\nu = \frac{4\pi\lambda}{3} (2\bar{r} + \delta)^3 = p(2 + \eta)^3$$

összefüggés áll fenn, amiből könnyen következik, hogy ez esetben (18)-ban egyenlőség áll fenn. Ebből látszik, hogy az a hiba, amit akkor követünk el, ha 2ν értékét $p(2 + \eta)^3$ -nel helyettesítjük, pontosan azt jelenti, hogy elhanyagoljuk a részecskék sugarának szórását az átlagos részecskesugár körül. Ha tehát a részecskék egyforma sugarúak, csak akkor lesz $\nu > 1$, és így vezetés csak akkor lehetséges, ha $p > 2/(2 + \eta)^3$, tehát pl. $p = 0,02$ esetében csak akkor volna lehetséges vezetés, ha $\eta > 2,6$, másszóval 300 \AA sugarú szemcsék között akkor is fel kellene lépnie vezetésnek, ha a szemcsék távolsága 708 \AA volna, míg a valóban tapasztalható vezetőképesség megmagyarázására fel kellene tenni, hogy még nagyobb, kb. 1000 \AA távolságban levő szemcsék között is fellép vezetés. Ebből látszik, hogy a kapott paradox eredmények egyedül lehetséges magyarázata a szénszemcsék (valóban tapasztalt) nem egyenletes (réteges) elhelyezkedése amelyet, mint mondtunk a tapasztalatok is alátámasztanak (lásd a közölt fényképet).

Ami mármost azt a kérdést illeti, hogyan függ a vezetőképesség a szén koncentrációjától és a szénszemcsék átlagos nagyságától, ennek elméleti meghatározása meglehetősen bonyolult. Ugyanis, akár abban az esetben, ha a szénszemcsék rétegekben helyezkednek el, amelyeken belül relatív koncentrációjuk számottevő, akár abban az esetben, ha az ellenállás finomabb struktúrájú és a szénszemcsék nem tömörülnek rétegekbe, hanem egyenletesen oszlanak el, azonban a szén térfogataránya ennek megfelelően nagy, akkor már nem alkalmazhatók azok a közelítések, amelyek 2—5%-os koncentrációnál még megengedhetők voltak és amelyek lényegesen kihasználták a szénszemcsék ritka elhelyezkedését. Ilyen nagy koncentráció esetében ugyanis az egyes szénszemcsék helyzetei már egyáltalán nem tekinthetők egymástól függetleneknek, amit a fentiekben lényegesen kihasználtunk akkor, amikor a szemcséközéppontokra vonatkozólag azt tettük fel, hogy a Poisson-eloszlás szerint helyezkednek el. Ilyen nagy koncentráció mellett a szemcsék alakja is lényegessé válhat és igen kérdéses, hogy a valóságot leegyszerűsítő feltevés, hogy a szemcsék gömbalakúak (ami kis koncentráció mellett nyilvánvalóan megengedhető) érvényes-e. A vezetőképesség elméleti meghatározását további kísérleti vizsgálatoknak kell megelőznie, mert a megfelelő modell, csak ezek alapján állítható fel. E kérdésre, továbbá egyéb nyitott problémákra (pl. a gyártási szórás kiszámítására) bővebb kísérleti anyag birtokában vissza kívánunk térni.

Ezúton is köszönetet mondok KATONA JÁNOS laboratóriumvezetőnek, e dolgozat kézírata első fogalmazványának átnézése alkalmával tett értékes megjegyzéseiért, továbbá azért, hogy a szénszemcsés ellenállás metszetére vonatkozó fényképfelvételt volt szíves rendelkezésünkre bocsátani e dolgozatban való közlés céljából.

(Beérkezett: 1957. XII. 5.)

IRODALOM

- [1] KATONA J.: *Ellenállások vizsgálata*. Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest, 1955. (3287. sz.)
- [2] KATONA J.: „Híradástechnikai és műszertechnikai ellenállások újabb fejlődési iránya, I—II.“. *Magyar Híradástechnika* (1956) 49—54. és 87—97.
- [3] RÉNYI A.: *Valószínűségszámítás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

ИССЛЕДОВАНИЕ УГОЛЬНОЗЕРНИСТОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

A. RÉNYI

Резюме

Работа сообщает об исследованиях, проведенных автором с помощью вероятностных методов, относительно проводимости таких сопротивлений, которые получаются спрессованием смеси угольной пыли и какого-нибудь изолирующего пылевидного вещества (например фенопласта). Как известно, такие сопротивления используются в радиотехнике. Распространение тока в таких сопротивлениях работа рассматривает как цепную реакцию. Расчеты основываются на предположении, что угольная пыль распределяется во всем проводнике с равномерной плотностью (по распределению Poisson-a). Полученные численные данные находились в вопиющем противоречии с экспериментальными данными. Поэтому J. KATONA (Промышленно—Исследовательский Институт Техники связи) подробно исследовал микроструктуру указанных сопротивлений. Микроскопические снимки (один из которых публикуется в работе) указали на причину противоречия между теорией и фактами. Оказывается, угольные зерна распределяются не равномерно, а концентрируются в тонких слоях. Это дало возможность улучшить качество этих сопротивлений. Математическую теорию данных сопротивлений автор собирается развить в одной из последующих работ.

INVESTIGATION BY MEANS OF PROBABILITY THEORY OF THE CONDUCTIVITY OF CERTAIN RESISTANCES

A. RÉNYI

Summary

Account is given of some probabilistic considerations concerning the conductivity of resistances which are manufactured by pressing the mixture of carbon-powder with the powder of some non-conducting material (e. g. phenoplast). Such resistances are as it is well known, used in radiotechnics. The propagation of the current in the resistance mentioned above is considered as a chain reaction. The calculations have been carried out under the supposition that the carbon-powder is distributed with uniform density (according to Poisson's law) in the whole body of the resistances. The numerical results were in striking contradiction with the experimental facts. This has led MR. J. KATONA (of the Industrial Research Institute for Telecommunication) to investigate the microstructure of the mentioned resistances. The microscopic pictures (one of which is reproduced in the present paper) have thrown light on the reason of the contradiction between theory and facts, as they have shown that the carbon-powder is not uniformly distributed, but is contained in thin layers. This observation gave a possibility to improve the quality of the mentioned resistances. The mathematical theory of the resistances in question will be followed up further in a forthcoming paper.