Quelques remarques sur les probabilités des événements dépendants;

Par A. RÉNYI

à Budapest.

Dans son livre [1] — devenu déjà classique — M. Maurice Fréchet a donné une exposition systématique des résultats sur les probabilités d'un système fini d'évènements. Dans ce livre nous trouvons une vaste collection d'identités et d'inégalités valables pour les probabilités des évènements quelconques. Rappelons quelques-uns de ces résultats.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des évènements quelconques, définis sur une même catégorie d'épreuves. Désignons l'évènement contraire à A par $\overline{A}$. Désignons par $A+B$ l'évènement qui consiste dans la réalisation d'au moins un des évènements A et B et par AB l'évènement qui consiste dans la réalisation de l'un et de l'autre. Soit $P(A)$ la probabilité de l'évènement A. Soit S_r $(r=1,2,\ldots,n)$ la somme de toutes les probabilités $P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_r})$ où $1\leq i_1<i_2<\ldots i_r\leq n$ et soit par définition $S_0=1$. Désignons par $P_{[r]}$ la probabilité de ce qu'exactement r des évènements A_k se produisent et par P_r la probabilité de ce qu'au moins r des évènements A_k se produisent $(r=0,1,\ldots,n)$. Alors, par exemple, les formules suivantes sont valables (formules de M. Charles Jordan).

$$P_{[r]}=\sum_{k=0}^{n-r}(-1)^k\binom{k+r}{k}S_{r+k} \tag{1}$$

et

$$P_r=\sum_{k=0}^{n-r}(-1)^k\binom{k+r-1}{k}S_{r+k}. \tag{2}$$

Réciproquement, en s'appuyant sur les formules (1) et (2) les S_r peuvent être exprimés par les $P_{[r]}$ et par les P_r respectivement. On aboutit ainsi aux formules

$$S_r = \sum_{k=r}^{n} P_{[k]} \binom{k}{r} \tag{3}$$

et

$$S_r = \sum_{k=r}^{n} P_k \binom{k-1}{r-1}. \tag{4}$$

Ces formules son typiques parmi les identités qui ont lieu entre les probabilités d'évènements quelconques. Une inégalité typique — due à M. Fréchet — est la suivante :

$$\frac{S_{r+1}}{\binom{n}{r+1}} \leq \frac{S_r}{\binom{n}{r}} \qquad (r = 0, 1, \ldots n-1) \tag{5}$$

ou la suivante (qui généralise celles de Gumbel)

$$\frac{\binom{n}{r+1} - S_{r+1}}{\binom{n-1}{r}} \leq \frac{\binom{n}{r} - S_r}{\binom{n-1}{r-1}} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{6}$$

Ces identités et ces inégalités, ainsi que toutes les autres identités et inégalités traitées dans [1] sont presque évidentes pour le cas particulier où chacun des évènements A_k est ou bien l'évènement impossible, ou bien l'évènement sûr, c'est-à-dire dans le cas particulier où chaque nombre $P(A)_k$ est égal ou bien à zéro ou bien à l'unité. En eflet, dans ce cas particulier toutes ces identités et inégalités se réduisent à des relations combinatoires élémentaires et bien connues. Par exemple si m des évènements $A_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ sont identiques à l'évènement sûr et les autres $n-m$ à l'évènemeut impossible, l'identité (1) se réduit à l'identité bien connue

$$\sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k \binom{k+r}{k} \binom{m}{k+r} = \binom{m}{r} \sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k \binom{m-r}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq r, \\ 1 & \text{si } m = r \end{cases} \tag{1'}$$

et l'inégalité (5) se réduit à l'inégalité évidente

$$(5') \qquad \frac{\binom{m}{r+1}}{\binom{n}{r+1}} \leqq \frac{\binom{m}{r}}{\binom{n}{r}} \qquad \text{pour} \quad m \leqq n.$$

En outre toutes les relations (identités ou inégalités) en question sont linéaires dans les probabilités figurant en elles. Ceci permet de réduire la démonstration de toutes les relations en question aux cas particuliers, mentionnés, dans lesquels chacun des évènements A_k est ou bien l'évènement sûr ou bien l'évènement impossible. Ce fait est exprimé par les théorèmes 1 et 2 qui vont suivre.

Pour formuler nos théorèmes nous avons besoin de quelques définitions et notations. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des évènements quelconques. Appelons les 2^n évènements

$$\omega_{i_1 i_2 \ldots, i_k} = A_{i_1} \ldots A_{i_k} \overline{A}_{j_1} \ldots \overline{A}_{j_{n-k}}$$

(où $0 \leqq k \leqq n$, $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqq n$ et où la suite $j_1, j_2 \ldots, j_{n-k}$ se compose de ceux des nombres $1, 2, \ldots, n$ qui ne sont pas contenus dans la suite $i_1, i_2, \ldots, i_k$) les *atomes* de la suite des évènements A_1, $A_2, \ldots, A_n$. Formons l'algèbre de Boole finie $\mathfrak{A}$ engendrée par ces atomes; $\mathfrak{A}$ contient évidemment 2^{2^n} éléments. Nous appelons $\mathfrak{A}$ *l'algèbre d'évènements engendrée par les évènements* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et nous appelons les éléments de $\mathfrak{A}$ *des évènements définis à l'aide des* A_k. Si nous disons que les évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont données, nous entendons par là toujours que non seulement les probabilités $P(A_k)$, mais aussi les probabilités de tous les 2^n atomes ω de la suite A_k sont données; ceci implique que la probabilité de chaque évènement défini à l'aide des A_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) est déterminée de façon univoque. D'autre part, la relation logique entre un évènement quelconque B défini à l'aide des A_k et entre les évènements A_k mêmes est indépendante des valeurs des probabilités assignées aux atomes des A_k. Ces dernières peuvent être d'ailleurs des nombres non négatifs quelconques assujettis à la seule condition que leur somme soit égale à l'unité. Les probabilités $P(A_k)$ des A_k ne déterminent pas en général les probabilités des atomes : si les $P(A_k)$ sont données les 2^n inconnus $P(\omega_{i_1 i_2 \ldots i_k})$ sont soumis à n équations linéaires seulement. Mais dans le cas particulier où chacune des probabilités $P(A_k)$ est égale ou bien à 1 ou bien à 0, les probabilités des atomes $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ sont déterminées univoquement. En effet si

$$P(A_{i_1}) = P(A_{i_2}) = \ldots = P(A_{i_m}) = 1 \qquad (m \leqq n)$$

et les autres $P(A_k)$ sont égales à zéro, il n'y a qu'un seul atome qui ait la probabilité 1, notamment $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_m}$, les autres atomes ont la probabilité 0.

Maintenant nous pouvons formuler notre

THÉORÈME 1. — *Soient* B_j $(1 \leqq j \leqq 2^{2^n})$ *les évènements définis à l'aide des évènements* $A_1, A_2, \ldots, A_n$. *Soient* b_j $(1 \leqq j \leqq 2^{2^n})$ *des nombres réels donnés. L'inégalité*

$$\sum_{j=1}^{2^{2^n}} b_j P(B_j) \geqq 0 \tag{7}$$

est valable pour chaque système d'évènements donnés $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *si cette inégalité est valable dans tous les cas particuliers où*

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k)(1 - P(A_k)) = 0,$$

c'est-à-dire dans les cas où chacun des évènements A_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *est ou bien sûr ou bien impossible.*

Remarque. — Entre les inégalités (7) pour lesquels notre théorème est valable, on trouve non seulement des inégalités homogènes, mais aussi des inégalités inhomogènes (c'est-à-dire contenant un terme constant qui n'est pas multiplié par une probabilité variable), car entre les évènements $B_1, B_2, \ldots B_{2^{2^n}}$ il y a une (la somme de tous les atomes) qui est toujours l'évènement sûr, c'est-à-dire qui a toujours la probabilité égale à l'unité.

Avant de démontrer notre théorème 1, formulons une de ses conséquences immédiates, contenue dans le

THÉORÈME 2. — *Soient* B_j $(1 \leqq j \leqq 2^{2^n})$ *les évènements définis à l'aide des évènements* A_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. *Soient* b_j $(1 \leqq j \leqq 2^{2^n})$ *des nombres* *réels donnés. L'égalité*

$$\sum_{j=1}^{2^{2^n}} b_j \, P(B_j) = 0 \tag{8}$$

est valable pour chaque système d'évènements donnés A_k $(k=1,2,\ldots,n)$ *si* (8) *est valable dans tous les cas particuliers où*

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k)(1 - P(A_k)) = 0.$$

Pour déduire le théorème 2 à l'aide du théorème 1 il suffit de remarquer que si (8) est valable pour les systèmes d'évènements particuliers mentionnés dans le théorème, l'inégalité (7) est également valable et cette dernière reste valable si nous remplaçons chaque b_j par $-b_j (j=1,2,\ldots,2^{2^n})$. Or, d'après l'énoncé du théorème 1, (7) est valable pour tous les systèmes d'évènements A_k et reste encore valable pour tous ces systèmes si nous remplaçons chaque b_j par $-b_j$; ceci implique que (8) est valable pour tout système d'évènements A_k.

Passons à la démonstration de théorème 1. Soit Ω l'ensemble des atomes des évènements A_k. A chaque évènement B_j défini à l'aide des A_k nous pouvons faire correspondre le sous-ensemble de l'ensemble Ω, qui se compose des atomes dont la réalisation implique la réalisation de l'évènement B_j. Nous désignons l'ensemble qui correspond de cette façon à B_j par la même lettre B_j. Évidemment la probabilité $P(B_j)$ est toujours égale à la somme des probabilités des atomes qui sont les éléments de Bj. Donc l'inégalité (7) est équivalente à une inégalité de la forme

$$\sum_{\omega \in \Omega} c_\omega \, P(\omega) \geqq 0, \tag{7'}$$

où la sommation s'étend à tous le 2^n atomes $\omega \in \Omega$ et où les coefficients c_ω sont univoquement déterminés par les b_j. En effet, c_ω est la somme de tous les b_j tels que l'ensemble B_j contient l'atome ω.

Mais si (7) et par conséquent (7'), est valable dans tous les cas où chacun des évènements A_k $(k=1,2,\ldots,n)$ est ou bien l'évènement sûr ou bien l'évènement impossible, ceci signifie, que l'inégalité (7') est valable dès que chacun des nombres $P(A_k)$ est égale ou bien à zéro ou bien à l'unité. Mais ceci signifie à son tour que nous avons pour tous les atomes $\omega \in \Omega$,

$$c_\omega \geqq 0 \tag{9}$$

parce que si $\omega = \omega_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ et

$$P(A_{i_1}) = P(A_{i_2}) = \ldots P(A_{i_k}) = 1$$

et si les autres $n - k$ nombres $P(A_k)$ sont égaux à zéro, nous avons $P(\omega) = 1$ et $P(\omega') = 0$ pour tous les autres atomes ω'.

Il s'ensuit de (9) que (7′) est valable en général, puisque nous avons toujours $P(\omega) \geqq 0$. Donc l'inégalité (7) qui est équivalente à (7′) est, elle aussi, toujours valable, c'est-à-dire le théorème 1 est démontré.

Nos théorèmes 1 et 2 permettent de simplifier considérablement les démonstrations de toutes les identités et inégalités du tome 1 de l'ouvrage [1]. On obtient par exemple la formule (1) de M. Ch. Jordan en partant de la relation évidente (1′) par l'application directe de notre théorème 2, (1), on obtient similairement l'inégalité (5) de M. Fréchet en partant de l'inégalité évidente (5′) par l'application du théorème 1. Les démonstations des autres identités et inégalités en question suivent le même modèle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Fréchet, *Les probabilités associées à un système d'évènements compatibles et dépendants*. (*Actualité Scient. et Ind.*, Hermann et Cie., Paris, Partie I, n° 859, 1940, p. 1-80).

[2] A. Rényi, *Valószinüségszámitás*, Budapest, Tankönyvkiadó, 1954, p. 1-746.

(1) La possibilité de démontrer (1) de façon analogue est signalée dans le manuel [2] de l'auteur, (p. 112, exercice [36] du chapitre III).

(Manuscrit reçu le 1er avril 1957.)