

AUTOKLÁVOK SOROS ÉS PÁRHUZAMOS KAPCSOLÁSÁRÓL ÉS A KEVERÉS ELMÉLETÉRŐL

RÉNYI ALFRÉD

E dolgozat első négy paragrafusában az Almásfüzitői Timföldgyár által felvetett probléma megoldását ismertetjük. Az 5. §. néhány megjegyzést tartalmaz a keverés általános elméletére vonatkozólag.

1. §. A probléma megfogalmazása

Adva van r számú autokláv, amelyek egymás után vannak kapcsolva. Az első autoklávhoz óránként v köbméter anyag (lúgos oldatban elkevert bauxitpor) áramlik be és ugyanennyi anyag áramlik tovább óránként az első autoklávból a másodikba, a másodikból a harmadikba, s. í. t., és végül ugyanennyi áramlik ki az utolsó, vagyis az r -edik autoklávból. Az autoklávok teljesen egyformák; mindegyik V köbtartalmú. Az autoklávokban az anyagot állandóan keverik. Első közelítésben feltesszük, hogy a keverés tökéletes, vagyis az egyes autoklávokba beáramló anyag gyakorlatilag azonnal teljesen elkeverődik.

Meghatározandó, hogy az autoklávokon átáramló anyag hányadrésze tölt a rendszerben t óránál rövidebb időt. Ezt elsősorban a $t = t_0$ esetre kell meghatározni, ahol t_0 azt az időtartamot jelöli, amennyi szükséges ahhoz, hogy a kívánt kémiai reakció végbemenjen. Jelölje $F_r(t)$ azt, hogy az anyag hányadrésze tölt a rendszerben t óránál rövidebb időt. A feladat tehát az $F_r(t)$ függvény kiszámítása.

2. §. A probléma valószínűségyszámítási interpretációja

Az átáramló anyag egy-egy részecskéjének¹ átfutási ideje a véletlentől függ, attól ugyanis, hogy a keverés során mi történik az illető részecskével. Ez a mennyiség tehát valószínűségi változónak tekinthető. Jelöljük ezt a valószínűségi változót ζ_r -rel. Az egész rendszeren való átfutás időtartama az egyes autoklávokon való átfutási idők összegével egyenlő. Ha tehát ξ_j jelöli a j -edik autoklávon való átfutás időtartamát, akkor $\zeta_r = \sum_{j=1}^r \xi_j$. Mivel az egyes autoklávok egyformák, a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ valószínűségi változók egyforma eloszlásúak. Nyilvánvaló továbbá, hogy a ξ_j ($j = 1, 2, \dots, r$) valószínűségi változók függetlenek egymástól, mivel az egyes autoklávokban

¹ A probléma bizonyos leegyszerűsítését jelenti az, hogy egyes részecskékről beszélünk, hiszen valójában a bauxit-por szemcséi szétaprózódnak az autoklávban. Ez a körülmény azonban nincs lényeges befolyással az átfutási időre, hiszen a bekerülő nagyobb szemcséket úgy tekinthetjük, mintha azok nagyszámú kis részecskékből állnának, amelyek az autoklávban elválhatnak egymástól.

lejátszódó keverési folyamatok egymástól függetlenül mennek végbe. Ki fogjuk mutatni, hogy a tökéletes keverés feltételezése mellett a ξ_j valószínűségi változók exponenciális eloszlásúak, vagyis, ha $F_1(t)$ jelöli annak a valószínűségét, hogy egy molekula egy autoklávban t -nél rövidebb időt tölt (minden időtartamot órákban fejezünk ki), akkor

$$(1) \quad F_1(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

ahol $\lambda = \frac{v}{V}$. (V köbméterekben és v m³/órákban értendő, $\frac{1}{\lambda}$ dimenziója óra.)

Ez a valószínűségszámítás bizonyos általános tételeiből következik, de belátható teljesen elemileg is. Az alábbi szemléletes megfontolás azok számára szól, akik a valószínűségszámításban kevésbé járatosak és minden előismeret nélkül kívánnak az (1) képlet helyességéről meggyőződni.

Tegyük fel, hogy az anyag minden m³-ében N számú részecske van; akkor az autoklávban egyidejűleg NV számú részecske van. 1 óra alatt Nv számú részecske hagyja el az autoklávot, tehát t óra alatt Nvt számú részecske távozik az autoklávból. A tökéletes keverés feltevéséből következik, hogy egy adott pillanatban az autoklávban tartózkodó összes részecske ugyanolyan valószínűséggel távozhat *elsőknek*. Ez a valószínűség tehát $\frac{1}{NV}$. Annak

a valószínűsége tehát, hogy a vizsgált részecske ne elsőként távozzék, $1 - \frac{1}{NV}$.

Kérdés, mi a valószínűsége, hogy egy kiválasztott részecske pontosan k -adikként távozzon. Ez a valószínűség nyilván $\left(1 - \frac{1}{NV}\right)^{k-1} \frac{1}{NV}$, hiszen az, hogy a szóbanforgó részecske k -adikként távozik, azt jelenti, hogy sem elsőnek, sem másodikként, . . . , sem $(k-1)$ -ediknek nem távozik, a következő lépésben azonban távozik. Ilyenmódon annak a valószínűsége, hogy egy részecske egy autoklávban t -nél rövidebb időt töltsön,

$$(2) \quad F_1(t) = \mathbf{P}(\xi_k < t) = \sum_{k=1}^{Nvt} \left(1 - \frac{1}{NV}\right)^{k-1} \frac{1}{NV} = 1 - \left(1 - \frac{1}{NV}\right)^{Nvt}.$$

Mivel NV igen nagy, $1 - \frac{1}{NV}$ helyett jó közelítéssel $e^{-\frac{1}{NV}}$ írható. Ennélfogva

$$(3) \quad F_1(t) \sim 1 - e^{-\frac{vt}{V}} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \text{ahol } \lambda = \frac{v}{V}$$

amit bizonyítani akartunk.²⁾

²⁾ Egy másik, szintén igen egyszerű bizonyítás a következő: a tökéletes keverés definíciójából következik, hogy annak a valószínűsége, hogy egy részecske, amely az s időpontban az autoklávban van, az $s+t$ időpont előtt távozzék, csak t -től függ és nem függ attól, hogy az illető részecske az s időpontot megelőzőleg milyen hosszú időt töltött az autoklávban. Ebből rögtön következik, hogy ha $G(t) = 1 - F_1(t)$, akkor $G(t)$ monoton csökkenő és eleget tesz a $G(s+t) = G(s)G(t)$ függvényegyenletnek. E függvényegyenletnek azonban, mint jól ismeretes, az egyedüli monoton csökkenő megoldásai a $G(t) = e^{-\lambda t}$ függvények, ahol $\lambda > 0$.

3. §. A probléma megoldása

Határozzuk meg most ζ_r eloszlását. Egy jólismert tétel szerint (lásd pl. [1], 230—233. o.) r számú független és egyforma exponenciális eloszlású valószínűségi változó összegének eloszlása r -edrendű gamma-eloszlású, tehát $F_r(t)$ -vel jelölve ζ_r eloszlásfüggvényét (vagyis annak a valószínűségét, hogy egy részecske t óránál rövidebb idő alatt fusson át az r autokláv-ból álló rendszeren) fennáll a következő összefüggés:

$$(4) \quad F_r(t) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^{\lambda t} x^{r-1} e^{-x} dx.$$

$F_r(t)$ tehát ún. nem-teljes gamma-függvény, mégpedig bevezetve a

$$(5) \quad \Gamma_r(y) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^y u^{r-1} e^{-u} du$$

jelölést, ahol $\Gamma(r)$ a jólismert gamma-függvény,

$$(6) \quad \Gamma(r) = (r-1)! = \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx,$$

akkor

$$(7) \quad F_r(t) = \Gamma_r(\lambda t), \quad \text{ahol } \lambda = \frac{v}{V}.$$

A nem-teljes gamma-függvény tabulálva van. (Egy rövid táblázata megtalálható pl. [1] 139—141. oldalain).

Lássunk egy számpéldát. Legyen $V = 32 \text{ m}^3$, $v = 40 \text{ m}^3/\text{óra}$, $r = 7$ és $t = 3$ óra, akkor $\lambda = 1,25 \text{ óra}^{-1}$ és így a 7 autokláv-ból álló rendszerben az átáramló anyagnak csak $\Gamma_7(3,75) = 0,087$ része, azaz 8,7%-a tölt 3 óránál rövidebb időt.

4. §. Az autokláv-park leggazdaságosabb kihasználásának problémája

Ha óránként $A \text{ m}^3$ anyagot akarunk átáramoltatni és összesen R autokláv áll rendelkezésre, akkor kérdés, milyen csoportokra célszerű elosztani az autoklávokat.

A következő elrendezéseket vizsgáljuk: az autokláv-parkot egyenként r sorbakapcsolt autokláv-ból álló csoportra osztjuk és az így nyert $\frac{R}{r}$ csoportot

párhuzamosan kapcsoljuk; r -ről feltesszük, hogy R egy osztója. Kérdés, hogy a rendszer határfoka milyen elrendezés mellett lesz maximális? Másszóval ha t_0 időtartamig kell egy-egy részecskének az autokláv-rendszerben tartózkodnia ahhoz, hogy a kívánt reakciók végbemenjenek, r mely értékénél lesz minimális az átáramló anyagnak az a hányada, amely t_0 óránál kevesebbet töl a rendszerben? A kérdésre a válasz nem könnyű, hiszen ha több autoklávot kapcsolunk sorba, vagyis r értékét növeljük, akkor egy-egy csoportban azono

áramlási sebesség mellett hosszabb időt töltene az anyag, azonban ekkor az áramlás sebessége is arányosan megnő, hiszen egy autokláv-csoporton nyilván $\frac{Ar}{R}$ m³ anyag áramlik át. A rendszer hatásfokára tehát két ellentétes irányú tényező hat. Ilyen módon általában az várható, hogy r -nek sem a túl kicsiny, sem a túl nagy értékei nem kedvezőek. A rendszer hatásfokát a mondottak alapján kézenfekvő azzal mérni, hogy az anyag mekkora hányada tölt a rendszerben az előírt t_0 kritikus időtartamnál hosszabb időt. Tehát a szóbanforgó kapcsolás mellett a rendszer hatásfoka

$$(8) \quad H_r = 1 - \Gamma_r \left(\frac{Art_0}{RV} \right).$$

Ennélfogva r értékét minden adott esetben (adott A , t_0 , R és V értékek mellett) úgy kell megválasztani, hogy $1 - \Gamma_r \left(\frac{Art_0}{RV} \right)$ maximális legyen, azaz úgy, hogy $\Gamma_r \left(\frac{Art_0}{RV} \right)$ minimális legyen.

Mivel a számbajövő r értékek száma kicsiny, a nem-teljes Γ -függvény táblázata segítségével ez a számítás gyorsan és könnyen elvégezhető. Elvégezhető az optimális r -érték meghatározása grafikusan is; ehhez nyilván csak a $\Gamma_r(x)$ függvények grafikonjaira van szükség.

Vizsgáljuk most meg a szóbanforgó elrendezés mellett a ζ_r átfutási idő várható értékét és szórását. Mivel a $\Gamma_r(\lambda x)$ eloszlásfüggvényű gamma-eloszlás várható értéke, mint ismeretes, $\frac{r}{\lambda}$ és szórása $\frac{\sqrt{r}}{\lambda}$, tehát ζ_r várható értéke

$$(9) \quad \mathbf{M}(\zeta_r) = r \cdot \frac{RV}{Ar} = \frac{RV}{A}.$$

Más szóval az átfutási idő várható értéke független r értékétől. Ha például $R = 24$, $V = 32$ m³ és $A = 120$ m³/óra, akkor az átfutási idő várható értéke a számításba jövő $r = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ értékek mindegyikére 6 óra 24 perc. Az átfutási idő szórása a mondottak szerint

$$(10) \quad \mathbf{D}(\zeta_r) = \sqrt{r} \frac{RV}{Ar} = \frac{RV}{A \sqrt{r}},$$

a szórás tehát r növekedésével csökken. Ha az adatok olyanok, hogy az átlagos átfutási idő, tehát $\frac{RV}{A}$ lényegesen nagyobb az előírt kritikus időtartamnál, akkor tehát célszerű r értékét minél nagyobbra választani.

A gyakorlatban az optimális kapcsolás kiválasztásánál még egy szempontra figyelemmel kell lenni. Az autoklávokat ugyanis rendszeresen karban kell tartani, és így az a célszerű, ha az autokláv-csoportok közül egy ciklikusan mindig üzemen kívül van, a szükséges karbantartási munkálatok elvégzése céljából. Az optimális elrendezés kiválasztása a közölt képletek alapján ezen gyakorlati szempont szem előtt tartásával is könnyen elvégez-

hető. Ha összesen R autokláv van egy üzemben és ezeket r autoklávból álló csoportokba osztjuk, úgy, hogy ezen csoportok közül felváltva egy mindig üzemen kívül van, akkor a működő csoportok száma $\frac{R}{r} - 1$, tehát $v = \frac{rA}{R-r}$

és így r értékét úgy kell kiválasztani R osztói közül, hogy $\Gamma_r\left(\frac{Art_0}{V(R-r)}\right)$ minimális legyen.

5. §. A nem tökéletes keverés problémája

A valóságban a keverés sohasem tökéletes a fenti értelemben, vagyis nem igaz az, hogy minden egyes részecske, amely egy adott időpontban az autoklávban tartózkodik, ugyanolyan valószínűséggel hagyja el elsőnek az autoklávot, hanem a keverés véges sebessége folytán a kevéssel azelőtt az autoklávba beáramlott részecskék kisebb valószínűséggel távoznak, mint a már régebben az autoklávba bekerült részecskék. Ennek következtében egyes részecskék által egy-egy autoklávban töltött időtartam nagyobb lesz, mint a tökéletes keverés mellett volna, míg más részecskék esetében kisebb lesz. (Az átlagos átfutási idő persze nem változik, hiszen az szükségképpen megegyezik azzal az időtartammal, amelyet a részecskék az autoklávban töltenének, ha mindegyik ugyanannyi időt töltene az autoklávban.)

Ha figyelembe kívánjuk venni, hogy a keverés nem tökéletes, akkor valamilyen módon meg kell határozni a keverés *intenzitását*. A szóbanforgó probléma szempontjából természetes mértékszám a keverés intenzitásának az egyes részecskék egy-egy autoklávon való átfutási idejének relatív szórásnégyzete tehát az

$$(11) \quad i = \frac{\mathbf{D}^2(\xi)}{\mathbf{M}^2(\xi)}$$

hányados. Ha a keverés tökéletes, akkor ξ exponenciális eloszlású és így $i = 1$. Ha keverés egyáltalán nincsen, akkor az átfutási idő állandó és így $\mathbf{D}^2(\xi) = 0$, tehát $i = 0$. Kérdés, milyen lesz nem-tökéletes keverés mellett az átfutási idő eloszlása. Erre vonatkozólag plauzibilis feltevés, hogy nem tökéletes keverés esetében az *egy* autoklávon való átfutási idő gamma-eloszlású lesz.

Ez a hipotézis annak a fizikai képnek felel meg, hogy az autokláv bizonyos számú „rekesz”-ből áll, az egyes „rekeszekben” belül a keverés tökéletes és minden egyes rekeszből az anyag a következő rekeszbe áramlik át a beáramlási sebességgel azonos sebességgel. Bár a szóbanforgó rekeszek egymástól a valóságban nincsenek elválasztva, válaszfalaikat csak odaképzelve, ez a modell a keverés folyamatáról realisabb képet nyújt, mint a tökéletes keverés hipotézise.

Ha a keverés intenzitása i , akkor mivel az S -edrendű gamma-eloszlás relatív szórása, mint láttuk $\frac{1}{\sqrt{S}}$, tehát $i = \frac{1}{S}$, azaz $S = \frac{1}{i}$, tehát a részecskék egy autoklávon való átfutási idejének eloszlása $\frac{1}{i}$ -edrendű gamma-eloszlású.

súnak tekintendő. Ez annyit jelent, hogy amikor r darab egyenként V köbtartalmú autokláv van sorbakapcsolva, amelyekben a keverés $i = \frac{1}{S}$ intenzitású ($S = 2, 3, \dots$), ezt a rendszert gondolatban helyettesítsük rS darab egyenként $\frac{V}{S}$ köbtartalmú olyan autoklávval, amelyben a keverés tökéletes.

Annak indoklására, hogy a (11) képlettel definiált mennyiség valóban adekvát mértékszám a keverés intenzitásának, ki kell mutatnunk, hogy ésszerű feltevések mellett mindig érvényes a $0 \leq i \leq 1$ egyenlőtlenség. E célból induljunk ki a következő modellből: Az autoklávból időegységenként távozik egy részecske és ugyanakkor belép egy új részecske. Annak a valószínűsége, hogy egy részecske, amely a t időpontban került be az autoklávba, azt a $t + n$ időpontban hagyja el, feltéve, hogy a $t + n - 1$ időpontig nem távozott, legyen P_n . Legyen $C_n = 1 - P_n$. Akkor annak a valószínűsége, hogy egy részecske pontosan N időegységnyi időt töltsön az autoklávban, nyilván $C_1 C_2 \dots C_{N-1} (1 - C_N)$ ($N = 1, 2, \dots$). Jelölje ξ azt az időtartamot, amit a részecske az autoklávban tölt. Be fogjuk bizonyítani, hogy ha $1 \geq C_1 \geq C_2 \geq \dots \geq C_n \geq C_{n+1} \geq \dots$, akkor

$$(12) \quad \frac{\mathbf{D}^2(\xi)}{\mathbf{M}^2(\xi)} \leq 1.$$

A (12) egyenlőtlenség, figyelembevételével, hogy

$$(13) \quad \mathbf{D}^2(\xi) = \mathbf{M}(\xi^2) - \mathbf{M}^2(\xi)$$

nyilvánvalóan írható az

$$(14) \quad \mathbf{M}(\xi^2) \leq 2\mathbf{M}^2(\xi)$$

alakba. Nyilvánvalóan

$$(15) \quad \mathbf{M}(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} n C_1 C_2 \dots C_{n-1} (1 - C_n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_1 C_2 \dots C_n$$

és

$$(16) \quad \mathbf{M}(\xi^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 C_1 C_2 \dots C_{n-1} (1 - C_n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1) C_1 C_2 \dots C_n.$$

Abból a célból, hogy (14)-et bebizonyítsuk, megmutatjuk, hogy érvényes a következő

I. Lemma. Legyen $1 \geq C_1 \geq C_2 \geq \dots \geq C_n \geq \dots$, akkor

$$(17) \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n + 1) C_1 C_2 \dots C_n \leq \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_1 C_2 \dots C_n \right)^2.$$

Bizonyítás. Számoljuk meg, hogy ha (17) jobboldalán a négyzetre-emelést elvégezzük, mennyi lesz azon tagok száma, amelyek pontosan n tényezőből állnak. Nyilvánvalóan ilyen tag pontosan $n + 1$ darab lesz; e tagok mindegyike nyilván nagyobb vagy egyenlő, mint $C_1 C_2 \dots C_n$. Így nyerjük a (17) egyenlőtlenséget, ahol egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $C_n = C$ ($n = 1, 2, \dots$), amikor is (17) bal- és jobboldalán egyaránt $\frac{1}{(1-C)^2}$ áll. Mármost (14) könnyen következik lemmánkból, ugyanis (15)-re és (16)-ra való tekintettel (14) a következő alakra hozható:

$$(18) \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1) C_1 \dots C_n \leq 2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_1 C_2 \dots C_n \right)^2$$

és (17) szerint

$$(19) \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1) C_1 \dots C_n \leq 2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n + 1) C_1 \dots C_n \right) \leq 2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_1 C_2 \dots C_n \right)^2$$

Ezzel tehát (14)-et igazoltuk. Az a feltevés, hogy C_n monoton esökkenő sorozat, azt jelenti, hogy minél régebben van egy részecske az autoklávban, annál valószínűbb, hogy azt elhagyja. Ha elfogadjuk, hogy ez a feltétel a valódi keverésnél mindig teljesül (azaz ezt a feltételt belefoglaljuk a valódi keverés definíciójába), akkor tehát bebizonyítottuk, hogy bármely keverés intenzitása 0 és 1 közé eső szám.

A valódi keverési folyamatokat folytonos tárgyalásmód mellett a következőképpen jellemezhetjük. Ha $F(x)$ jelöli egy részecske az autoklávban való átfutási idejének eloszlásfüggvényét és $f(x) = F'(x)$ a sűrűségfüggvényét, akkor közelítőleg $\frac{f(x) \Delta x}{1 - F(x)}$ a feltételes valószínűsége annak, hogy a részecske

x és $x + \Delta x$ időpontok között távozik az autoklávból, feltéve, hogy az x időpontig még nem távozott el. A valódi keverésről akkor beszélünk, ha ez a valószínűség x -nek monoton növekvő függvénye (azaz, ha minél régebben van már a részecske az autoklávban, annál nagyobb a valószínűsége, hogy rövidesen távozik). Ez akkor teljesül, ha $\frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{d}{dx} \log \frac{1}{1 - F(x)}$ monoton

növekvő, azaz, ha $\log \frac{1}{1 - F(x)}$ konvex függvény.

Nem nehéz megadni a most bebizonyított lemma folytonos analogonját sem. Ezt fejezi ki a

2. Lemma. *Legyen $F(x)$ egy pozitív valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, (tehát $F(0) = 0$), tegyük fel, hogy $\log \frac{1}{(1 - F(x))}$ konvex a $(0, +\infty)$ intervallumban. Akkor*

$$(20) \quad \int_0^{\infty} x^2 dF(x) \leq 2 \left(\int_0^{\infty} x dF(x) \right)^2.$$

Bizonyítás. Nyilvánvalóan

$$(21) \quad \int_0^{\infty} x^2 dF(x) = 2 \int_0^{\infty} x(1 - F(x)) dx$$

és

$$(22) \quad \int_0^{\infty} x dF(x) = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx.$$

Legyen $g(x) = -\log(1 - F(x))$, akkor tehát $g(x)$ konvex és a bizonyítandó egyenlőtlenség

$$(23) \quad \int_0^{\infty} xe^{-\lambda(x)} dx \leq \left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda(x)} dx \right)^2.$$

Azonban, mivel $g(x)$ pozitív, monoton növekvő és konvex, és $g(0) = 0$, tehát

$$(24) \quad g(a + b) \geq g(a) + g(b) \quad (a \geq 0, b \geq 0).$$

Mivel

$$(25) \quad \left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda(x)} dx \right)^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(x) - \lambda(y)} dx dy = \int_0^{\infty} \left(\int_0^x e^{-\lambda(u) - \lambda(x-u)} du \right) dx,$$

tehát (24) miatt

$$(26) \quad \left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda(x)} dx \right)^2 \geq \int_0^{\infty} e^{-\lambda(x)} \int_0^x du dx = \int_0^{\infty} xe^{-\lambda(x)} dx,$$

ezzel (23)-at és így a 2. lemmát bebizonyítottuk.

A bizonyításból nyilvánvaló, hogy (20)-ban egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha (24)-ben egyenlőség áll fenn minden pozitív a -ra és b -re, tehát ha $g(x)$ lineáris, $g(x) = \lambda x$, ahol $\lambda > 0$, tehát ha

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Más szóval (20)-ban egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $F(x)$ az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye.

E §. eredményeit a következőképpen foglalhatjuk össze:

Akkor mondjuk, hogy az autoklávban valódi keverés folyik, ha egy részecske az autoklávban való átfutási idejének az eloszlásfüggvényét $F(x)$ -szel jelölve

$\log \frac{1}{1 - F(x)}$ konvex függvény. Ez esetben a keverés intenzitását az átfutási

idő relatív szórásának négyzetével mérjük; a keverés intenzitása 0 és 1 közé eső szám, amely akkor és csak akkor egyenlő eggyel, ha a keverés tökéletes, azaz, ha az átfutási idő exponenciális eloszlással bír.

Azt az esetet, amikor az átfutási idő relatív szórása 1-nél nagyobb, *túlkeverésnek* nevezhetjük. Mint a diszkrét modell tárgyalásából látszik, ez csak akkor fordulhat elő, ha egy részecske távozásának valószínűsége az

autoklávban való tartózkodása során nem növekszik állandóan, hanem időnként csökken. E lehetőség az iparban használt keverő eljárásoknál nyilvánvalóan sohasem fordul elő. Bár elvben e lehetőséget nem lehet kizárni, azonban indokolt, hogy az ilyen folyamatot ne nevezzük valódi keverésnek, hiszen az ilyen folyamat a keveréssel szemben támasztott gyakorlati követelményeknek sem felel meg.

(Beérkezett : 1959. V. 22.)

IRODALOMJEGYZÉK

[1] RÉNYI A.: *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, 1954.

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ И ПАРАЛЛЕЛЬНОМ СЦЕПЛЕНИИ АВТОКЛАВОВ И О ТЕОРИИ СМЕШЕНИЯ

A. RÉNYI

Резюме

В первых четырёх параграфах работы решается следующая проблема поднятая глинозёмным заводом в Almásfüzitő: определить вероятность $F_r(t)$ того, что в r последовательно связанных автоклавах частица бокситной порошки пробудет менее чем t часов, если объём каждого автоклава V , скорость вещества (жидкости, смешенной с бокситным порошком) v и смешение в каждом автоклаве идеально. Ответ таков:

$$(1) \quad F_r(t) = \Gamma_r(\lambda t) ,$$

где $\lambda = \frac{v}{V}$ и $\Gamma_r(x)$ — неполная гамма функция:

$$(2) \quad \Gamma_r(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^x u^{r-1} e^{-u} du .$$

На основании этого результата исследуется как надо сцеплять автоклавы, чтобы получить наилучший результат, т. е. чтобы $F_r(t_0)$ было наименьшим, где t_0 время, которое каждая частица должна провести в системе для того, чтобы произошла нужная реакция.

В §. 5. изучается проблема неидеального смешения. В автоклаве смешение характеризует функция распределения $F(x)$ времени, которое частица

находится в автоклаве. Доказывается, что в случае действительного смешения $\log \frac{1}{1-F(x)}$ есть выпуклая функция. Отсюда следует, что

$$(3) \quad \int_0^{\infty} x^2 dF(x) \leq 2 \left(\int_0^{\infty} x dF(x) \right)^2.$$

Иными словами, если обозначит математическое ожидание времени, проведенного частицей в одном автоклаве, через $\mathbf{M}(\xi)$ а соответствующую дисперсию через $\mathbf{D}(\xi)$, то

$$(4) \quad \frac{\mathbf{D}^2(\xi)}{\mathbf{M}^2(\xi)} \leq 1,$$

где равенство имеет место в том и только в том случае, если смешение идеально, т. е. $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$, где $\lambda > 0$. Величина $\frac{\mathbf{D}^2(\xi)}{\mathbf{M}^2(\xi)}$ может рассматриваться как *мера интенсивности смешения*.

ON SERIAL AND PARALLEL COUPLING OF AUTOCLAVES AND ON THE THEORY OF MIXING

by

A. RÉNYI

Abstract

In §§. 1—4. the following problem, which has been raised by the Bauxite Works of Almásfüzitő, is solved: to determine the probability $F_r(t)$ that a particle of bauxite powder spends less than t hours in a system consisting of r serially coupled autoclaves, if the volume V of each autoclave, the velocity v of the flow of the material (fluid mixed with the bauxite powder) through the system is given, and it is supposed that the mixing of the material in each autoclave is ideal.

The answer is

$$(1) \quad F_r(t) = \Gamma_r(\lambda t)$$

where $\lambda = \frac{v}{V}$ and $\Gamma_r(x)$ is the incomplete gamma-function

$$(2) \quad \Gamma_r(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^x u^{r-1} e^{-u} du.$$

On the basis of this result it is discussed how to switch a set of autoclaves to obtain the greatest efficiency, i. e. minimize $F_r(t_0)$ where t_0 is the time

which each particle of the bauxite powder has to spend in the system in order that the necessary chemical reactions should take place.

In § 5. the problem of non-ideal mixing is discussed. The mixing in an autoclave is characterized by the probability distribution function $F(x)$ of the time which a particle spends in the autoclave. It is shown that in case of effective mixing $\log \frac{1}{1 - F(x)}$ is a convex function, and that this implies that

$$(3) \quad \int_0^{\infty} x^2 dF(x) \leq 2 \left(\int_0^{\infty} x dF(x) \right)^2,$$

or by other words, that denoting by $\mathbf{M}(\xi)$ the mean value and by $\mathbf{D}^2(\xi)$ the variance of the time spent by a particle in the autoclave, we have

$$(4) \quad \frac{\mathbf{D}^2(\xi)}{\mathbf{M}^2(\xi)} \leq 1$$

with equality standing if and only if the mixing is ideal, i. e. if $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ for $x \geq 0$ where $\lambda > 0$. The quantity $\frac{\mathbf{D}^2(\xi)}{\mathbf{M}^2(\xi)}$ may be considered as a *measure of the intensity of mixing*.