BOLYONGÁSI PROBLÉMÁKRA VONATKOZÓ HATÁRELOSZLÁSTÉTELEK

Írta: RÉNYI ALFRÉD

Bevezetés

E dolgozatban arra szeretnénk a figyelmet felhívni, hogy a független (vagy majdnem független) valószínűségi változók összegeire vonatkozó „klasszikus" határeloszlástételeken kívül még számos egyéb, más típusú határeloszlástétel adható meg. Célunk az, hogy minél több típusát mutassuk be a határeloszlástételeknek; ezért a lehető legegyszerűbb esetekre szorítkozunk. Az 1. §-ban a többdimenziós, a 2. §-ban pedig már csak az egydimenziós bolyongás (fej-vagy-írás játék) esetével foglalkozunk.[1] Látni fogjuk, hogy már ezekre az egyszerű példákra vonatkozólag is milyen sok, meglepőbbnél meglepőbb törvényszerűség állapítható meg, amelyek megismerése elősegíti a véletlen ingadozások jellegének mélyebb megértését. Bár részletesen csak az említett egyszerű példákkal foglalkozunk, utalunk a tárgyalt tételek általánosításával foglalkozó irodalomra. E dolgozat ismertető jellegű, a tárgyalt eredmények túlnyomórészt ismertek, azonban a bizonyítások egy része vagy egészében vagy egyes részleteiben új. A megfogalmazásnál arra törekedtünk, hogy a dolgozat minél kevesebb előismerettel megérthető legyen.

1. §. Bolyongás az r-dimenziós pontrácson

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ teljesen független valószínűségi változók, amelyek a $+1$ és -1 értékeket $\frac{1}{2}$ valószínűséggel veszik fel és legyen

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k. \tag{1.1}$$

ζ_n felfogható, mint a fej-vagy-írás játékban az egyik játékos nyeresége n dobás után, ha a játékos minden dobásnál 1 forintot nyer vagy veszít, aszerint, hogy az eredmény fej vagy írás. A ζ_n változó értékét (amely mindig

[1] A többdimenziós bolyongásra vonatkozólag igen figyelemre méltó új eredményeket értek el ERDŐS PÁL és S. J. TAYLOR [12].

egész szám) a szemléletesség kedvéért úgy interpretáljuk, mint egy véletlen helyzetű pont abszcisszáját az x-tengelyen, a $t=n$ időpontban. A szóban forgó pont tehát a számegyenes „rácspontjainak" (egész koordinátájú pontjainak) halmazán végez véletlen „bolyongást".

E §-ban ennek a feladatnak a többdimenziós általánosításával foglalkozunk. Legyen G_r az r-dimenziós euklideszi tér rácspontjainak (azaz egész koordinátájú pontjainak) halmaza, és tekintsünk egy, a G_r-rácson véletlen bolyongó mozgást végző pontot. Ezen azt értjük, hogy ha a t időpontban a bolyongó pont a P rácspontban van, akkor a $t+1$ időpontban a pont egyforma valószínűséggel lehet a P ponttal „szomszédos" $2r$ rácspont bármelyikében, függetlenül attól, hogy a pont hogyan jutott el a t időpontra a P pontba. (A P rácspont szomszédos pontjain azokat a rácspontokat értjük, amelyek $r-1$ koordinátája megegyezik P megfelelő koordinátájával, egy koordinátája azonban ± 1-gyel különbözik P megfelelő koordinátájától). Ha $\vec{\zeta}_n$ jelöli azt a vektort, amely abba a rácspontba mutat, ahol a bolyongó pont a $t=n$ időpotban van, akkor a $\vec{\zeta}_n$ valószínűségi vektor-változók homogén és additív (vektoriális) Markov-láncot alkotnak, ugyanis

$$\vec{\zeta}_n-\vec{\zeta}_0=\vec{\xi}_1+\cdots+\vec{\xi}_n,$$

ahol a $\vec{\xi}_k$ valószínűségi vektorváltozók, amelyek a bolyongó pont elmozdulásai a $(k, k+1)$ időintervallumok alatt, feltevésünk szerint független és egyforma eloszlású vektorváltozók, amelyek az r-dimenziós tér koordinátatengelyeinek pozitív, ill. negatív irányával megegyező egységvektorok mindegyikével $\frac{1}{2r}$ valószínűséggel egyenlők. Az $r=1$ speciális esetben $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_n$ valós értékűek, függetlenek és a ± 1 értékeket veszik fel $1/2$ valószínűséggel, másszóval a fentebb említett egydimenziós bolyongást nyerjük speciális esetként.

Először a következő, PÓLYA GYÖRGYtől származó szép tételt [1] bizonyítjuk be.

1. TÉTEL. *Az r-dimenziós rácson bolyongó mozgást végző pont* 1 *valószínűséggel végtelen sokszor visszakerül a kiindulási pontba, ha* $r=1$, *vagy* $r=2$, *míg ha* $r\geqq 3$, *annak a valószínűsége, hogy végtelen sokszor térjen vissza,* 0-*val egyenlő.*

BIZONYÍTÁS. Feltehetjük, hogy a bolyongó pont a $t=0$ időpontban a $\vec{0}$ kezdőpontból indult. Jelölje $P_n^{(r)}$ annak a valószínűségét, hogy n lépés után a pont újból a kiindulási pontba tér vissza, vagyis, hogy $\vec{\zeta}_n=0$. Nyilván ahhoz, hogy a pont n lépés után a kiinduló helyzetbe térjen vissza, szükséges és elégséges, hogy mind az r tengelynek mind a pozitív, mind a negatív irányába ugyanannyi lépést tegyen. Így tehát $P_{2n+1}^{(r)}=0$ és

$$(1.2)\quad P_{2n}^{(r)}=\frac{1}{(2r)^{2n}}\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_r=n}\frac{2n!}{(n_1!\,n_2!\ldots n_r!)^2}=\frac{\binom{2n}{n}}{(2r)^{2n}}\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_r=n}\left(\frac{n!}{n_1!\ldots n_r!}\right)^2$$

tehát

$$(1.2a)\qquad P_{2n}^{(1)}=\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

és

$$(1.2b)\qquad P_{2n}^{(2)}=\frac{\binom{2n}{n}^2}{4^{2n}}$$

és

$$(1.2c)\qquad P_{2n}^{(3)}=\frac{\binom{2n}{n}}{6^{2n}}\sum_{k+l\leqq n}\left(\frac{n!}{k!\,l!\,(n-k-l)!}\right)^2.$$

Ilyen módon a STIRLING-formula szerint

$$(1.3a)\qquad P_{2n}^{(1)}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

és

$$(1.3b)\qquad P_{2n}^{(2)}\sim\frac{1}{\pi n}.$$

Valamivel bonyolultabb $P_{2n}^{(r)}$ megbecsülése, ha $r\geqq 3$. Mivel a polinomiális együtthatók összegét ismerjük,

$$\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_r=n}\frac{n!}{n_1!\ldots n_r!}=r^n,$$

és — mint könnyen belátható — a polinomiális együtthatók közül azok a legnagyobbak, amelyekben az $n_1,\ldots,n_r$ számok egymástól legfeljebb ± 1-gyel különböznek, figyelembe véve a polinomiális együtthatóknak a STIRLING-formula segítségével nyerhető aszimptotikus kifejezését (lásd pl. [4], V. fejezet 28. feladat), adódik, hogy

$$\sum_{n_1+\cdots+n_r=n}\left(\frac{n!}{n_1!\ldots n_r!}\right)^2\leqq\max_{\Sigma n_j=n}\frac{n!}{n_1!\ldots n_r!}\,r^n=O\left(\frac{r^{2n}\,r^{\frac{r}{2}}}{(2\pi n)^{\frac{r}{2}-1}}\right)$$

és így

$$(1.3c)\qquad P_{2n}^{(r)}=O\left(\frac{1}{n^{\frac{r}{2}}}\right).$$

$P_{2n}^{(r)}$-re egyébként a következő integrálelőállítás és abból folyó aszimptotika adható meg:

$$P_{2n}^{(r)} = \frac{\binom{2n}{n}}{(2\pi)^r (2r)^{2n}} \int_{-\pi}^{+\pi} \cdots \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \sum_{k=1}^{r} e^{i\vartheta_k} \right|^{2n} d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_r \tag{1.4a}$$

és így

$$P_{2n}^{(r)} \sim \frac{1}{2^{r-1}} \left(\frac{r}{n\pi} \right)^{\frac{r}{2}}. \tag{1.4b}$$

Ilyen módon $\sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(r)} = +\infty$, ha $r=1$ vagy $r=2$ és $\sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(r)} < +\infty$ ha $r \geqq 3$.

Szükségünk lesz a következő két segédtételre, amelyek közül az első a jólismert BOREL—CANTELLI-féle lemma, a második (lásd [2]) a BOREL—CANTELLI-lemma második állításának általánosítása. A következőkben, ha A_n egy eseménysorozat, $\overline{\lim}\, A_n$ azt az eseményt jelöli, hogy az A_n események közül egyidejűleg végtelen sok következik be.

1. LEMMA. *Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ tetszőleges események, amelyekre $\Sigma \mathbf{P}(A_n) < +\infty$, akkor az A_n események közül 1 valószínűséggel csak véges sok következik be egyidejűleg, azaz $\mathbf{P}(\overline{\lim}\, A_n) = 0$. Ha $\Sigma \mathbf{P}(A_n) = +\infty$ és az A_n események teljesen függetlenek, akkor az események közül 1 valószínűséggel végtelen sok következik be, azaz $\mathbf{P}(\overline{\lim}\, A_n) = 1$.*

2. LEMMA. *Ha $\Sigma \mathbf{P}(A_n) = +\infty$ és*

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{\sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k A_l)}{\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k) \right)^2} = 1, \tag{1.5}$$

akkor $\mathbf{P}(\overline{\lim}\, A_n) = 1$.

MEGJEGYZÉS. Az (1.5) feltétel nyilván teljesül, például, ha az A_k események páronként függetlenek.

Az 1. lemmából azonnal következik, hogy az $r \geqq 3$ esetben 1 valószínűséggel csak véges sokszor tér vissza a pont a kiindulási helyzetébe. Az $r=1$ és $r=2$ esetben, figyelembe véve, hogy

$$\mathbf{P}(\vec{\zeta}_n = 0, \vec{\zeta}_{n+k} = 0) = \mathbf{P}(\vec{\zeta}_n = 0)\, \mathbf{P}(\vec{\zeta}_k = 0) = P_n^{(r)} P_k^{(r)}, \tag{1.6}$$

könnyen belátható, hogy a $\vec{\zeta}_n = 0$ eseményekre, $n = 1, 2, \ldots$, teljesül a 2. lemma

(1.5) feltevése, ugyanis

$$\sum_{n=1}^{N} P_{2n}^{(1)} \sum_{k=0}^{N-n} P_{2k}^{(1)} \sim \frac{4N}{\pi} \sim \left(\sum_{n=1}^{N} P_{2n}^{(1)} \right)^2$$

és

$$\sum_{n=1}^{N} P_{2n}^{(2)} \sum_{k=0}^{N-n} P_{2k}^{(2)} \sim \frac{\log 2N}{\pi^2} \sim \left(\sum_{n=1}^{N} P_{2n}^{(2)} \right)^2.$$

Ennélfogva az $r=1$ és az $r=2$ esetben az említett lemma szerint a bolyongó pont 1 valószínűséggel végtelen sokszor kerül vissza a kiindulási pontba.

Vizsgáljuk meg először alaposabban, hogy milyen valószínűséggel kerül vissza a bolyongó pont oda, ahonnan elindult. Jelölje $Q_n^{(r)}$ annak valószínűségét, hogy az r-dimenziós rácson bolyongó pont n lépésben jut vissza *először* a kiindulási pontba. Akkor nyilvánvalóan fennállanak a

(1.7) $$P_{2n}^{(r)} = Q_{2n}^{(r)} + \sum_{k=1}^{n-1} P_{2k}^{(r)} Q_{2n-2k}^{(r)}$$

egyenletek. Bevezetve a

(1.8) $$G_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{2k}^{(r)} x^k$$

és a

(1.9) $$H_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_{2k}^{(r)} x^k$$

jelölést, (1.7)-ből következik, hogy

$$G_r(x) = H_r(x) + G_r(x) H_r(x),$$

tehát

(1.10a) $$H_r(x) = \frac{G_r(x)}{1+G_r(x)}$$

és

(1.10b) $$G_r(x) = \frac{H_r(x)}{1-H_r(x)}.$$

Nyilván

(1.11) $$H_r(1) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_{2k}^{(r)} = Q^{(r)}$$

annak a valószínűségét jelöli, hogy a pont egyáltalán visszajusson a kiindulási pontjába. Elvégezve az $x \to 1-0$ határátmenetet, nyerjük, hogy ha $\sum_{k=1}^{\infty} P_{2k}^{(r)}$ divergens (azaz, ha $r=1$ vagy $r=2$, akkor $Q^{(r)}=1$, míg ha $\sum_{k=1}^{\infty} P_{2k}^{(r)}$ konvergens, akkor

$$(1.12)\qquad Q^{(r)}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}P_{2k}^{(r)}}{1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}P_{2k}^{(r)}}$$

vagyis, ha $r\geqq 3$, akkor $0<Q^{(r)}<1$ (pl. $Q^{(3)}\sim 0{,}35$). Fennáll tehát a következő

2. TÉTEL. *A bolyongó pont az* $r\geqq 3$ *esetben az* (1.12) *alatti* 1-*nél kisebb* $Q^{(r)}$ *valószínűséggel kerül vissza a kezdőpontba.*

A fenti 1. és 2. tételhez hasonló módon bizonyítható be, hogy az 1- és 2-dimenziós esetben a bolyongó pont 1 valószínűséggel a rács minden pontjába végtelen sokszor eljut (míg $r\geqq 3$ esetben ez nem igaz).

2. §. Az egydimenziós bolyongás tüzetesebb vizsgálata

E §-ban csak az $r=1$ esettel, tehát az egyenesen bolyongó ponttal foglalkozunk.

Határozzuk meg explicit alakban a $Q_{2k}^{(1)}$ valószínűségeket.

$$(2.1)\qquad G_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}}{4^k}x^k=\sum_{k=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-x)^k=\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1,$$

tehát

$$(2.2)\qquad H_1(x)=\frac{G_1(x)}{1+G_1(x)}=1-\sqrt{1-x}=\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-1)^{k-1}x^k$$

Ilyen módon

$$(2.3)\qquad Q_{2k}^{(1)}=(-1)^{k-1}\binom{\frac{1}{2}}{k}=\frac{\binom{2k-2}{k-1}}{k2^{2k-1}}=\frac{\binom{2k}{k}}{(2k-1)2^{2k}}=\frac{P_{2k}^{(1)}}{2k-1}.$$

Egyszerű számolással adódik (2.1) és (2.2)-ből, vagy (2.3)-ból és (1.2a)-ból, hogy fennáll a

$$(2.4)\qquad Q_{2k}^{(1)}=P_{2k-2}^{(1)}-P_{2k}^{(1)}$$

azonosság[2], amelyre a következőkben szükségünk lesz.

[2] A (2.4) azonosságra valószínűségszámítási meggondoláson alapuló közvetlen bizonyítás is adható (lásd [14]) amely azon alapszik, hogy egyrészt nyilván $Q_{2k}^{(1)}=R_{2k-2}-R_{2k}$, ahol R_{2k} annak a valószínűségét jelöli, hogy $2k$ lépés alatt a bolyongó pont nem tér vissza a 0 pontba, másrészt indukcióval (2.14) alapján kimutatható, hogy $R_{2k}=P_{2k}^{(1)}$.

Jelölje a ν_1 valószínűségi változó azt, hogy hány lépés szükséges ahhoz, hogy a bolyongó pont *először* visszakerüljön a kiindulási helyére: nyilvánvalóan következik (2.3)-ból, hogy

$$\mathbf{P}(\nu_1=2k)=Q_{2k}^{(1)}\sim\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{\frac{3}{2}}} \tag{2.5}$$

és így az, hogy a $\Sigma 2kQ_{2k}^{(1)}$ sor divergens. Ez más szóval azt jelenti, hogy *ν_1 várható értéke végtelen nagy.*

Jelölje $\varphi(t)$ ν_1 karakterisztikus függvényét, akkor

$$\varphi(t)=1-\sqrt{1-e^{2it}}$$

és így

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi\left(\frac{t}{n^2}\right)^n=e^{-\sqrt{-2it}}. \tag{2.6}$$

Egyszerű számolással adódik, hogy

$$e^{-\sqrt{-2it}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{ixt-\frac{1}{2x}}}{x^{3/2}}\,dx, \tag{2.7}$$

tehát $e^{-\sqrt{-2it}}$ annak az eloszlásnak a karakterisztikus függvénye, amelynek sűrűségfüggvénye

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{1}{2x}}}{\sqrt{2\pi}x^{3/2}} & \text{ha } x>0\\ 0 & \text{ha } x<0.\end{cases} \tag{2.8}$$

Mivel

$$\int_0^x\frac{e^{-\frac{1}{2u}}}{\sqrt{2\pi}\,u^{3/2}}\,du=2\left(1-\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right), \tag{2.9}$$

ahol $\Phi(y)$ a standardizált normális eloszlásfüggvény, tehát, felhasználva a karakterisztikus függvényekre vonatkozó konvergenciatételt (lásd [4], 461. o.) a következő tételt nyerjük:

3. TÉTEL. *Jelöljék $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_k,\ldots$ azokat az időpontokat, amikor az egyenesen bolyongó pont a kiindulási pontba tér vissza (azaz amelyekre $\zeta_\nu=0$), akkor*

$$\lim_{k\to+\infty}\mathbf{P}\left(\frac{\nu_k}{k^2}<x\right)=2\left(1-\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right),\ \text{ha } x>0. \tag{2.10}$$

BIZONYÍTÁS. A $\nu_1, \nu_n - \nu_{n-1}$ $(n=2,3,\dots)$ változók nyilván függetlenek és egyforma eloszlásúak és

$$\frac{\nu_k}{k^2} = \frac{\nu_1 + (\nu_2 - \nu_1) + \cdots + (\nu_k - \nu_{k-1})}{k^2};$$

ilyen módon (2.10) következik (2.6)-ból, (2.7)-ből és (2.9)-ből.

MEGJEGYZÉS. A 3. tételben szereplő határeloszlás, amelynek karakterisztikus függvénye $e^{-\sqrt{-2it}}$, nyilván az $\alpha = \frac{1}{2}$ kitevőhöz tartozó stabilis eloszlás és így a $\{Q_{2k}^{(1)}\}$ eloszlás ennek a stabilis eloszlásnak a vonzási tartományába tartozik.[3]

A 3. tételt még egy másik alakban is felírhatjuk. Jelölje ϑ_n a $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ számok közül a zérussal egyenlők számát, akkor

$$\mathbf{P}(\nu_k < n) = \mathbf{P}(\vartheta_n > k) \tag{2.11}$$

és így nyerjük a következő tételt.

4. TÉTEL. *Jelölje ϑ_n azt, hogy a $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ számok közül hány egyenlő 0-sal. Akkor*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\vartheta_n}{\sqrt{n}} < y\right) = \begin{cases} 2\Phi(y) - 1, & \text{ha } y \geqq 0 \\ 0, & \text{ha } y < 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Tehát $\frac{\vartheta_n}{\sqrt{n}}$ határértékben olyan eloszlású, mint egy standardizált normális eloszlású valószínűségi változó abszolút értéke.

Most áttérünk annak vizsgálatára, hogy a $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ számok közül a pozitívak, ill. negatívak számának mi az eloszlása; a szimmetria kedvéért azokat a ζ_j-ket, amelyek 0-val egyenlők, de ugyanakkor ζ_{j-1} pozitív, a „pozitívak"-hoz, míg azokat a ζ_j-ket, amelyek 0-val egyenlők, de ζ_{j-1} negatív, a negatívakhoz számítjuk. (Tekintettel a 4. tételre, nem túlságosan lényeges, hogy a 0-kat hová számítjuk.) Jelölje π_n a $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ számok közül az ilyen értelemben „pozitívak" számát. Be fogjuk bizonyítani a következő K. L. CHUNGtól és W. FELLERtől [18] származó tételt:

[3] A ν_k valószínűségi változó eloszlása explicit alakban is kifejezhető, mégpedig (lásd [14])

$$\mathbf{P}(\nu_k = 2n) = \frac{k}{2n-k}\binom{2n-k}{n}\frac{1}{2^{2n-k}} \qquad (n = k, k+1, \dots) \tag{$*$}$$

($*$)-ból egy másik bizonyítás nyerhető a 3. tételre.

5. TÉTEL*

$$\mathbf{P}(\pi_{2n}=2k)=\frac{\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{2^{2n}}=P_{2k}^{(1)}P_{2n-2k}^{(1)} \qquad (k=0,1,\ldots,n) \tag{2.13}$$

MEGJEGYZÉS. Nyilvánvaló, hogy π_{2n} nem lehet páratlan, ugyanis π_2 csak a 2 és 0 értékeket veheti fel, aszerint, hogy $\zeta_1=+1$ vagy $\zeta_1=-1$; hasonlóképpen $\pi_{2n}-\pi_{2n-2}$ is csak a 2, ill. 0 értékeket veheti fel, ugyanis ζ_{2n-2} nyilván páros, és így, ha $\zeta_{2n-2}>0$, akkor $\zeta_{2n-2}\geqq 2$ és így $\pi_{2n}-\pi_{2n-2}=2$; ha $\zeta_{2n-2}<0$, akkor $\zeta_{2n-2}\leqq -2$ és így $\pi_{2n}-\pi_{2n-2}=0$, míg ha $\zeta_{2n-2}=0$, akkor $\pi_{2n}-\pi_{2n-2}$ értéke 0 vagy 2. Szükségünk lesz a következő azonosságra:

3. LEMMA.

$$\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=1 \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{2.14}$$

MEGJEGYZÉS. A (2.14) reláció következménye (2.13)-nak, ugyanis ha (2.13) érvényes, akkor, összeadva az összes $\mathbf{P}(\pi_{2n}=2k)$ valószínűségeket és figyelembe véve, hogy — mint már említettük — π_{2n} mindig páros, 1-et kell kapnunk. Mivel azonban nekünk (2.14)-re éppen (2.13) bizonyításához lesz szükségünk, más úton kell (2.14)-et bizonyítanunk.

BIZONYÍTÁS. Mint láttuk

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}x^k. \tag{2.15}$$

(2.15) mindkét oldalát négyzetre emelve, figyelembe véve, hogy $\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ és összehasonlítva x^n együtthatóját az egyenlőség két oldalán, következik (2.14).

Lássuk most (2.13) bizonyítását. A bizonyítást teljes indukcióval fogjuk végezni. (2.13) nyilvánvalóan érvényes, ugyanis, ha $n=1$,

$$\mathbf{P}(\pi_2=0)=\mathbf{P}(\pi_2=2)=\frac{1}{2}.$$

Be fogjuk bizonyítani, hogy ha (2.13) érvényes $n<N$-re, akkor $n=N$-re is érvényes. Jelölje újból ν_1 azt a legkisebb j számot, amelyre $\zeta_j=0$, akkor ν_1 csak páros értékeket vehet fel és

$$\mathbf{P}(\pi_{2N}=2k)=\sum_{l=1}^{N}\mathbf{P}(\pi_{2N}=2k,\ \nu_1=2l)+\mathbf{P}(\pi_{2N}=2k,\ \nu_1>2N). \tag{2.16}$$

* $k=0$-ra $\binom{2k}{k}$ alatt 1 értendő.

Nyilvánvaló továbbá, hogy

$$\mathbf{P}(\pi_{2N}=2k, \nu_1=2l)=\mathbf{P}(\pi_{2N}=2k, \nu_1=2l, \zeta_1=+1)+ \tag{2.17}$$
$$+\mathbf{P}(\pi_{2N}=2k, \nu_1=2l, \zeta_1=-1),$$

továbbá

$$\mathbf{P}(\pi_{2N}=2k, \nu_1=2l, \zeta_1=+1)=\frac{1}{2}\mathbf{P}(\pi_{2(N-l)}=2(k-l))\,\mathbf{P}(\nu_1=2l) \tag{2.18}$$

és

$$\mathbf{P}(\pi_{2N}=2k, \nu_1=2l, \zeta_1=-1)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(\pi_{2(N-l)}=2k)\,\mathbf{P}(\nu_1=2l). \tag{2.19}$$

Figyelembe véve, hogy (2.4) szerint

$$\mathbf{P}(\nu_1=2l)=Q_{2l}^{(1)}=P_{2l-2}^{(1)}-P_{2l}^{(1)},$$

következik, hogy fennáll a

(2.20)
$$\mathbf{P}(\pi_{2N}=2k)=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N}[\mathbf{P}(\pi_{2(N-l)}=2k)+\mathbf{P}(\pi_{2(N-l)}=2(k-l))](P_{2l-2}^{(1)}-P_{2l}^{(1)})+$$
$$+\mathbf{P}(\pi_{2N}=2k, \nu_1>2N)$$

rekurzió. A $\mathbf{P}(\pi_{2N}=2k, \nu_1>2N)$ tag nyilván mindig 0, kivéve ha $k=0$ vagy $k=N$, ez esetben

$$\mathbf{P}(\pi_{2N}=2N, \nu_1>2N)=\mathbf{P}(\pi_{2N}=0, \nu_1>2N)=\frac{1}{2}\mathbf{P}(\nu_1>2N), \tag{2.21}$$

és (2.4) szerint

$$\frac{1}{2}\mathbf{P}(\nu_1>2N)=\frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^{+\infty}\mathbf{P}(\nu_1=2k)=\frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^{+\infty}Q_{2k}^{(1)}=\frac{1}{2}P_{2N}^{(1)}=\frac{\binom{2N}{N}}{2^{2N+1}}. \tag{2.22}$$

Mármost tegyük fel, hogy (2.13) igaz $n=1,2,\ldots,N-1$-re, akkor a (2.14) azonosság miatt (2.20)-ból némi számolással következik, hogy (2.13) $n=N$-re is igaz. Ezzel az 5. tételt bebizonyítottuk.

Az 5. tétel segítségével most bebizonyítjuk az ún. *„arcus-sinus törvényt"*, amelyet a következő tétel fejez ki:

6. TÉTEL.

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\frac{\pi_n}{n}<x\right)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}, \text{ ha } 0\leqq x\leqq 1. \tag{2.23}$$

BIZONYÍTÁS. A STIRLING-formula szerint[4]

$$\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right),$$

tehát ha $0 < y < x < 1$, akkor

$$\mathbf{P}\left(y \leqq \frac{\pi_{2n}}{2n} < x\right) \sim \sum_{k=[ny]+1}^{[nx]} \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=[ny]+1}^{[nx]} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}} \cdot \frac{1}{n}. \tag{2.24}$$

és így, mivel a (2.24) jobboldalán álló összeg az $\frac{1}{\pi}\int\limits_x^y \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ integrál RIEMANN-féle közelítő összegeként fogható fel, következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(y \leqq \frac{\pi_{2n}}{2n} < x\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_y^x \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\sqrt{x} - \arcsin\sqrt{y}\right), \tag{2.25}$$

ha $0 < y < x < 1$.

(2.25)-ből könnyen következik, hogy bármely x-re $(0 < x < 1)$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\pi_{2n}}{2n} < x\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}. \tag{2.26}$$

Mármost $\pi_{2n} \leqq \pi_{2n+1} \leqq \pi_{2n} + 1$, így tehát $\frac{\pi_{2n}}{2n}$ és $\frac{\pi_{2n+1}}{2n+1}$ határeloszlása azonos. Ezzel a 6. tételt bebizonyítottuk.

A 6. tétel egy másik lehetséges bizonyítása, amely elegánsabb, de több segédeszközt használ fel, a 3. lemma következő általánosításán alapszik.

4. LEMMA.

$$\frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} e^{it(2k-n)} = P_n(\cos t), \tag{2.27}$$

ahol $P_n(x)$ *az n-edik* LEGENDRE-*polinom, azaz* $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$.

A 4. lemmát a következőképpen bizonyíthatjuk be.

A (2.27) baloldalán álló összeg nyilván egyenlő x^n együtthatójával az

$$\frac{1}{\sqrt{(1-e^{it}x)(1-e^{-it}x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-2\cos tx + x^2}}$$

[4] Itt a Stirling-formula következő alakjára van szükség: $k! = \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$.

függvény hatványsorában. Mármost ismeretes (l. pl. [3], II. 291. o.), hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\cos t x+x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos t) x^n, \tag{2.28}$$

ahol $P_n(t)$ az n-edik LEGENDRE-polinom, amivel a 4. lemmát bebizonyítottuk.
A 4. lemma segítségével a 6. tétel a következőképpen bizonyítható be.

BIZONYÍTÁS. (2.27)-ből

$$\mathbf{M}\left(e^{it\frac{\pi_{2n}}{2n}}\right)=e^{\frac{it}{2}} P_n\left(\cos\frac{t}{2n}\right). \tag{2.29}$$

LAPLACE egy klasszikus formulája szerint (lásd [3], loc. cit.)

$$P_n(\cos\vartheta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos\vartheta+i\cos\varphi\sin\vartheta)^n\, d\varphi, \tag{2.30}$$

(2.29)-ből és (2.30)-ból nyerjük, hogy

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{M}\left(e^{it\frac{\pi_{2n}}{2n}}\right)=\frac{e^{\frac{it}{2}}}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\frac{it\cos\varphi}{2}}\, d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{e^{itx}}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx. \tag{2.31}$$

Tekintettel a karakterisztikus függvényekre vonatkozó folytonossági tételre (lásd [4]), (2.31)-ből a 6. tétel állítása leolvasható. A 4. lemmából látható, hogy a LEGENDRE-féle polinomoknak egyszerű valószínűségszámítási interpretációja adható meg: $P_n(\cos t)$ nem más, mint a $\pi_{2n}-n$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye, ahol a π_{2n} valószínűségi változó megadja, hogy a fej-vagy-írás játéknál egy játékos $2n$ dobás során hányszor lesz nyerésben.

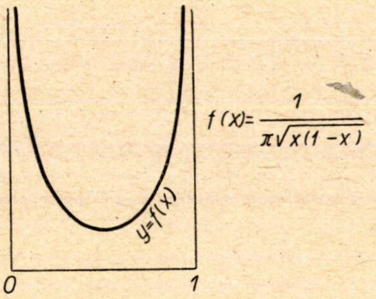
A 4. lemma segítségével könnyen kiszámíthatjuk π_{2n} momentumait. Szimmetria okokból nyilvánvaló, hogy $\mathbf{M}(\pi_{2n})=n$. A következőképpen nyerjük (2.27)-ből π_{2n} szórását

$$\mathbf{D}^2(\pi_{2n})=-\left[\frac{d^2P_n(\cos t)}{dt^2}\right]_{t=0}=P_n'(1)=\binom{n+1}{2},$$

tehát

$$\mathbf{D}(\pi_{2n})=\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

MEGJEGYZÉS. A 6. tétel eredménye egy igen érdekes és paradox jelenséget ír le. Vegyük észre ugyanis, hogy az $F(x)=\frac{2}{\pi}$ arc sin $\sqrt{x}$ eloszlásfüggvény deriváltja $F'(x)=f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ az $x=\frac{1}{2}$ pontra szimmetrikus és az $x=\frac{1}{2}$ pontban veszi fel a minimumát. Ez azt jelenti, hogy $\frac{\pi_n}{n}$ legvalószínűtlenebb értéke az $\frac{1}{2}$ érték, és minél távolabb van x az $\frac{1}{2}$-től, annál nagyobb valószínűséggel lesz $\frac{\pi_n}{n}$ x közelében $(0<x<1)$. Az ember éppen ennek az ellenkezőjét várná: az látszik természetesnek, ha a bolyongó pont a kb. fele időt töltené a pozitív féltengelyen és a fele időt a negatív féltengelyen. Ez azonban, mint a 6. tétel mutatja, nem igaz. A fej-vagy-írás játék terminológiájával: azt hinné az ember, hogy ha τ jelenti a játék tartalmának azt a hányadát, amely alatt az első játékos „nyerésben van”, akkor τ legvalószínűbb értéke $\frac{1}{2}$; ezzel azonban ennek éppen az ellenkezője igaz: *az* $\frac{1}{2}$ *érték* τ *legvalószínűtlenebb értéke!* Ha az ember jobban utánagondol, ez az első pillanatra meglepő eredmény érthetővé válik, hiszen ζ_n lassan változik $(|\zeta_{n+1}-\zeta_n|=1)$, ha tehát ζ_n elér egy „nagy” pozitív értéket, akkor hosszú ideig pozitív marad, hasonlóképpen, ha egy nagy negatív értéket ér el, akkor hosszú ideig negatív marad. Márpedig, ha n nagy, a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ számsorozatban kell lenni nagy értékeknek (az iterált logaritmustétel szerint $\operatorname{Max}_{k\leq n}|\zeta_k|$ 1 valószínűséggel végtelen sok n-re megközelíti a $\sqrt{2n\log\log n}$ értéket).



1. ábra

Ezt a paradox jelenséget P. LÉVY fedezte fel (lásd [5]).

Megjegyzendő, hogy a 6. tétel messzemenően általánosítható. ERDŐS P. és M. KAC [6] bebizonyították, hogy ha a ξ_k teljesen független változókra $\mathbf{M}(\xi_k)=0$, $\mathbf{D}(\xi_k)=1$ és teljesül a LINDEBERG-féle feltétel, $\zeta_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ és π_n jelöli a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ számok közül a pozitívak számát, akkor (2.22) érvényes. E. SPARRE-ANDERSEN [7] pedig kimutatta, hogy ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ egyforma szimmetrikus és folytonos eloszlású független valószínűségi változók, akkor érvényes a

(2.32)
$$\mathbf{P}(\pi_n=k)=\frac{\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{2^{2n}}$$

pontos formula, amiből következik, hogy szimmetrikus eloszlású változók esetében (2. 22) akkor is érvényes, ha a változók szórása nem létezik. A tétel további általánosításaira vonatkozólag utalunk a [15], [16] és [17] dolgozatokra.

Vizsgáljuk most meg ϑ_n pontos eloszlását. Páros n esetében ezt az eloszlást könnyen meghatározhatjuk, amennyiben érvényes a következő, W. FELLERtől [14] származó

7. TÉTEL.

$$\mathbf{P}(\vartheta_{2n}=k)=\frac{2^k}{2^{2n}}\binom{2n-k}{n}. \tag{2.33}$$

BIZONYÍTÁS. A teljes valószínűség tétele szerint, ha újból ν_1 jelöli azt a legkisebb $m\geqq 1$ számot, amelyre $\zeta_m=0$,

$$\mathbf{P}(\vartheta_{2n}=k)=\sum_{r=1}^{n-1}\mathbf{P}(\vartheta_{2n}=k,\ \nu_1=2r)+\mathbf{P}(\vartheta_{2n}=k,\ \nu_1\geqq 2n).$$

Így tehát fennáll a következő rekurzív reláció

$$\mathbf{P}(\vartheta_{2n}=k)=\sum_{r=1}^{n-1}\mathbf{P}(\vartheta_{2n-2r}=k-1)\,\mathbf{P}(\nu_1=2r)+\mathbf{P}(\vartheta_{2n}=k,\ \nu_1\geqq 2n).$$

Ebből (2. 33) indukcióval könnyen bebizonyítható, hasonlóan ahhoz, ahogy az 5. tételt bebizonyítottuk. (2. 33)-ból egy újabb bizonyítást nyerhetünk a 4. tételre.

A 7. tételből könnyen levezethető a *Stirling*-formula. segítségével, hogy $\mathbf{M}(\vartheta_n)\sim\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$.

A 6. tétel a következő alakban is kimondható: *Legyen*

$$\varepsilon_k=\operatorname{sign}\zeta_k=\begin{cases}1 \text{ ha } \zeta_k>0 \text{ vagy ha } \zeta_k=0 \text{ és } \zeta_{k-1}=1\\ -1 \text{ ha } \zeta_k<0 \text{ vagy ha } \zeta_k=0 \text{ és } \zeta_{k-1}=-1,\end{cases}$$

akkor

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n}{n}<x\right)=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1+x}{2}\qquad(-1\leqq x\leqq+1).$$

Ilyen módon $\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n}{n}$ nem konvergál 0-hoz, bár ez volna „plauzibilis". Ezzel szemben igaz a következő, ERDŐS PÁLtól és G. HUNTtól [8] származó

8. TÉTEL.

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{N}\frac{\varepsilon_k}{k}}{\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}}=0\right)=1. \tag{2.34}$$

BIZONYÍTÁS. Nyilvánvaló, hogy $M(\varepsilon_n)=0$ és $M(\varepsilon_k^2)=1$. Számítsuk ki az $M(\varepsilon_n\varepsilon_m)$ várható értékét, $m>n$. Nyilván

$$\mathbf{M}(\varepsilon_n\varepsilon_m)=2\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(\zeta_n=k)(2\mathbf{P}(\zeta_m>0|\zeta_n=k)-1)=$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(\zeta_n=k)\mathbf{P}(-k<\zeta_{m-n}\leqq 0).$$

Mivel az n-edrendű $\frac{1}{2}$ paraméterű binomiális eloszlásnak a legnagyobb tagja az $n/2$-höz legközelebbi tag, és az aszimptotikusan $\sqrt{\frac{2}{n\pi}}$,

$$\mathbf{P}(-k<\zeta_{m-n}\leqq 0)\leqq\frac{C_1 k}{\sqrt{m-n}}$$

és így

$$\mathbf{M}(\varepsilon_n\varepsilon_m)\leqq C_2\sqrt{\frac{n}{m-n}}. \tag{2.35}$$

(Itt és a következőkben $C_1, C_2, C_3, \ldots$ pozitív állandók.) Ha $m-n\leqq n$, akkor (2.35) helyett a triviális

$$|\mathbf{M}(\varepsilon_n\varepsilon_m)|\leqq 1$$

egyenlőtlenséget használjuk. Ilyen módon

$$\mathbf{M}\left(\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^2\right)\leqq c_3\log N.$$

De akkor, bevezetve a $\Delta_N=\dfrac{\sum_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon_n}{n}}{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}}$ jelölést, $M(\Delta_N)=0$ és $M(\Delta_N^2)\leqq 1$ és így a *Csebisev*-egyenlőtlenség szerint

$$\mathbf{P}(|\Delta_N|>\varepsilon)\leqq\frac{C_4}{\varepsilon^2\log N}. \tag{2.36}$$

Ennélfogva a $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(|\Delta_{2^{k^2}}|>\varepsilon)$ sor tetszőleges $\varepsilon>0$-ra konvergens és így az 1. lemma szerint 1 valószínűséggel

$$|\Delta_{2^{k^2}}|\leqq\varepsilon \text{ ha } k \text{ elég nagy.}$$

Azonban, ha $2^{k^2} \leqq n < 2^{(k+1)^2}$, akkor

$$|\Delta_n| \leqq \Delta_{2^{k^2}} + \frac{C_5}{k}.$$

Így tehát 1 valószínűséggel $|\Delta_n| \leqq 2\varepsilon$, hacsak n elég nagy; mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges, tehát (2.34) fennáll.

Befejezésül még néhány tételt említünk meg az egydimenziós bolyongás legnagyobb „kilengésére" vonatkozólag.

9. TÉTEL.

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\max_{1 \leqq k \leqq n} \zeta_k < x\sqrt{n}\right) = \begin{cases} 2\Phi(x) - 1 & ha \quad x \geqq 0 \\ 0 & ha \quad x < 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

10. TÉTEL.

$$\lim \mathbf{P}\left(\max_{1 \leqq k \leqq n} |\zeta_k| < x\sqrt{n}\right) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{8x^2}}}{2k+1} & \text{ha} \quad x > 0 \\ 0 & \text{ha} \quad x \leqq 0. \end{cases} \tag{2.38}$$

A 9. tétel levezethető például[5] a következő pontos képletből[6] (lásd [4], V. fejezet 7. feladat)

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leqq k \leqq n} \zeta_k < m\right) = 1 - \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]} \binom{m+2k}{k} \frac{m}{m+2k} \cdot \frac{1}{4^k} \qquad (1 \leqq m \leqq n). \tag{2.39}$$

ERDŐS PÁL és M. KAC bebizonyították [9], hogy a 9. és 10. tételek messzemenően általánosíthatók és kiterjeszthetők egyforma eloszlású független valószínűségi változók sorozatainak részletösszegeire. E tételek nem egyforma eloszlású változókra való kiterjesztésére vonatkozólag lásd a [10] dolgozatot.

Az

$$L(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{8x^2}}}{2k+1} \tag{2.40}$$

függvény értékeinek táblázatát PALÁSTI ILONA készítette el (lásd pl. [13]).

Érdemes összehasonlítani a 9. és 10. tételt B. V. GNEDENKO és V. SZ. KOROLJUK tételeivel (lásd [4], 601. o.).

[5] A 9. tétel egy másik lehetséges bizonyítására vonatkozólag lásd a [11] dolgozatot.

[6] $m = 0$, $k = 0$ esetben $\dfrac{m}{m+2k}$ alatt 1 értendő.

A tételeket a következő alakban írhatjuk fel:

11. TÉTEL.

$$(2.41)\qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\max_{1\leq k\leq 2n} \zeta_k < x\sqrt{2n} \mid \zeta_{2n}=0\right)=\begin{cases} 1-e^{-2x^2} & ha \quad x\geqq 0 \\ 0 & ha \quad x<0. \end{cases}$$

12. TÉTEL

$$(2.42)\qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\max_{1\leq k\leq 2n} |\zeta_k| < x\sqrt{2n} \mid \zeta_{2n}=0\right)=\begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2x^2} & x>0 \\ 0 & x\leqq 0. \end{cases}$$

A 11. és 12. tételek tehát csak olyan utakra vonatkoznak, amelyeknél a bolyongó pont $2n$ lépés után visszatér kiindulási pontjába. Érthető, hogy e feltétel mellett a pont általában kevésbé távolodik csak el a 0 pontból, mint a feltétel nélküli „szabad" bolyongásnál. Ez fejeződik ki pl. abban, hogy a (2.41) alatti határeloszlás várható értéke

$$\int_0^\infty 4x^2 e^{-2x^2} dx = \frac{1}{4},$$

míg a (2.38) alatti határeloszlás várható értéke $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sim 0{,}78.$

Visszatérve az arcus-sinus törvényre, érdekes megvizsgálni, hogyan módosul π_{2n} eloszlása, ha feltesszük, hogy ismerjük s_{2n} értékét. Erre vonatkozólag az első — rendkívül meglepő — eredmény K. L. CHUNGtól és W. FELLERtől származik[7], és a következőképpen szól:

5. LEMMA. *Azon feltevés mellett, hogy* $s_{2n}=0$, π_{2n} *egyenlő valószínűséggel veszi fel a* $0, 2, 4, \ldots, 2n$ *értékeket, azaz*

$$(2.43)\qquad \mathbf{P}(\pi_{2n}=2k \mid s_{2n}=0)=\frac{1}{n+1} \qquad (k=0, 1, \ldots, n).$$

MEGJEGYZÉS: (2.43) nyilván ekvivalens a következő állítással:

$$(2.44)\qquad \mathbf{P}(\pi_{2n}=2k, s_{2n}=0)=\frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)2^{2n}}.$$

(2.43) úgy is fogalmazható, hogy ha a fej vagy írás játéknál $2n$ dobás során mindkét játékos ugyanannyiszor (tehát n-szer) nyert, akkor e feltétel mellett egyenlően valószínű, hogy az első játékos $0, 2, 4, \ldots, 2n$ játék során vezetett. (2.43), ill. (2.44) egyszerű bizonyítása megtalálható a [19] tankönyvben.

[7] Lásd [18]. A [20] dolgozat e tétel általánosításával foglalkozik; még általánosabb alakban bizonyította be e tételt SPARRE ANDERSEN a [16] dolgozatban.

Abból a célból, hogy π_{2n} feltételes eloszlását minden $s_{2n}=2\lambda$ feltétel mellett meghatározhassuk, az 5. lemma mellett szükségünk lesz a következő, I. BERTRAND-tól származó segédtételre is.

6. LEMMA. *Vizsgáljuk az összes lehetséges olyan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n+m}$ számsorozatokat, amelyek tagjai közül n darab $+1$-gyel, a többi m darab pedig -1-gyel egyenlő. (Az ilyen számsorozatok száma nyilván $\binom{n+m}{n}$.) Legyen $n>m$, és $s_k=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_k$. A vizsgált számsorozatok közül azok száma, amelyeknél az $s_1, s_2, \ldots, s_{n+m}$ számok mind pozitívak $\frac{n-m}{n+m}\binom{n+m}{m}$.*

MEGJEGYZÉS: BERTRAND a 6. lemma állítását a következőképpen interpretálta: ha egy választásnál két jelöltre lehetett szavazni, A-ra és B-re, és az A jelölt n szavazatot, a B jelölt pedig m szavazatot kapott, ahol $n>m$, és a szavazatokat egyenként veszik ki az urnából, és folyamatosan számolják, akkor $\frac{n-m}{n+m}$ annak a valószínűsége, hogy az összeszámlálás során az A jelölt végig „vezessen”.

A 6. lemma bizonyítása megtalálható [4]-ben (II. fej. 36. feladat.).

Az 5. és 6. lemma segítségével könnyen bebizonyítható a következő tétel:

13a TÉTEL[8].

$$\mathbf{P}(\pi_{2n}=2k, s_{2n}=-2j)=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{j\leq l\leq n-k}\binom{2n-2l}{n-l}\frac{1}{n-l+1}\cdot\frac{j}{l}\cdot\binom{2l}{l-j}, \tag{2.45}$$

ha $0\leq k\leq n$, és $j=0,1,\ldots,n$.

A 13a tételből könnyen következik a

13b TÉTEL.

$$\mathbf{P}(\pi_{2n}=2k, s_{2n}=+2j)=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{j\leq l\leq k}\binom{2n-2l}{n-l}\frac{1}{(n-l+1)}\cdot\frac{j}{l}\binom{2l}{l-j}. \tag{2.46}$$

Ha ugyanis $\bar{\pi}_{2n}=2n-\pi_{2n}$ jelöli az $s_1, s_2, \ldots, s_{2n}$ számok közül a negatívok számát (egy 0 „negatív”-nak, ill. „pozitív”-nak számít, aszerint, hogy a sorozat megelőző eleme negatív vagy pozitív), akkor szimmetria okokból

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\pi_{2n}=2k, s_{2n}=+2j)&=\mathbf{P}(\bar{\pi}_{2n}=2n-2k, s_{2n}=+2j)=\\&=\mathbf{P}(\pi_{2n}=2n-2k, s_{2n}=-2j)\end{aligned} \tag{2.47}$$

és így (2.46) következik (2.45)-ből.

[8] Ha $j=0$, akkor a (2.45) összeg első tagjában szereplő $\frac{0}{0}$ hányadoson 1 értendő; ebben a speciális esetben (2.45) redukálódik (2.44)-re.

A 13a és 13b tételekből némi számolással következik a

14. TÉTEL. *Legyen* y_n *egy tetszőleges egész számokból álló számsorozat* $(|y_n| \leqq n)$, *amelyre* $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{\sqrt{n}} = y$. *Akkor*

$$(2.48) \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\pi_n}{n} \leqq x \,\middle|\, s_n = y_n\right) = \int_0^x f(t|y)\,dt,$$

ahol ha $y \geqq 0$,

$$(2.49) \qquad f(x|y) = \frac{2e^{y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{y}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{e^{-u^2/2}\,du}{\left(1-\frac{y^2}{u^2}\right)^{3/2}} \qquad 0 \leqq x \leqq 1,$$

míg ha $y \leqq 0$

$$(2.50) \qquad f(x|y) = \frac{2e^{y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{|y|}{\sqrt{1-x}}}^{\infty} \frac{e^{-u^2/2}\,du}{\left(1-\frac{y^2}{u^2}\right)^{3/2}} = f(1-x|-y).$$

MEGJEGYZÉS: Ha $y = 0$, akkor $f(x|0) \equiv 1$ $(0 \leqq x \leqq 1)$, vagyis az $\frac{s_n}{\sqrt{n}} \to 0$ feltevés mellett $\frac{\pi_n}{n}$ határeloszlása egyenletes a $(0, 1)$ intervallumban. Ez persze közvetlenül is következik az 5. lemmából.

A 14. tételből könnyen levezethetők az alábbi tételek:

15a TÉTEL.

$$(2.51) \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\pi_n}{n} \leqq x \,\middle|\, s_n \geqq 0\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \sqrt{\frac{u}{1-u}}\,du =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}\right).$$

15b TÉTEL.

$$(2.52) \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\pi_n}{n} \leqq x \,\middle|\, s_n \leqq 0\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \sqrt{\frac{1-u}{u}}\,du =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x(1-x)}\right).$$

Megjegyzés: (2.52) nyilván szimmetria-meggondolással következik (2.51)-ből, ha abba x helyett $(1-x)$-et helyettesítünk.

A 15a és 15b tételek E. SPARRE ANDERSENtől származnak (l. [16]).

A 15a és 15b tételek azt mutatják, hogy azon feltevés mellett, hogy a játék az első játékosra nézve kedvezően végződött, megváltozik $\frac{\pi_n}{n}$ határeloszlása, ha az A játékos a játék végeredményeként nyert, akkor igen valószínű, hogy a játék tartamának nagy része alatt nyerésben volt. Figyelembevéve, hogy $\mathbf{P}(s_n \geqq 0) = \mathbf{P}(s_n \leqq 0) \to \frac{1}{2}$, (2.51)-ből és (2.52)-ből az arcussinus tétel eredeti alakja következik, tekintve, hogy a (2.51) és (2.52) jobboldalán álló eloszlásfüggvények számtani közepe $\frac{2}{\pi}$ arc sin $\sqrt{x}$.

MEGJEGYZÉS (a korrektúra olvasásakor, 1960. V. 25-én). E. SPARRE ANDERSEN volt szíves a figyelmemet felhívni arra, hogy a 14. tétel megtalálható K. L. CHUNG és W. FELLER [18] dolgozatában; [18]-ban a szóban forgó határeloszlás egy, a fent megadottól különböző, de azzal ekvivalens alakban szerepel.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] PÓLYA, G.: Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend der Irrfahrt im Strassennetz, *Math. Ann.*, **84** (1921), 149—160.

[2] ERDŐS, P. — RÉNYI, A.: On Cantor's series with convergent $\Sigma\frac{1}{q_n}$, *Annales Univ. Sci. Budapest*, **2** (1959), 93—109.

[3] PÓLYA, G. — SZEGŐ, G.: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Springer, Berlin, 1925.

[4] RÉNYI, A.: *Valószínűségszámítás*, Budapest, Tankönyvkiadó, 1954.

[5] LÉVY, P.: Sur certaine processus stochastiques homogènes, *Comp. Math.* **7** (1939), 283—339.

[6] ERDŐS, P. — KAC, M.: On the number of positive sums of independent random variables, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947), 1011—1020.

[7] SPARRE ANDERSEN, E.: On the number of positive sums of random variables, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, (1949), 27—36.

[8] ERDŐS, P. — HUNT, G.: Changes of sign of sums of random variables, *Pacific Journal of Math.* **3** (1953), 678—679.

[9] ERDŐS, P. — KAC, M.: On certain limit theorems of the theory of probability, *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946), 292—302.

[10] RÉNYI, A.: On the theory of order statistics, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **4** (1953), 199—231.

[11] RÉNYI, A.: On the theorem of Borel and the law of the iterated logarithm, *Matematisk Tidsskrift.* B (1948), 41—48.

[12] ERDŐS, P. — TAYLOR, S. J.: Some problems concerning the structure of random walk paths, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, és Some intersection properties of random walk paths, *uo.*, *sajtó alatt.*

[13] JANKO, J.: *Statistické tabulky*, Praha, 1958. 246. o.

[14] FELLER, W.: The numbers of zeros and of changes of sign in a symmetric random walk. *L'Enseignement mathématique* **3** (1957), 229—235.

[15] SPARRE ANDERSEN, E.: On sums of symmetrically dependent random variables, *Skandinavisk Aktuarietidskrift* **36** (1953), 123—138.

[16] SPARRE ANDERSEN, E.: On the fluctuations of sums of random variables, I., *Mathematica Skandinavica* **1** (1953), 263—285.; II. *uo.* **2** (1954), 193—223.

[17] SPITZER, F.: A combinatorial lemma and its application to probability theory, *Transactions of the American Mathematical Society* **82** (1956), 323—339.

[18] CHUNG, K. L. — FELLER, W.: On fluctuations in coin-tossing, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **35** (1949), 605—608.

[19] FELLER, W.: *An Introduction to Probability Theory and its Applications,* Vol. I. 2nd edition Wiley, New York, 1957.

[20] LIPSCHUTZ, MIRIAM: Generalization of a theorem of Chung and Feller, *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952), 659—670.

(Beérkezett: 1960. III. 30.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete.