EGY ÁLTALÁNOS MÓDSZER VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI TÉTELEK BIZONYÍTÁSÁRA ÉS ANNAK NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

Írta: RÉNYI ALFRÉD

Jordan Károly emlékének ajánlva

1. §. Bevezetés

Számos azonosság és egyenlőtlenség ismeretes tetszőleges események valószínűségei között. Olyan egyenlőtlenségekre gondolok, amelyek teljes általánosságban érvényesek, függetlenül attól, hogy a szóban forgó események között milyen függőség áll fenn. Az ilyen tételek gazdag gyűjteményét tartalmazza M. FRÉCHET kétkötetes munkája [1]. A legismertebb a szóban forgó típusba tartozó tétel az ún. *Poincaré-tétel*, amely a következőképpen szól: Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges események, legyen

$$(1.1)\quad S_0 = 1 \quad \text{és} \quad S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) \quad \text{ha} \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

ahol az összegezés az $1, 2, \ldots, n$ számokból kiválasztható összes lehetséges $\left(\text{tehát } \binom{n}{k} \text{ számú}\right)$ $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ k-adrendű kombinációra terjesztendő ki. Akkor

$$(1.2)\quad \mathbf{P}(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k.$$

(Itt és a következőkben események szorzata azt az eseményt jelöli, hogy a szorzat tényezőit alkotó események együttesen bekövetkeznek, $\bar{A}$ az A esemény ellentétét és $\mathbf{P}(A)$ az A esemény valószínűségét jelöli.)

Az (1.2) képletet szokás „szitaformulának" is nevezni, tekintettel a számelméletben használatos „szitálási" eljárással való összefüggésére. Az (1.2) képlet (ill. a szitaformula) tulajdonképpen kombinatorikai, ill. logikai jellegű (l. pl. [2]). A megfelelő kombinatorikai formula a következőképpen hangzik: legyen H egy tetszőleges véges halmaz és legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges tulajdonságok, amelyekkel H elemei bírhatnak. A H halmaz összes elemeinek számát jelölje N_H és a H halmaz azon elemeinek számát, amelyek az A tulajdonsággal bírnak, jelöljük $N_H(A)$-val. Jelölje két vagy több tulajdonság szorzata azt a tulajdonságot, hogy valami a szorzat tényezőiként szereplő tulajdonságok mindegyikével rendelkezik. Jelölje továbbá $\bar{A}$ az A tulajdonsággal ellentétes tulajdonságot. Legyen

$$(1.1\text{a})\quad \mathbf{S}_0 = N_H \quad \text{és} \quad \mathbf{S}_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} N_H(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}),$$

ahol az összegezés megint csak az $1, 2, \ldots, n$ számok közül kiválasztható összes $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ k-adrendű kombinációra terjesztendő ki. Akkor

$$(1.2a) \qquad N_H(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathbf{S}_k.$$

Szavakban kifejezve: a H halmaz azon elemeinek a számát, amelyek az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tulajdonságok egyikével sem rendelkeznek, úgy kaphatjuk meg, hogy H összes elemeinek számából rendre levonjuk azon elemek számát, amelyek az A_1, az $A_2, \ldots,$ az A_n tulajdonságokkal bírnak, ezután rendre hozzáadjuk azon elemek számát, amelyek a szóban forgó tulajdonságok közül két tetszőlegesen választott tulajdonsággal rendelkeznek, majd levonjuk azon elemek számát, amelyek a szóban forgó tulajdonságok közül három tetszőlegesen kiválasztott tulajdonsággal bírnak, s. í. t. Az (1. 2a) képlet az (1. 2) képlet speciális esete, amelyet akkor nyerünk, ha a szóban forgó valószínűségi mező véges sok elemi eseményt tartalmaz és ezek mind egyenlő valószínűséggel bírnak (vagyis, ha az (1. 2) képletet, amely tetszőleges valószínűségi mezőben érvényes, az ún. klasszikus valószínűségi mezőkre (l. [3]) alkalmazzuk).

Ismeretesek továbbá a következő egyenlőtlenségek is:

$$(1.3) \qquad \mathbf{P}(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n) \leqq \sum_{k=0}^{2s} (-1)^k S_k \quad \text{ha} \quad 0 \leqq 2s \leqq n$$

és

$$(1.4) \qquad \mathbf{P}(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n) \geqq \sum_{k=0}^{2s+1} (-1)^k S_k \quad \text{ha} \quad 1 \leqq 2s+1 \leqq n.$$

Más szóval, ha (1. 2) jobboldalán az összegezést nem folytatjuk n-ig, hanem előbb megállunk, akkor az összeg értéke nem kisebb, ill. nem nagyobb a baloldalon álló valószínűségnél, aszerint, hogy páros, illetve páratlan indexű tagnál állunk meg. (Hasonló állítás érvényes természetesen (1. 2a)-ra vonatkozólag is, lévén (1. 2a) az (1. 2) azonosság speciális esete.)

JORDAN KÁROLYtól [4] származik a *Poincaré-tétel* következő nevezetes és gyakran használt általánosítása: Jelölje B_r azt az eseményt, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül pontosan r számú esemény következik be $(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$, akkor

$$(1.5) \qquad \mathbf{P}(B_r) = \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{k+r}{r} S_{k+r}.$$

(1. 5) a *Poincaré-tétel* általánosításának tekinthető, mivel az $r = 0$ esetben (1. 5) megegyezik (1. 2)-vel. Az (1. 5) formula az irodalomban *Jordan Károly formulája* néven ismeretes.

Ismeretes az (1.5) formula következő inverziója is:

$$S_r = \sum_{k=r}^{n} \mathbf{P}(B_k)\binom{k}{r} \qquad (r=0,1,\ldots,n). \tag{1.6}$$

Az (1.6) formula felfogható mint az (1.5) egyenletrendszer megoldása az S_r ismeretlenekre, és megfordítva: (1.5) tekinthető az (1.6) egyenletrendszer megoldásának a $\mathbf{P}(B_r)$ ismeretlenekre.

Érvényesek továbbá a következő egyenlőtlenségek is:

$$\mathbf{P}(B_r) \leqq \sum_{k=0}^{2s} (-1)^k \binom{k+r}{r} S_{k+r} \quad \text{ha} \quad 0 \leqq 2s \leqq n-r \tag{1.7}$$

és

$$\mathbf{P}(B_r) \geqq \sum_{k=0}^{2s+1} (-1)^k \binom{k+r}{r} S_{k+r} \quad \text{ha} \quad 1 \leqq 2s+1 \leqq n-r. \tag{1.8}$$

Az (1.7) és (1.8) egyenlőtlenségek ugyanúgy viszonylanak JORDAN KÁROLY (1.5) formulájához, mint az (1.3) és (1.4) egyenlőtlenségek az (1.2) *Poincaré*-formulához. Meglepő, hogy ennek ellenére a szakkönyvek az (1.7)—(1.8) formulákat nem említik.

A felsoroltakhoz hasonló jellegűek például a következő, M. FRÉCHET-től származó egyenlőtlenségek:

$$\frac{S_{r+1}}{\binom{n}{r+1}} \leqq \frac{S_r}{\binom{n}{r}} \qquad (r=0,1,\ldots,n-1), \tag{1.9}$$

továbbá a következő, GUMBELtől származó egyenlőtlenségek:

$$\frac{\binom{n}{r+1} - S_{r+1}}{\binom{n-1}{r}} \leqq \frac{\binom{n}{r} - S_r}{\binom{n-1}{r-1}} \qquad (r=1,2,\ldots,n-1). \tag{1.10}$$

JORDAN KÁROLYtól származik továbbá a következő azonosság is:

$$\mathbf{P}(B_r + B_{r+1} + \cdots + B_n) = \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{k+r-1}{k} S_{k+r}. \tag{1.11}$$

Itt és a következőkben események összegén azt az eseményt értjük, hogy az összeg tagjaiként szereplő események közül legalább egy bekövetkezik. (1.11) bal oldalán tehát annak a valószínűsége áll, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül legalább r következik be. Az (1. 11) formulák invertálásával adódik az

$$S_r = \sum_{k=r}^{n} \mathbf{P}(B_k + \cdots + B_n)\binom{k-1}{r-1} \tag{1.12}$$

képlet.

Még sok más, a felsoroltakhoz hasonló azonosság és egyenlőtlenség ismeretes. Ezek felsorolásától itt eltekintek, hiszen az érdeklődő ezeket FRÉCHET említett könyvében megtalálhatja. E dolgozat célja egy általános tétel bebizonyítása, amelynek segítségével a szóban forgó típusú azonosságok és egyenlőtlenségek egységes módszerrel rendkívül egyszerűen igazolhatók. E tételt, amelyet néhány évvel ezelőtt találtam (l. [5]), a 2. § tartalmazza. A 3. § egy gráfelméleti segédtételt tartalmaz, amely önmagában is bizonyos érdeklődésre tarthat számot. A 4. §-ban a 2. §-ban ismertetett módszer és a 3. § gráfelméleti tétele segítségével egy újabb, a vizsgált típusba tartozó egyenlőtlenséget bizonyítunk be, amely a számelméletből jól ismert *Brun*-féle szita-módszerhez hasonló. Végül az 5. §-ban a 4. § tételének egy alkalmazásaként egy ERDŐS PÁL által felvetett, véletlen részhalmazokra vonatkozó probléma megoldását adjuk meg.

Köszönettel tartozom BOGNÁR KATALINnak e dolgozat átnézése során tett megjegyzéseiért.

2. §. Egy általános módszer valószínűségszámítási azonosságok és egyenlőtlenségek bizonyítására

Legyen $\mathfrak{A}$ egy tetszőleges eseményalgebra. Mint ismeretes, egy eseményalgebra kétféleképpen is felfogható: vagy mint egy absztrakt *Boole-algebra*, vagy mint ezen *Boole-algebra* halmaztesttel való realizálása. Az e §-ban tárgyalt kérdéseknél nem jelent előnyt az eseményalgebrák halmaztesttel való realizálása, ezért azt tesszük csak fel, hogy $\mathfrak{A}$ *Boole-algebra*. Ilyen módon tehát $\mathfrak{A}$ elemeire — amelyeket eseményeknek nevezünk, és nagy nyomtatott betűkkel jelölünk — értelmezve van két művelet: a szorzás és összeadás, továbbá minden A eseménnyel együtt $\mathfrak{A}$ tartalmaz egy másik $\bar{A}$ eseményt (amelyet A ellentétének nevezünk), továbbá, hogy $\mathfrak{A}$ tartalmaz két kitüntetett eseményt, amelyeket $\mathbf{O}$-val, ill. $\mathbf{I}$-vel jelölünk (és a lehetetlen, ill. a bizonyos eseményeknek nevezzük) és érvényesek a következő műveleti szabályok:*

* Az alábbi felsorolás azokat az alapvető műveleti szabályokat tartalmazza, amelyekre a *Boole-algebrák*ban végzett műveletek során a legtöbbször szükség van. Mint ismeretes, ezen szabályok közül egyesek a többiből levezethetők, pl. a 2. 1., 3. 1., 3. 2., 4. 1., 5. 1. és 6. 1. relációkból az összes többi levezethető; ezek tehát egy lehetséges axiómarendszerét alkotják a *Boole*-féle algebráknak. Lásd pl. [6].

1.1. $A+B=B+A$	2.1. $AB=BA$	3.1. $A+\overline{A}=\mathbf{I}$
1.2. $A+A=A$	2.2. $AA=A$	3.2. $A\overline{A}=\mathbf{0}$
1.3. $A+(B+C)=(A+B)+C$	2.3. $A(BC)=(AB)C$	3.3. $A=A$
4.1. $A+\mathbf{0}=A$	5.1. $A\mathbf{I}=A$	6.1. $A(B+C)=AB+AC$
4.2. $A\mathbf{0}=\mathbf{0}$	5.2. $A+\mathbf{I}=\mathbf{I}$	6.2. $A+BC=(A+B)(A+C)$

7.1. $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$

7.2. $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

(A felsorolt szabályokban A, B, C az $\mathcal{A}$ *Boole-algebra* tetszőleges elemei.)

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ az $\mathcal{A}$ *Boole-algebra* változó elemei; $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tehát egymástól függetlenül végigfutnak $\mathcal{A}$ összes elemein. Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események egy $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ n-változós *elemi függvény*én egy olyan függvényt értünk, amely az $\mathcal{A}$-ból tetszőlegesen választott $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekhez hozzárendeli $\mathcal{A}$ egy meghatározott elemét, amely az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekből kiindulva a *Boole-algebra* véges számú művelete segítségével fejezhető ki. Más szóval, olyan függvényeket nevezünk eleminek, amelyeknek minden változójának értelmezési tartománya az $\mathcal{A}$ *Boole-algebra*, értékkészlete ugyancsak az $\mathcal{A}$ *Boole-algebra*, és amely kifejezhető olyan képlettel, amelyben csak a szorzás, az összeadás és a felülvonás műveletek fordulnak elő véges számban.*

Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}$ *Boole-algebra* elemein értelmezve van egy $\mathbf{P}(A)$ (számértékű) függvény, amely eleget tesz a következő feltevéseknek:

I. $\mathbf{P}(A) \geqq 0$ minden $A \in \mathcal{A}$-ra,

II. $\mathbf{P}(\mathbf{I})=1$,

III. $\mathbf{P}(A+B)+\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)$ ha $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$.

A $\mathbf{P}(A)$ függvény értékét az A esemény valószínűségének nevezzük. Egy olyan *Boole-algebrát*, amelyen az I., II., III. feltevéseknek eleget tevő $\mathbf{P}(A)$ függvény van megadva, *valószínűségi algebrá*nak nevezzük. Magát a $\mathbf{P}(A)$ függvényt az $\mathcal{A}$ *Boole-algebrán* értelmezett valószínűségeloszlásnak nevezzük. Az I., II. és III. feltevésekből könnyen következik, hogy

$$\mathbf{P}(\mathbf{0})=0 \tag{2.1}$$

és

$$\text{ha } AB=\mathbf{0}, \text{ akkor } \mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B) \tag{2.2}$$

* Könnyen belátható 7. 1., ill. 7. 2. segítségével, hogy minden ilyen függvény kifejezhető csak az összeadás és a felülvonás, vagy csak a szorzás és a felülvonás segítségével.

és általában,* ha $A_i A_j = 0$ midőn $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, akkor

$$\mathbf{P}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \cdots + \mathbf{P}(A_n). \tag{2.2a}$$

Mos bebizonyitjuk a következő tételeket:

1. TÉTEL. *Legyen* $\mathfrak{A}$ *egy valószínűségi algebra, legyenek*

$$F_1 = f_1(A_1, A_2, \ldots, A_n), F_2 = f_2(A_1, A_2, \ldots, A_n), \ldots, F_N = f_N(A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

tetszőleges, $\mathfrak{A}$*-n értelmezett n-változós elemi függvények,* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ *megadott valós számok. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy akárhogyan is választva* $\mathfrak{A}$*-ban az* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *eseményeket, mindig fennálljon a*

$$\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h) \geqq 0 \tag{2.3}$$

egyenlőtlenség, az, hogy (2. 3) *teljesüljön azokban az esetekben, amikor az* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *események mindegyike vagy* **I***-vel vagy* **O***-val egyenlő.*

1. Megjegyzés. Az 1. tétel szerint tehát ahhoz, hogy igazoljuk (2. 3) fennállását az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események bármely választására, elegendő verifikálni (2. 3)-at abban a 2^n speciális esetben, amikor az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül egyeseket **I**-nek, a többit pedig **O**-nak választjuk. A tétel állításából az is következik, hogy amennyiben a (2. 3) egyenlőtlenség egy valószínűségi algebrában igaz, akkor minden más valószínűségi algebrában is igaz; ez abból következik, hogy minden valószínűségi algebrában $\mathbf{P}(\mathbf{I}) = 1$ és $\mathbf{P}(\mathbf{O}) = 0$.

2. Megjegyzés. Nyilvánvalóan nem jelenti az általánosság megszorítását, hogy a (2. 3)-ban szereplő $F_1, F_2, \ldots, F_N$ elemi eseményfüggvényekről feltettük, hogy mind n-változósak, hiszen pl. az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ $(k < n)$ események egy k-változós függvénye mindig felfogható mint az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményváltozók olyan függvénye, amely az $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n$ eseményváltozóktól nem függ. Nem jelenti az általánosság megszorítását az sem, hogy csak homogén egyenlőtlenségekre vonatkozik a tétel. Egy $\alpha_0 + \sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h) \geqq 0$ alakú inhomogén egyenlőtlenség is felfogható ugyanis homogén egyenlőtlenségként; ehhez csak az szükséges, hogy egy olyan F_0 elemi függvényét válasszuk meg az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményeknek, amelyre azonosan (azaz az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események minden választása mellett) $\mathbf{P}(F_0) = 1$; akkor a szóban forgó inhomogén egyenlőtlenség a $\sum_{h=0}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h) \geqq 0$ homogén egyenlőt-

* A 1. 3. és 1. 1., ill. 2. 3. és 2. 1. szabályok figyelembevételével többtagú összegek és többtényezős szorzatok zárójelek nélkül írhatók fel.

lenség alakjában írható fel. Ilyen F_0 függvényt pedig könnyű találni: ilyen például $F_0 = A_1 + \bar{A}_1$.

Az 1. tétel bizonyítása. Legyen $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ az $1, 2, \ldots, n$ elemekből alkotott tetszőleges k-adrendű kombináció, $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ és legyenek $j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}$ az $1, 2, \ldots, n$ számok közül azok, amelyek nem szerepelnek az $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ kombinációban. Képezzük az

(2.4) $$A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k} \bar{A}_{j_1} \bar{A}_{j_2} \cdots \bar{A}_{j_{n-k}}$$

szorzatokat. Nyilván összesen 2^n különböző (2.4) alakú szorzat képezhető. Rendezzük ezeket el tetszőleges módon egy sorozatba, és jelöljük $E_1, E_2, \ldots, E_{2^n}$-nel. (Például legyen l előállítása a 2-es számrendszerben $l = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 2^2\varepsilon_3 + \cdots + 2^{n-1}\varepsilon_n$ $(0 \leq l < 2^n)$, ahol tehát az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ „jegyek" mindegyike 0 vagy 1 és jelölje E_{l+1} azt a (2.4) alakú szorzatot, amelyben $i_1, i_2, \ldots, i_k$ azokat az i számokat jelölik, amelyekre $\varepsilon_i = 1$, és így $j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}$ azok a j számok, amelyekre $\varepsilon_j = 0$.) Nyilvánvaló továbbá, hogy az E_l eseményekre igaz a következő állítás:

(2.5) $$E_l E_m = \mathbf{0} \quad \text{ha} \quad l \neq m.$$

Az E_l eseményeket felfoghatjuk az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményváltozók e em függvényeiként.

Könnyen belátható, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményváltozók minden $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ elemi függvényéhez hozzárendelhető egyértelműen az $1, 2, \ldots, 2^n$ számok egy Φ részhalmaza oly módon, hogy

(2.6) $$f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \sum_{l \in \Phi} E_l.$$

A (2.6) előállítást a matematikai logikában használatos kifejezéssel élve (lásd pl. [7]) az $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ függvény *diszjunktív normálalak*jának nevezhetjük Azt, hogy minden n változós elemi függvény a (2.6) alakban előállítható, pontosan ugyanúgy lehet belátni, mint ahogy az állításkalkulusban az állítások diszjunktív normálalakban való előállíthatóságát bizonyítják (lásd pl. [7]); a két tétel tulajdonképpen azonos egymással, ezért ezt itt csak vázoljuk.

a) A 6.1. reláció (disztributív törvény) segítségével az $f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ elemi függvényt kifejező képletben szereplő zárójelek kiküszöbölhetők.

b) A 7.1. és 7.2. relációk segítségével elérhetjük, hogy csak egyes eseményváltozók (nem pedig egész kifejezések) felett áll felülvonás.

c) 3.2. és 4.1. szerint egy összeg olyan szorzat-tagjai, amelyekben A_k és $\bar{A}_k$ mindketten előfordulnak, elhagyhatók.

d) 1.2. miatt egy összeg azonos tagjai összevonhatók.

e) Ha egy tagban sem az A_k sem az $\bar{A}_k$ tényező nem szerepel, 3.1 és 5.1 szerint e tagot beszorozva $(A_k + \bar{A}_k)$-sal, az nem változik meg; a szorzást 6.1 szerint elvégezve az eredeti egy tag helyett kettőt kapunk, amelyek közül az egyikben A_k a másikban $\bar{A}_k$ szerepel tényezőként.

Ilyen módon az összes lehetséges n-változós elemi függvények száma 2^{2^n}-nel egyenlő.

Az 1. tétel állításában szereplő $F_h = f_h(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ elemi függvények mindegyikéhez tehát hozzárendelhető egyértelműen az $1, 2, \ldots, 2^n$ számok egy Φ_h részhalmaza ($h = 1, 2, \ldots, N$) oly módon, hogy

$$F_h = f_h(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \sum_{l \in \Phi_h} E_l. \tag{2.7}$$

Ennélfogva, figyelembe véve (2.5)-öt és (2.2a)-t

$$\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h) = \sum_{l=1}^{2^n} \mathbf{P}(E_l)\beta_l, \tag{2.8}$$

ahol

$$\beta_l = \sum_{l \in \Phi_h} \alpha_h. \tag{2.9}$$

Mármost, ha $A_{i_1} = A_{i_2} = \cdots = A_{i_k} = \mathbf{I}$ és $A_{j_1} = A_{j_2} = \cdots = A_{j_{n-k}} = \mathbf{O}$ és $E_l = A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k} \bar{A}_{j_1} \bar{A}_{j_2} \ldots \bar{A}_{j_{n-k}}$, akkor $E_l = \mathbf{I}$ és minden $m \neq l$-re $E_m = \mathbf{O}$, tehát ebben az esetben

$$\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h) = \beta_l. \tag{2.10}$$

Ha tehát (2.3) fennáll az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események minden olyan választása mellett, amikor az A_i események mindegyike $\mathbf{I}$ vagy $\mathbf{O}$, akkor szükségképpen $\beta_l \geqq 0$, l minden értékére. De akkor (2.8) miatt (2.3) fennáll az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események *tetszőleges* választása mellett. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

Az 1. tételből könnyen adódik a következő

KOROLLÁRIUM. *Legyen $\mathcal{A}$ egy valószínűségi algebra, $F_1 = f_1(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, $F_2 = f_2(A_1, A_2, \ldots, A_n), \ldots, F_n = f_n(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ $\mathcal{A}$-n értelmezett elemi függvények, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ valós számok. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események minden választása mellett fennálljon a*

$$\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h) = 0 \tag{2.11}$$

összefüggés, az, hogy (2.11) *fennálljon az* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *események minden olyan választása mellett, amikor mindegyik* A_i *vagy* $\mathbf{I}$, *vagy* $\mathbf{O}$.

A korollárium bizonyítása. Ha (2. 11) fennáll, valahányszor mindegyik A_i vagy **I**, vagy **0**, akkor ezen esetekben egyszerre teljesülnek a

$$\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h) \geqq 0 \tag{2. 12}$$

és a

$$\sum_{h=1}^{N} (-\alpha_h) \mathbf{P}(F_h) \geqq 0 \tag{2. 13}$$

egyenlőtlenségek, és így az 1. tétel szerint a (2. 12) és (2. 13) egyenlőtlenségek az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események minden választása mellett fennállnak, tehát (2. 11) is fennáll az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események minden választása mellett.

Az 1. tétel, illetve annak korolláriuma alkalmazásaként nézzük meg, hogyan bizonyítható be pl. JORDAN KÁROLY (1. 5) formulája. Az 1. tétel korolláriuma szerint elegendő (1. 3)-at arra az esetre igazolni, ha mindegyik A_i vagy az **I**, vagy az **0** esemény. Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül m számú **I**-vel, a többi $n-m$ **0**-val egyenlő, akkor $S_k = \binom{m}{k}$ és így (1. 3) a következő nyilvánvaló azonosságra redukálódik:

$$\sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k \binom{k+r}{r} \binom{m}{k+r} = \binom{m}{r} \sum_{k=0}^{m-r} (-1)^k \binom{m-r}{k} = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad r = m \\ 0 & \text{ha} \quad r \neq m. \end{cases} \tag{2. 14}$$

Az (1. 3) ill. (1. 4) egyenlőtlenségek igazolásához elegendő kimutatni, hogy

$$\sum_{k=0}^{2r} (-1)^k \binom{m}{k} \geqq 0, \tag{2. 15a}$$

illetve, hogy

$$\sum_{k=0}^{2r+1} (-1)^k \binom{m}{k} \leqq 0. \tag{2. 15b}$$

A (2. 15a) és (2. 15b) egyenlőtlenségek leolvashatók a

$$\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{m}{k} = (-1)^s \binom{m-1}{s} \tag{2. 16}$$

azonosságból.

Az (1. 7) és (1. 8) egyenlőtlenségek igazolására elegendő a következő egyenlőtlenségeket belátni:

$$\sum_{k=0}^{2s} (-1)^k \binom{k+r}{r} \binom{m}{k+r} \geqq \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad m \neq r \\ 1, & \text{ha} \quad m = r \end{cases} \tag{2. 17}$$

$$\sum_{k=0}^{2s+1} (-1)^k \binom{k+r}{r} \binom{m}{k+r} \leqq \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad m \neq r \\ 1, & \text{ha} \quad m = r. \end{cases} \tag{2. 18}$$

Ezek az egyenlőtlenségek azonban leolvashatók a következő azonosságból:

$$\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{k+r}{r}\binom{m}{k+r}=\begin{cases}0 & \text{, ha } m<r\\ 1 & \text{, ha } m=r\\ (-1)^l\binom{m}{r}\binom{m-r-1}{l}, & \text{ha } m>r.\end{cases} \tag{2.19}$$

Hasonlóképpen az (1.9) *Fréchet*-féle egyenlőtlenség bebizonyításában elegendő az 1. tétel szerint a

$$\frac{\binom{m}{r+1}}{\binom{n}{r+1}}\leqq\frac{\binom{m}{r}}{\binom{n}{r}} \quad \text{ha} \quad 0\leqq m\leqq n \tag{2.20}$$

egyenlőtlenséget verifikálni, ami viszont könnyen elvégezhető. A többi felsorolt és számos más, itt fel nem sorolt azonosság, ill. egyenlőtlenség az 1. tétel, ill. annak korolláriuma segítségével hasonló egyszerűen bizonyítható be.

3. §. Egy gráfelméleti segédtétel

Legyen H egy véges halmaz, H^2 jelölje a H halmaz különböző elemeiből álló összes rendezetlen elempárok halmazát (az (a, b) és (b, a) elempárokat tehát nem különböztetjük meg). Ha A egy tetszőleges halmaz, jelölje N_A az A halmaz elemeinek számát. Ha tehát $N_H=n$, akkor $N_{H^2}=\binom{n}{2}$. Legyen E a H^2 halmaz egy tetszőleges részhalmaza; az E halmaz elemei tehát a H halmaz elemeiből képezett bizonyos elempárok. A $G=(H, E)$ halmazpárt (véges) *gráf*nak nevezzük; a H halmaz elemeit a gráf *szögpont*jainak, az E halmaz elemeit pedig a gráf *él*einek nevezzük. Ha V_i és V_j a G gráf szögpontjai és (V_i, V_j) a G gráf éle, azt mondjuk, hogy a V_i és V_j szögpontokat G-ben él köti össze; a (V_i, V_j) élt egyaránt nevezzük V_i-ből, ill. V_j-ből kiinduló, ill. ezen szögpontokba érkező élnek.

Ha $G=(H, E)$, legyen $N_G=N_H$ és $M_G=N_E$. Vagyis N_G a G gráf szögpontjainak számát és M_G a G gráf éleinek számát jelöli.

Legyen $G=(H, E)$ egy gráf, és h legyen a H halmaz egy részhalmaza. A hG gráfot a következőképpen definiáljuk: $hG=(h, h^2E)$, vagyis a hG gráf a G gráf azon szögpontjaiból áll, amelyek h-hoz tartoznak, és G azon éleiből, melyek két h-hoz tartozó szögpontot kötnek össze. Ha $M_{hG}=j$, azt mondjuk, hogy a h halmaz a G gráfnak j élét tartalmazza. Legyen $G=(H, E$

egy tetszőleges véges gráf. Legyen

$$N_G(j,k)=\sum_{\substack{h\subset H\\ N_h=k\\ M_{hG}\leq j}} 1, \tag{3. 1}$$

vagyis $N_G(j,k)$ jelölje H azon k elemű részhalmazainak a számát, amelyek G-nek legfeljebb j élét tartalmazzák. Az üres halmazt itt 0-elemű (tehát páros elemszámú) részhalmaznak tekintjük, tehát minden G gráfra és minden $j\geqq 0$-ra

$$N_G(j,0)=1.$$

Legyen továbbá

$$N_G^{(1)}(j,2k+1)=\sum_{l=0}^{k} N_G(j,2l+1) \tag{3. 2}$$

és

$$N_G^{(0)}(j,2k)=\sum_{l=0}^{k} N_G(j,2l). \tag{3. 3}$$

Vagyis $N_G^{(1)}(j,m)$, ill. $N_G^{(0)}(j,m)$ H azon páratlan, ill. páros, de legfeljebb m számú elemből álló részhalmazainak számát jelöli, amelyek G-nek legfeljebb j élét tartalmazzák. Legyen továbbá bármely nemnegatív egész k és l számra

$$\delta_{kl}=\begin{cases}1 & \text{ha} \quad k=l\\ 0 & \text{ha} \quad k\neq l.\end{cases} \tag{3. 4}$$

Bebizonyítjuk a következő tételt:

2. TÉTEL. *Legyen $G=(H,E)$ tetszőleges véges gráf, és $n=N_G$, akkor k minden nemnegatív egész értékére fennállnak az*

$$N_G^{(0)}(1,2k+2)-\delta_{n0}\geqq N_G^{(1)}(0,2k+1) \tag{3. 5}$$

és az

$$N_G^{(1)}(1,2k+1)\geqq N_G^{(0)}(0,2k)-\delta_{n0} \tag{3. 6}$$

egyenlőtlenségek.

Megjegyzés. Abban a speciális esetben, ha G egyetlen egy élt sem tartalmaz, (3. 5) és (3. 6) a (2. 15a), ill. (2. 15b) egyenlőtlenségekre redukálódik; ha emellett $2k\geqq n$, akkor (3. 5) és (3. 6) együtt azt a jól ismert tényt fejezik ki, hogy minden nem üres véges halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van mint páratlan elemszámú részhalmaza.

A 2. tétel bizonyítása. A 2. tételt a H halmaz elemeinek számára vonatkozó teljes indukcióval fogjuk bizonyítani, mégpedig mindkét ((3. 5) és (3. 6)) egyenlőtlenséget együtt. Először konstatáljuk, hogy ha $n=N_G=0$, akkor (3. 5) és (3. 6) fennállnak. Valóban, ez esetben (3. 5) és (3. 6) mindkét oldalán 0 áll. Tegyük most fel, hogy (3. 5) és (3. 6) minden n szögpontú gráfra teljesülnek, és legyen G egy tetszőleges $n+1$ szögpontú gráf. A G gráf szögpontjai legyenek $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$. Legyen H' a $V_1, V_2, \ldots, V_n$ elemekből álló halmaz, és legyen $G' = H'G$. Legyen H'' a H halmaz azon elemeinek halmaza, amelyeket G-ben V_{n+1}-gyel él köt össze, és legyen $G'' = H''G$. Legyen továbbá $G''' = H'''G$, ahol H''' H azon elemeiből áll, amelyek G-ben V_{n+1}-gyel nincsenek éllel összekötve.

Vizsgáljuk meg először az $N_G^{(0)}(1, 2k+2)$ mennyiséget. Könnyen belátható, hogy

$$N_G^{(0)}(1, 2k+2) = N_{G'}^{(0)}(1, 2k+2) + N_{G'''}^{(1)}(1, 2k+1) + \Delta^{(1)}, \tag{3. 7}$$

ahol $\Delta^{(1)}$ H' azon részhalmazainak számát jelöli, amelyek H''-nek pontosan egy elemét tartalmazzák, elemszámuk páratlan és legfeljebb $2k+1$, és nem tartalmazzák G egyetlen élét sem, tehát

$$\Delta^{(1)} = \sum_{\substack{h \subset H' \\ N_h = 2l+1,\ 0 \leqq l \leqq k \\ N_{hH''} = 1 \\ M_{h,G} = 0}} 1 \tag{3. 8}$$

(3. 7) belátásához elegendő figyelembe venni, hogy H részhalmazai, amelyek G-nek legfeljebb egy élét tartalmazzák, három típusba sorolhatók: *a)* olyanok, amelyek V_{n+1}-et nem tartalmazzák, *b)* olyanok, amelyek V_{n+1}-et tartalmazzák, de H'' egyetlen elemét sem, *c)* olyanok, amelyek tartalmazzák V_{n+1}-et és H''-nek pontosan egy elemét. Mármost nyilvánvaló, hogy ha G''' üres, akkor $\Delta^{(1)} \geqq N_{H''}$, tehát általában

$$\Delta^{(1)} \geqq \delta_{N_{G'''},0} \cdot N_{N''}. \tag{3. 9}$$

Másrészt viszont

$$N_G^{(1)}(0, 2k+1) = N_{G'}^{(1)}(0, 2k+1) + N_{G'''}^{(0)}(0, 2k), \tag{3. 10}$$

ugyanis H azon részhalmazai, amelyek G-nek egyetlen élét sem tartalmazzák, két osztályba sorolhatók aszerint, hogy V_{n+1}-et tartalmazzák-e vagy sem; előbbiek V_{n+1} mellett csak H''' elemeiből állhatnak. (3. 7), (3. 9) és (3. 10) szerint

$$\begin{aligned} N_G^{(0)}(1, 2k+2) - N_G^{(1)}(0, 2k+1) \geqq {} & (N_{G'}^{(0)}(1, 2k+2) - N_{G'}^{(1)}(0, 2k+1)) + \\ & + (N_{G'''}^{(1)}(1, 2k+1) - N_{G'''}^{(0)}(0, 2k)) + N_{N''} \delta_{N_{G'''},0}. \end{aligned} \tag{3. 11}$$

Az indukciós feltevés szerint tehát

$$N_G^{(0)}(1, 2k+2) - N_G^{(1)}(0, 2k+1) \geqq \delta_{N_{G'},0} + \delta_{N_{G'''},0}(N_{H''} - 1). \tag{3. 12}$$

Mármost G' vagy üres, akkor $\delta_{N_{G'},0}=1$, $\delta_{N_{G'''},0}=1$ és $N_{H''}=0$, tehát (3. 12) jobb oldalán $1-1=0$ áll; vagy G' nem üres, akkor vagy $N_{G'''}>0$ vagy $N_{G'''}=0$ és $N_{H''}\geqq 1$; az első esetben (3. 12) jobb oldalán 0 áll, a második esetben $N_{H''}-1\geqq 0$, tehát (3. 12) jobb oldala mindenképpen nemnegatív, vagyis (3. 5) teljesül G-re.

Most vizsgáljuk meg (3. 6)-ot. Nyilván

$$N_G^{(1)}(1,2k+1)=N_{G'}^{(1)}(1,2k+1)+N_{G'''}^{(0)}(1,2k)+\Delta^{(0)}, \tag{3.13}$$

ahol

$$\Delta^{(0)}=\sum_{\substack{h\subset H'\\ N_h=2l \quad 0\leqq l\leqq k\\ N_{hH''}=1,\quad M_{hG}=0}} 1 \,. \tag{3.14}$$

Hasonlóképpen, mint előbb,

$$N_G^{(0)}(0,2k)=N_{G'}^{(0)}(0,2k)+N_{G'''}^{(1)}(0,2k-1), \tag{3.15}$$

tehát

$$N_G^{(1)}(1,2k+1)-N_G^{(0)}(0,2k)\geqq \delta_{N_{G'''},0}-\delta_{N_{G'},0}. \tag{3.16}$$

Mármost (3. 16) jobb oldala mindig 0-val egyenlő (ugyanis, ha H' üres, akkor H''' is üres), tehát (3.6) is fennáll. Ezzel a 2. tételt bebizonyítottuk.

4. §. Egy új „szitálási" tétel

A 2. tétel, továbbá az 1. tétel segítségével bebizonyítunk most egy „szitálási" tételt.

Legyen $\mathcal{A}$ egy valószínűségi algebra, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges események. Legyen G egy tetszőleges gráf, amelynek n szögpontja van, amelyeket az $1, 2, \ldots, n$ számokkal számozunk meg. A rövidség kedvéért G szögpontjait azonosítjuk az $1, 2, \ldots, n$ számokkal, ha tehát G-ben az i-edik és j-edik szögpont éllel van összekötve, ezt röviden úgy fejezzük ki, hogy G-ben az i és j számokat él köti össze. Jelölje H az $1, 2, \ldots, n$ számok halmazát. Jelölje $H^{(1)}$ H azon részhalmazainak összességét, amelyek vagy páros számú elemből állnak és nem tartalmazzák G egyetlen élét sem (azaz a szóban forgó részhalmazhoz tartozó számokkal megszámozott szögpontok G-ben nincsenek összekötve), vagy páratlan számú elemből állnak és G-nek legfeljebb egy élét tartalmazzák. Jelölje $H^{(0)}$ H azon részhalmazainak összességét, amelyek vagy páratlan számú elemből állnak, és nem tartalmazzák G egyetlen élét sem, vagy páros számú elemből állnak és G-nek legfeljebb egy élét tartalmazzák.

Legyen

$$S_0^{(1)}=1 \quad \text{és} \quad S_k^{(1)}=\sum_{\substack{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_k\leqq n\\ (i_1,i_2,\ldots,i_k)\in H^{(1)}}} \mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) \quad \text{ha} \quad k=1,2,\ldots,n, \tag{4.1}$$

továbbá

(4.2) $S_0^{(0)} = 1$ és $S_k^{(0)} = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \\ (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in H^{(0)}}} \mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k})$ ha $k = 1, 2, \ldots, n$.

Tehát $S_k^{(1)}$ ill. $S_k^{(0)}$ az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekből képezett azon k-tényezős eseményszorzatok valószínűségeinek összegét jelöli, amely szorzatokban szereplő események indexeiből álló halmaz $H^{(1)}$-be, ill. $H^{(0)}$-ba tartozik. Fennáll mármost a következő tétel, amely az (1.3) és (1.4) egyenlőtlenségek általánosításainak tekinthető.

3. TÉTEL

$$\sum_{k=0}^{2l+1} (-1)^k S_k^{(1)} \leq \mathbf{P}(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n) \leq \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k S_k^{(0)}, \tag{4.3}$$

ha $l = 0, 1, 2, \ldots$.

Bizonyítás. Ahhoz, hogy a 3. tételt bebizonyítsuk, az 1. tétel szerint elegendő megmutatni, hogy a (4.3) alatti egyenlőtlenségek érvényesek abban az esetben, ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események mindegyike vagy $\mathbf{I}$, vagy $\mathbf{O}$. Nézzük előbb a (4.3) alatti felső egyenlőtlenséget. Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események mindegyike legyen azonos $\mathbf{I}$-vel vagy $\mathbf{O}$-val. Jelölje h azon k számok halmazát, amelyekre $A_k = \mathbf{I}$. Ez esetben

$$\sum_{k=0}^{2l} (-1)^k S_k^{(0)} = N_{hG}^{(0)}(1, 2l) - N_{hG}^{(1)}(0, 2l-1).$$

(3.5)-ből tehát következik, hogy (4.3) felső egyenlőtlensége fennáll. Az alsó egyenlőtlenség hasonlóképpen igazolható, ugyanis ha újból h jelöli azon k számok halmazát, amelyekre $A_k = \mathbf{I}$, akkor

$$\sum_{k=0}^{2l+1} (-1)^k S_k^{(1)} = N_{hG}^{(0)}(0, 2l) - N_{hG}^{(1)}(1, 2l+1).$$

Tehát (3.6) szerint a (4.3) alatti alsó egyenlőtlenség teljesül.

5. §. Erdős Pál egy problémájának megoldása

ERDŐS PÁL nemrégiben számelméleti vizsgálataival kapcsolatban a következő kombinatorikai problémát vetette fel: Egy n elemű $\mathcal{H}$ halmazból válasszunk ki találomra m részhalmazt, oly módon, hogy az egyes részhalmazok választásai egymástól függetlenül történjenek és minden választásnál $\mathcal{H}$ bármely részhalmaza ugyanazzal a valószínűséggel (tehát $\frac{1}{2^n}$ valószínűséggel) kerüljön kiválasztásra. Milyen nagyra kell az m számot választani, hogy 1-hez közeli valószínűséggel legyen a kiválasztott m részhalmaz között legalább két olyan, hogy az egyik részhalmaza a másiknak?

A véletlen részhalmazokkal kapcsolatban számos más érdekes probléma is felvethető; ezekkel egy másik dolgozatban rendszeres tárgyalásban kívánunk foglalkozni. Itt most csak ERDŐS PÁL problémájának megoldására szorítkozunk, az előző §-ban bebizonyított 3. tétel alkalmazásaként.

Először néhány lemmát bizonyítunk be.

1. LEMMA. *Legyen $\mathcal{H}$ egy n-elemű halmaz. $\mathcal{H}$ elemeit jelöljék $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Válasszuk ki találomra $\mathcal{H}$ egy h részhalmazát oly módon, hogy mind a 2^n lehetséges részhalmaz ugyanazzal a valószínűséggel kerüljön kiválasztásra. Legyen $\varepsilon_k(h)=1$ vagy $\varepsilon_k(h)=0$ aszerint, hogy a_k benne van-e h-ban vagy nem $(k=1,2,\ldots,n)$. Akkor az $\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h), \ldots, \varepsilon_n(h)$ valószínűségi változók teljesen függetlenek és mindegyik az 1 és 0 értékeket $\frac{1}{2}$ valószínűséggel veszi fel.*

Az 1. lemma bizonyítása. Legyen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ tetszőleges 0-kból és 1-esekből álló sorozat. Akkor nyilván $\mathcal{H}$-nak egyetlen egy olyan h részhalmaza van, amelyre $\varepsilon_j(h)=\delta_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ és így $\mathbf{P}(\varepsilon_1(h)=\delta_1, \varepsilon_2(h)=\delta_2, \ldots, \varepsilon_n(h)=\delta_n)=\frac{1}{2^n}$, amiből a lemma állítása leolvasható.

2. LEMMA. *Legyen $\mathcal{H}$ egy n-elemű halmaz. Válasszuk ki találomra (úgy, hogy $\mathcal{H}$ minden részhalmaza ugyanolyan valószínűséggel kerül kiválasztásra) és egymástól függetlenül $\mathcal{H}$ két részhalmazát: legyenek ezek h_1 és h_2. Annak a valószínűsége, hogy h_1 részhalmaza h_2-nek vagy h_2 részhalmaza h_1-nek,**

$$\mathbf{P}(h_1 \subseteq h_2 \text{ vagy } h_2 \subseteq h_1) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{2^n}.$$

A 2. lemma bizonyítása. Definiáljuk az $\varepsilon_k(h)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ valószínűségi változókat úgy, mint az 1. lemmában. Akkor nyilván az, hogy h_1 részhalmaza h_2-nek, ekvivalens a következő egyenlőtlenségek egyidejű teljesülésével: $\varepsilon_k(h_1) \leqq \varepsilon_k(h_2)$ ha $k=1,2,\ldots,n$. Mivel

$$\mathbf{P}(\varepsilon_k(h_1) \leqq \varepsilon_k(h_2)) = \mathbf{P}(\varepsilon_k(h_2)=1) + \mathbf{P}(\varepsilon_k(h_2)=0, \varepsilon_k(h_1)=0) = \frac{3}{4}$$

és az $\varepsilon_k(h_1) \leqq \varepsilon_k(h_2)$ események $(k=1,2,\ldots,n)$ az 1. lemma, valamint h_1 és h_2 függetlenségének feltevése miatt függetlenek, következik, hogy

$$\mathbf{P}(h_1 \subseteq h_2) = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

* Itt és a következőkben azt, hogy h_1 részhalmaza h_2-nek, úgy jelöljük, hogy $h_1 \subseteq h_2$.

Hasonlóképpen $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ a valószínűsége annak, hogy $h_2 \subseteq h_1$ legyen. Ha $h_1 \subseteq h_2$ és $h_2 \subseteq h_1$, akkor $h_1 = h_2$ és ennek valószínűsége nyilván $\frac{1}{2^n}$. Ebből a lemma állítása (1.2) szerint azonnal következik.

3. LEMMA. *Legyen $\mathcal{H}$ egy n-elemű halmaz. Válasszuk ki találomra és egymástól függetlenül $\mathcal{H}$ három részhalmazát; legyenek ezek h_1, h_2 és h_3. Akkor annak a valószínűsége, hogy a h_1 és h_2 halmazok közül az egyik részhalmaza legyen a másiknak és ugyanakkor a h_1 és h_3 halmazok közül is az egyik részhalmaza legyen a másiknak,*

$$\mathbf{P}((h_1 \subseteq h_2 \text{ vagy } h_2 \subseteq h_1) \text{ és } (h_1 \subseteq h_3 \text{ vagy } h_3 \subseteq h_1)) =$$

$$= 2\left(\left(\frac{5}{8}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) - 4\left(\frac{3}{8}\right)^n + \frac{1}{4^n}.$$

A 3. lemma bizonyítása. A szóban forgó esemény a következő módokon következhet be:

a) $h_1 \subseteq h_2$ és $h_1 \subseteq h_3$,
b) $h_1 \subseteq h_2$ és $h_3 \subseteq h_1$,
c) $h_2 \subseteq h_1$ és $h_1 \subseteq h_3$,
d) $h_2 \subseteq h_1$ és $h_3 \subseteq h_1$.

Az a) lehetőség valószínűsége $\left(\frac{5}{8}\right)^n$-nel egyenlő, ugyanis ahhoz, hogy $h_1 \subseteq h_2$ és $h_1 \subseteq h_3$ legyen, az kell, hogy teljesüljenek az $\varepsilon_j(h_1) \leqq \varepsilon_j(h_2)$ és $\varepsilon_j(h_1) \leqq \varepsilon_j(h_3)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ egyenlőtlenségek. Mármost

$$\mathbf{P}(\varepsilon_j(h_1) \leqq \varepsilon_j(h_2) \text{ és } \varepsilon_j(h_1) \leqq \varepsilon_j(h_3)) = \mathbf{P}(\varepsilon_j(h_1) = 0) +$$

$$+ \mathbf{P}(\varepsilon_j(h_1) = \varepsilon_j(h_2) = \varepsilon_j(h_3) = 1) = \frac{5}{8}.$$

Hasonlóképpen a d) lehetőség valószínűsége is $\left(\frac{5}{8}\right)^n$.

A b) lehetőség valószínűsége $\frac{1}{2^n}$, ugyanis ahhoz, hogy $h_3 \subseteq h_1 \subseteq h_2$ legyen, kell hogy teljesüljenek az $\varepsilon_j(h_3) \leqq \varepsilon_j(h_1) \leqq \varepsilon_j(h_2)$ egyenlőtlenségek és

$$\mathbf{P}(\varepsilon_j(h_3) \leqq \varepsilon_j(h_1) \leqq \varepsilon_j(h_2)) = \mathbf{P}(\varepsilon_j(h_1) = 0,\ \varepsilon_j(h_3) = 0) +$$

$$+ \mathbf{P}(\varepsilon_j(h_1) = 1, \varepsilon_j(h_2) = 1) = \frac{1}{2}.$$

Hasonlóképpen $\frac{1}{2^n}$-nel egyenlő a c) eset valószínűsége is. Mármost az a) és d), valamint a b) és c) lehetőségek egyidejűleg csak akkor következhetnek be, ha $h_1=h_2=h_3$, aminek $\frac{1}{4^n}$ a valószínűsége; az a) és b) lehetőségek, valamint az a) és c) lehetőségek egyidejűleg csak akkor következhetnek be, ha $h_1=h_2\subseteq h_3$, aminek $\left(\frac{3}{8}\right)^n$ a valószínűsége; hasonlóképpen a b) és d), valamint a c) és d) lehetőségek egyidejű bekövetkezésének a valószínűsége is $\left(\frac{3}{8}\right)^n$, az a), b), c) és d) lehetőségek közül bármely három egyidejűleg csak akkor következhet be, ha $h_1=h_2=h_3$; ennélfogva a keresett valószínűség a *Poincaré*-képlet szerint

$$2\left(\frac{5}{8}\right)^n+2\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{4}\right)^n-4\left(\frac{3}{8}\right)^n+4\left(\frac{1}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n=$$

$$=2\left(\frac{5}{8}\right)^n+2\left(\frac{1}{2}\right)^n-4\left(\frac{3}{8}\right)^n+\frac{1}{4^n}.$$

Ezzel a 3. lemmát bebizonyítottuk.

Ezek után rátérhetünk ERDŐS PÁL problémájára. Be fogjuk bizonyítani a következő tételt.

4. TÉTEL: *Legyen $\mathcal{H}$ egy n-elemű halmaz. Válasszuk ki egymástól függetlenül és találomra $\mathcal{H}$-nak $m=m(n)$ darab részhalmazát oly módon, hogy minden választásnál $\mathcal{H}$ minden részhalmaza ugyanakkora $\left(\text{tehát } \frac{1}{2^n}\right)$ valószínűséggel kerüljön kiválasztásra. Jelölje $P_n(m)$ annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott részhalmazok között van legalább két olyan halmaz, hogy az egyik részhalmaza a másiknak. Akkor bármely rögzített $c>0$-ra, ha*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{m(n)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n}=c, \tag{5.1}$$

akkor

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}_n(m(n))=1-e^{-c^2}. \tag{5.2}$$

Bizonyítás. Legyenek a találomra kiválasztott részhalmazok $h_1, h_2, \ldots, h_m$ és jelölje A_{ij} azt az eseményt, hogy vagy $h_i\subseteq h_j$ vagy $h_j\subseteq h_i$. Nyilván

$$\mathbf{P}_n(m)=1-\mathbf{P}\Big(\prod_{1\leq i<j\leq m}\overline{A}_{ij}\Big). \tag{5.3}$$

Az (i,j) $(1\leq i<j\leq m)$ számpárok halmazát jelöljük Q-val. A G gráf szögpontjai legyenek Q összes elemei, és az (i,j) és (k,l) szögpontok legyenek összekötve, ha az i,j,k,l számok nem mind különbözőek (vagyis ha $i=k$,

vagy ha $i=l$, vagy ha $j=k$, vagy ha $j=l$). A 3. tétel szerint fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\text{(5.4)}\qquad \mathbf{P}\Big(\prod_{1\leq i<j\leq m} \bar{A}_{ij}\Big) \leq \sum_{k=0}^{2l+1} (-1)^k S_k^{(0)} \qquad (l=0,1,\ldots)$$

és

$$\text{(5.5)}\qquad \mathbf{P}\Big(\prod_{1\leq i<j\leq m} \bar{A}_{ij}\Big) \geq \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k S_k^{(1)} \qquad (l=0,1,\ldots)$$

(5.4)-ben az $S_k^{(0)}$ számok a következőképpen vannak definiálva:

$$S_0^{(0)}=1 \quad \text{és} \quad S_k^{(0)}=\sum{}^{(0)} \mathbf{P}(A_{i_1j_1}A_{i_2j_2}\cdots A_{i_kj_k}), \quad \text{ha} \quad k=1,2,\ldots,$$

ahol $\sum^{(0)}$ azt jelöli, hogy az összegezés az (i,j) $(1\leq i<j\leq m)$ számpárokból kiválasztható összes olyan k-tagú kombinációra végzendő el, amelyekben az $(i_1,j_1),\ldots,(i_k,j_k)$ számpárok mind idegenek, ha k páratlan, és legfeljebb két számpárnak van egy közös eleme, ha k páros: $S_k^{(1)}$ (5.5)-ben a következőképpen van definiálva:

$$S_0^{(1)}=1 \quad \text{és} \quad S_k^{(1)}=\sum{}^{(1)} \mathbf{P}(A_{i_1j_1}A_{i_2j_2}\cdots A_{i_kj_k}), \quad \text{ha} \quad k=1,2,\ldots,$$

ahol $\sum^{(1)}$ azt jelöli, hogy az összegezés az (i,j) $(1\leq i<j\leq m)$ számpárokból kiválasztható összes olyan k tagú kombinációkra végzendő el, amelyekben az $(i_1,j_1),\ldots,(i_k,j_k)$ számpárok mind idegenek, ha k páros és legfeljebb két számpárnak van egy közös eleme, ha k páratlan.

Mármost a 2. lemma szerint

$$\text{(5.6)}\qquad S_{2r+1}^{(0)}=\frac{\binom{m}{2}\binom{m-2}{2}\cdots\binom{m-2(2r+1)+2}{2}}{(2r+1)!}\left(2\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2^n}\right)^{2r+1}$$

és

$$\text{(5.7)}\qquad S_{2r}^{(1)}=\frac{\binom{m}{2}\binom{m-2}{2}\cdots\binom{m-4r+2}{2}}{(2r)!}\left(2\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2^n}\right)^{2r},$$

ha $r=0,1,\ldots$.

Továbbá

$$\text{(5.8)}\qquad S_{2r}^{(0)}=\frac{\binom{m}{2}\binom{m-2}{2}\cdots\binom{m-4r+2}{2}}{(2r)!}\left(2\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2^n}\right)^{2r}+R_{2r}^{(0)},$$

ahol

$$\text{(5.9)}\qquad R_{2r}^{(0)}=\sum{}^{*} \mathbf{P}(A_{i_1j_1}\cdots A_{i_{2r}j_{2r}}).$$

Itt $\sum^*$ azt jelöli, hogy az összegezés azokra az (i,j) $1\leq i<j\leq m$ szám-

párokból képezett $2r$ tagú kombinációkra terjesztendő ki, amelyek között pontosan kettő van, amelyek nem idegenek. Ennélfogva a 2. és 3. lemma szerint

$$R_{2r}^{(0)}=\frac{m\binom{m-1}{2}\binom{m-3}{2}\cdots\binom{m-4r+5}{2}}{(2r-2)!}\cdot \tag{5.10}$$
$$\cdot\left(2\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2^n}\right)^{2r-2}\left(2\left(\left(\frac{5}{8}\right)^n+\frac{1}{2^n}\right)-4\left(\frac{3}{8}\right)^n+\frac{1}{4^n}\right).$$

Hasonlóképpen

$$S_{2r+1}^{(1)}=\frac{\binom{m}{2}\binom{m-2}{2}\cdots\binom{m-4r}{2}}{(2r+1)!}\left(2\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2^n}\right)^{2r+1}+R_{2r+1}^{(0)}, \tag{5.11}$$

ahol

$$R_{2r+1}^{(0)}=\sum{}^{*}\mathbf{P}(A_{i_1j_1}\cdots A_{i_{2r+1}j_{2r+1}}). \tag{5.12}$$

Itt $\sum^*$ megint azt jelenti, hogy az összegezés azokra az (i, j) $1\leqq i<j\leqq m$ számpárokból képezett $2r+1$ tagú kombinációkra terjesztendő ki, amelyek között pontosan kettő van, amelyek nem idegenek. Ilyen módon a 2. és 3. lemma szerint

$$R_{2r+1}^{(1)}=\frac{m\binom{m-1}{2}\cdots\binom{m-4r+3}{2}}{(2r-1)!}\left(2\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2^n}\right)^{2r-1}\left(2\left(\left(\frac{5}{8}\right)^n+\frac{1}{2^n}\right)-\right. \tag{5.13}$$
$$\left.-4\left(\frac{3}{8}\right)^n+\frac{1}{4^n}\right).$$

Legyen most

$$m(n)\sim c\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n. \tag{5.14}$$

Egyszerű számolással adódik az (5. 6)—(5. 13) képletekből, figyelembe véve, hogy $\dfrac{\frac{5}{8}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{12}<1$, hogy ez esetben

$$S_j^{(0)}=\frac{c^{2j}}{j!}+o(1)\qquad (j=0, 1, \ldots) \tag{5.15}$$

és

$$S_j^{(1)}=\frac{c^{2j}}{j!}+o(1)\qquad (j=0, 1, \ldots), \tag{5.16}$$

ahol $o(1)$ olyan hibatagot jelöl, amely 0-hoz tart, ha $n\to+\infty$.

Ennélfogva az (5. 3)—(5. 5) képletek szerint l minden értékére

$$(5.17) \qquad 1-\sum_{j=0}^{2l}(-1)^j\frac{c^{2j}}{j!} \leqq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \mathbf{P}_n(m(n)) \leqq \overline{\lim}_{n\to+\infty} \mathbf{P}_n(m(n)) \leqq 1-\sum_{j=0}^{2l+1}(-1)^j\frac{c^{2j}}{j!}.$$

Így tehát, figyelembe véve azt, hogy l tetszőleges nagynak választható, kapjuk, hogy

$$(5.18) \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}_n(m(n)) = 1-e^{-c^2}.$$

Ezzel a 4. tételt bebizonyítottuk.

Most még csak azt kívánjuk megvilágítani, hogy miért volt szükség a 4. tétel bizonyításához a 2. tételre, vagyis arra az eljárásra, amit „korlátozott szitálás"-nak nevezhetünk, és miért nem alkalmazhattuk egyszerűen a *Poincaré*-féle formulát (pontosabban az (1. 3) és (1. 4) egyenlőtlenségeket), vagyis a közönséges szitálási eljárást. Vizsgáljuk meg e célból az

$$S_k = \sum \mathbf{P}(A_{i_1j_1}\cdots A_{i_kj_k})$$

összeget, ahol most az összegezés az összes, az (i, j) $(1 \leqq i < j \leqq m)$ számpárokból képezett k-adrendű kombinációkra terjed ki. Az S_k összeg tartalmazza többek között a $\mathbf{P}(A_{i_1j}A_{i_2j}\cdots A_{i_kj})$ tagokat is, ahol $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$; az ilyen tagok száma nyilván

$$\binom{m}{k+1} \sim \frac{c^{k+1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n(k+1)}}{(k+1)!}.$$

Másrészt

$$\mathbf{P}(A_{i_1j}\cdots A_{i_kj}) \geqq \mathbf{P}(\varepsilon_l(h_j)=1,\ l=1,2,\ldots,n) = \frac{1}{2^n},$$

tehát a szóban forgó tagok összege $\left(\frac{2^k}{3^{\frac{k+1}{2}}}\right)^n$ nagyságrendű, és mivel $\frac{2^k}{3^{\frac{k+1}{2}}} > 1$, ha $k \geqq 4$, tehát a szóban forgó „hibatagok" összege minden határon túl nő. Természetesen a $\sum(-1)^j S_j$ összeg minden tagjában fellépő ilyen hibatagok az összeg váltakozó előjelű lévén, végeredményben kiesnek, azonban ennek közvetlen kimutatása rendkívül bonyolult volna. Ezért kellett azt az utat választanunk, hogy a szóban forgó „hibatagokat" a korlátozott szitálás alkalmazásával eleve kiküszöböljük.

A 4. tételből könnyen következik, hogy ha az $m = m(n)$ pozitív egész értékű függvényt úgy választjuk meg, hogy $\lim_{n\to+\infty} \frac{m(n)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n} = 0$ legyen, akkor n

növekedésével 0-hoz tart annak a valószínűsége, hogy találomra kiválasztva az n elemű $\mathcal{H}$ halmaznak $m(n)$ számú részhalmazát, azok között legyen két olyan, hogy az egyik részhalmaza a másiknak; míg ha az $m(n)$ függvényt úgy választjuk meg, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{m(n)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n} = +\infty$$

legyen, akkor a szóbanforgó valószínűség 1-hez konvergál, ha $n \to +\infty$.

A kérdést, amelyre a 4. tétel választ ad, a következőképpen is megfogalmazhatjuk: Az n elemű $\mathcal{H}$ halmazból válasszunk találomra egymástól függetlenül részhalmazokat addig, míg először fordul elő, hogy a kiválasztott részhalmazok között van két olyan, hogy az egyik részhalmaza a másiknak. Jelölje $\nu(n)$ azt, hogy ez hányadik részhalmaz kiválasztása után következik be; határozzuk meg a $\nu(n)$ valószínűségi változó eloszlását, illetve határeloszlását $n \to +\infty$ esetén. Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{P}(\nu(n) \leqq m) = \mathbf{P}_n(m) \tag{5.19}$$

és így a 4. tétel szerint

$$\lim \mathbf{P}\left(\nu(n) \leqq c\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right) = 1 - e^{-c^2}. \tag{5.20}$$

A 4. tétel eredményéből már sejteni lehet, hogy ha az n elemű $\mathcal{H}$ halmazból találomra $m(n)$ részhalmazt választunk, és ha $m(n) = \omega(n)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$, ahol $\omega(n) \to +\infty$, akkor, ha n nagy, nemcsak, hogy 1-hez közeli valószínűséggel lesz a kiválasztott részhalmazok között olyan h_1 és h_2 halmaz-pár, hogy h_1 részhalmaza h_2-nek, hanem nagy valószínűséggel nagyszámú ilyen részhalmaz-pár lesz a kiválasztott $m(n)$ részhalmaz között. A következő tétel megmutatja, hogy ez valóban így van, és egyben megadja, hogy körülbelül hány ilyen részhalmaz-pár lesz.

5. TÉTEL. *Az n elemű $\mathcal{H}$ halmaznak válasszuk ki találomra egymástól függetlenül $m(n)$ részhalmazát oly módon, hogy minden választásnál $\mathcal{H}$ minden részhalmaza ugyanakkora* $\left(\textit{tehát } \frac{1}{2^n}\right)$ *valószínűséggel kerüljön kiválasztásra.*

Legyen

$$m(n) = \omega(n)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n,$$

ahol $\lim\limits_{n\to+\infty} \omega(n) = +\infty$ és $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\omega(n)} = 1$. *Jelöljék* $h_1, h_2, \ldots, h_{m(n)}$ $\mathcal{H}$ *talá-*

lomra kiválasztott részhalmazait és legyen γ_n egyenlő a $h_1, h_2, \ldots, h_{m(n)}$ halmazok között található olyan h_i, h_j halmazpárok számával $(i<j)$, amelyekre h_i részhalmaza h_j-nak vagy h_j részhalmaza h_i-nak. Akkor, ha $0<\varepsilon<1$ tetszőleges

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(|\gamma_n-\omega^2(n)|<\omega(n)^{1+\varepsilon}\right)=1.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon_{ij}=1$, ha h_i részhalmaza h_j-nek, vagy h_j részhalmaza h_i-nek, egyébként legyen $\varepsilon_{ij}=0$. Akkor

$$\gamma_n=\sum\sum_{1\leqq i<j\leqq m} \varepsilon_{ij}.$$

Az ε_{ij} mennyiségek és γ_n természetesen mind valószínűségi változók. Jelöljük $\mathbf{M}(\xi)$-vel egy ξ valószínűségi változó várható értékét és $\mathbf{D}(\xi)$-vel a szórását. Akkor, mivel a 2. lemma szerint $\mathbf{M}(\varepsilon_{ij})=\mathbf{P}(\varepsilon_{ij}=1)=2\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2^n}$, tehát

$$\mathbf{M}(\gamma_n)=\binom{m}{2}\left(2\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2^n}\right)=\omega^2(n)+o(1).$$

Továbbá, mivel ε_{ij} és ε_{kl} függetlenek, ha az i, j, k, l számok mind különbözőek, és a 3. lemma szerint, ha az i, j, k, l számok között van két megegyező, akkor

$$\mathbf{M}(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl})=O\left(\left(\frac{5}{8}\right)^n\right),$$

tehát

$$\mathbf{M}(\gamma_n^2)=\omega^4(n)+\omega^2(n)+o(\omega^2(n)).$$

Ilyen módon

$$\mathbf{D}^2(\gamma_n)=\omega^2(n)+o(\omega^2(n)).$$

Mármost CSEBISEV jólismert egyenlőtlensége szerint bármely ξ valószínűségi változóra

$$\mathbf{P}(|\xi-\mathbf{M}(\xi)|\geqq\lambda\mathbf{D}(\xi))\leqq\frac{1}{\lambda^2}.$$

Ilyen módon az 5. tétel a *Csebisev*-féle egyenlőtlenségből közvetlenül következik.

A nyert eredményekhez két megjegyzést fűzünk.

1. MEGJEGYZÉS. Az 5. tétel szerint, ha $\omega(n)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ részhalmazt választunk ki az n elemű $\mathcal{H}$ halmazból találomra és egymástól függetlenül, akkor „majdnem biztosan" (azaz $n\to+\infty$ esetén 1-hez tartó valószínűséggel) lesz e részhalmazok közt két olyan, hogy az egyik részhalmaza a másiknak, ha $\omega(n)$ tetszőlegesen lassan tart végtelenhez. Érdemes ezt az eredményt összehasonlítani E. SPERNER [8] következő ismert tételével: Legyenek $h_1, h_2, \ldots, h_m$ az n elemű $\mathcal{H}$ halmaz olyan részhalmazai, hogy h_i nem részhalmaza h_j-nek, ha

$i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$. Akkor $m \leq \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$, és ez az egyenlőtlenség nem javítható, tehát $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ adott tulajdonságú részhalmaz valóban megadható (ti. ha vesszük $\mathcal{H}$ összes pontosan $\left[\frac{n}{2}\right]$ elemű részhalmazait, ezek közül egyik sem részhalmaza a másiknak). Vegyük észre, hogy $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]} \sim \frac{2^n}{\sqrt{n\pi}}$, tehát lényegesen nagyobb, mint $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$.

2. MEGJEGYZÉS. Vizsgáljuk most meg a következő kérdést: az n elemű $\mathcal{H}$ halmazból kiválasztva m részhalmazt találomra, jelölje $W_n(m)$ annak a valószínűségét, hogy ezen részhalmazok között legalább kettő idegen. Mit mondhatunk a $W_n(m)$ valószínűségről? A válasz az, hogy $W_n(m)$ hasonlóan viselkedik, mint $\mathbf{P}_n(m)$. Ha ugyanis h_1 és h_2 $\mathcal{H}$ két találomra kiválasztott részhalmaza, akkor

$$\mathbf{P}(h_1 \cap h_2 = 0) = \prod_{j=1}^{n} (1 - \mathbf{P}(\varepsilon_j(h_1) = \varepsilon_j(h_2) = 1)) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

és ezért a 4. tétellel teljesen analóg módon bebizonyítható, hogy ha

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{m(n)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n} = c > 0,$$

akkor

$$\lim_{n \to +\infty} W_n(m) = 1 - e^{-c^2}.$$

Az a módszer, amelyet e dolgozatban ismertettünk, lehetővé teszi még számos más, véletlen halmazokra vonatkozó hasonló tétel bebizonyítását is. Anélkül, hogy a részletekbe belemennénk vagy teljességre törekednénk, megemlítünk itt egy tételt, amely a 4. tétel közvetlen általánosítása.

6. TÉTEL. *Jelölje $\mathbf{P}_n(m, r)$, ahol $r \geq 2$ pozitív egész szám, annak a valószínűségét, hogy az n elemű $\mathcal{H}$ halmazból találomra választva m részhalmazt, amelyeket jelöljenek $h_1, h_2, \ldots, h_m$, ezek közt található r olyan halmaz: $h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_r}$, hogy $h_{i_1} \subseteq h_{i_2} \subseteq \cdots \subseteq h_{i_r}$. Ha*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{m(n)}{\left(\frac{2}{\sqrt[r]{r+1}}\right)^n} = c,$$

akkor

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}_n(m(n), r) = 1 - e^{-c^r}.$$

1. MEGJEGYZÉS. A 6. tétel állítása az $r=2$ speciális esetben a 4. tétel állítására redukálódik.

2. MEGJEGYZÉS. Hasonlóképpen oldható meg a következő, még általánosabb kérdés is: Legyen $\vec{G}$ egy tetszőleges r szögpontú irányított gráf, amely nem tartalmaz (irányított) kört, azaz ne lehessen a G gráfban megadni olyan $V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_k}$ szögpontokat, hogy a gráf tartalmazza a $\overrightarrow{V_{i_1}V_{i_2}}, \overrightarrow{V_{i_2}V_{i_3}}, \ldots, \overrightarrow{V_{i_{k-1}}V_{i_k}}$ és $\overrightarrow{V_{i_k}V_{i_1}}$ élek mindegyikét ($k=1,2,\ldots$). (E feltételbe beleértjük azt, hogy ne legyenek a gráfban hurkok, azaz $\overrightarrow{V_iV_i}$ alakú élek és hogy ha $i \neq j$ a $\overrightarrow{V_iV_j}$ és $\overrightarrow{V_jV_i}$ élek közül a gráf legfeljebb az egyiket tartalmazza.) Hány részhalmazt kell találomra kiválasztani az n elemű $\mathcal{H}$ halmazból ahhoz, hogy ezek közül ki lehessen választani r olyan részhalmazt — legyenek ezek $h_1, h_2, \ldots, h_r$ —, amelyeket hozzárendelve a $\vec{G}$ gráf $V_1, V_2, \ldots, V_r$ szögpontjaihoz, h_i legyen részhalmaza h_j-nek, ha $\vec{G}$ tartalmazza a $\overrightarrow{V_iV_j}$ élt.

Az a módszer, amelyet e dolgozatban ismertettünk, alkalmas továbbá a következő, ugyancsak ERDŐS PÁL által felvetett problémák megoldására is: hány részhalmazt kell kiválasztani egy n elemű $\mathcal{H}$ halmazból, hogy a kiválasztott részhalmazok között 1-hez közeli valószínűséggel legyen három olyan halmaz: h_1, h_2 és h_3, hogy a) h_3 legyen egyenlő h_1 és h_2 egyesített halmazával, b) h_3 legyen egyenlő h_1 és h_2 közös részével. Még általánosabban: legyen előírva egy reláció, amely r halmazra vonatkozik, és a halmazalgebra műveleteivel fejezhető ki. A fenti módszerrel elvileg minden ilyen relációra vonatkozólag eldönthető, hogy hány részhalmazt kell az n elemű $\mathcal{H}$ halmazból kiválasztani ahhoz, hogy előírt valószínűséggel legyen a kiválasztott részhalmazok között r olyan, amelyek az előírt relációt kielégítik.

Természetesen minden ilyen probléma megoldásához először ki kell számítani, hogy a szóban forgó reláció (és esetleg néhány más, azzal rokon reláció) milyen valószínűséggel teljesül, ha abba az n elemű $\mathcal{H}$ halmaz találomra és egymástól függetlenül választott r részhalmazát behelyettesítjük. A 4. tétellel kapcsolatban e feladat megoldását a 2. és 3. lemmák tartalmazták.

Például a fent a) alatt említett ERDŐS PÁL által felvetett probléma esetében a következő lemmára van szükség.

4. LEMMA. *Válasszuk ki találomra és egymástól függetlenül az n elemű $\mathcal{H}$ halmaz három részhalmazát: legyenek ezek h_1, h_2 és h_3. Akkor annak a valószínűsége, hogy a h_3 halmaz egyenlő a h_1 és h_2 halmazok egyesítésével, vagy közös részével*

$$\mathbf{P}(h_3 = h_1 \cup h_2) = \mathbf{P}(h_3 = h_1 \cap h_2) = \frac{1}{2^n}.$$

Bizonyítás. A h_3 halmaz akkor és csak akkor egyenlő a h_1 és h_2 halmazok egyesítésével, ill. közös részével, ha

$$\varepsilon_j(h_3) = \max(\varepsilon_j(h_1), \varepsilon_j(h_2)), \quad \text{ill.} \quad \varepsilon_j(h_3) = \min(\varepsilon_j(h_1), \varepsilon_j(h_2))$$

$(j = 1, 2, \ldots, n)$. Mármost

$$\mathbf{P}(\varepsilon_j(h_3) = \max(\varepsilon_j(h_1), \varepsilon_j(h_2))) = \mathbf{P}(\varepsilon_j(h_3) = \min(\varepsilon_j(h_1), \varepsilon_j(h_2))) = \frac{1}{2}.$$

A 4. lemma segítségével bebizonyítható a következő tétel.

8. TÉTEL. *Válasszunk ki az n elemű $\mathcal{H}$ halmazból találomra $m = m(n)$ részhalmazt. Jelölje $Q_n(m)$ ill. $Q_n^*(m)$ annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott részhalmazok között legyen három olyan, hogy az egyik egyenlő a másik kettő egyesítésével (ill. közös részével). Akkor $Q_n^*(m) = Q_n(m)$ és ha*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{m(n)}{(\sqrt[3]{2})^n} = c > 0,$$

akkor

$$\lim_{n\to+\infty} Q_n(m(n)) = 1 - e^{-\frac{c^3}{2}}.$$

MEGJEGYZÉS. Vegyük észre, hogy

$$1{,}154 = \frac{2}{\sqrt{3}} < \sqrt[3]{2} = 1{,}259.$$

Megjegyzés a korrektúránál (1961. febr. 16-án)

A 2. §-ban ismertetett módszer — mint legújabban észrevettem — közeli kapcsolatban áll az M. LOÈVE által megfogalmazott és *indikátor-módszer*nek nevezett módszerrel (lásd *M. Loève, Probability theory,* van Nostrand, New York 1955. 44. o., továbbá *E. Parzen, Modern probability theory and its applications,* Wiley, New York, 1960, 81. o.). E módszer a valószínűségi algebrák halmazalgebrával való realizációján alapszik. Legyen Ω egy tetszőleges nem üres halmaz, amelynek egy tetszőleges elemét jelöljük ω-val. Legyen $\mathcal{A}$ az Ω halmaz bizonyos részhalmazaiból álló és Ω-t is tartalmazó halmazalgebra, és $\mathbf{P}(A)$ egy $\mathcal{A}$-n értelmezett nemnegatív és additív halmazfüggvény, amelyre $\mathbf{P}(\Omega) = 1$. Az $\mathcal{A}$ halmazalgebra elemeit eseményeknek és a $\mathbf{P}(A)$ számot $(A \in \mathcal{A})$ az A esemény valószínűségének nevezzük; az Ω halmaz ω elemeit elemi eseményeknek nevezzük. Minden A eseményhez hozzárendelhetjük az $\mathbf{i}_A = \mathbf{i}_A(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ az Ω halmazon értelmezett függvényt, amely a következőképpen van definiálva:

$$\mathbf{i}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad \omega \in A \\ 0 & \text{ha} \quad \omega \in \bar{A}. \end{cases}$$

Az $\mathbf{i}_A$ függvényt (valószínűségi változót) az A esemény indikátorának nevezzük. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{M}(\mathbf{i}_A)=\mathbf{P}(A)$ vagyis bármely esemény valószínűsége egyenlő indikátorának várható értékével. Így ha $F_h \in \mathcal{A}$ $(h=1,2,\ldots,N)$ és $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N$ valós számok, mivel a várható érték lineáris operáció, tehát

$$\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h)=\mathbf{M}\left(\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{i}_{F_h}\right).$$

Az indikátor módszer mármost abban áll, hogy a $\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h)$ összeg nemnegativitását, ill. zérussal való egyenlőségét gyakran úgy lehet bebizonyítani, hogy kimutatjuk, hogy a $\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{i}_{F_h}(\omega)$ összeg minden $\omega \in \Omega$-ra nemnegatív.

Nyilvánvaló továbbá, hogy a $\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h) \geqq 0$ egyenlőtlenség (ill. a $\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h)=0$ egyenlőség) a $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték minden lehetséges választásánál csakis abban az esetben állhat fenn, ha a $\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{i}_{F_h}(\omega)$ összeg minden $\omega \in \Omega$-ra nemnegatív (ill. azonosan eltűnik). Ez az állítás (amely LOÈVEnél explicite nem szerepel) láthatólag rokon a fenti 1. tétellel. Annak kimutatása, hogy egy $\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{i}_{F_h}(\omega)$ alakú összeg minden ω-ra nemnegatív (ill. zérussal egyenlő), általában a nyilvánvaló $\mathbf{i}_{AB}=\mathbf{i}_A \cdot \mathbf{i}_B$ és $\mathbf{i}_{\bar{A}}=1-\mathbf{i}_A$ relációk felhasználásával történhet. Például *Poincaré* formulája az indikátor-módszerrel a $\prod_{k=1}^{n}(1-\mathbf{i}_{A_k})$ szorzat kiszorzása és az összes egyenlő számú tényezőből álló tagok összegezése útján bizonyítható.

Nem nehéz belátni, hogy a 2. §-ban ismertetett módszer és az indikátor-módszer láthatólag eltérő jellegük ellenére lényegében azonosak. Ha ugyanis az $F_1, F_2, \ldots, F_N$ események az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események elemi függvényei, akkor választhatjuk Ω-nak az összes $\omega=A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\bar{A}_{j_1}\bar{A}_{j_2}\cdots\bar{A}_{j_{n-k}}$ események halmazát, és ez esetben az, hogy $\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{i}_{F_h}(\omega) \geqq 0$ ugyanazt jelenti, mint az, hogy $\sum_{h=1}^{N} \alpha_h \mathbf{P}(F_h) \geqq 0$ abban az esetben, midőn $A_{i_1}=A_{i_2}=\cdots=A_{i_k}=\mathbf{I}$ és $A_{j_1}=A_{j_2}=\cdots=A_{j_{n-k}}=\mathbf{O}$. A két módszer között az a különbség, hogy míg az indikátor-módszer feltételezi a valószínűségi algebrák halmazelméleti interpretációját, addig a 2. §-ban ismertetett módszer ezen interpretációtól függetlenül is megfogalmazható és alkalmazható.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] M. FRÉCHET, *Les probabilités associées à un système d'événements compatibles et dépendants,* I—II. Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann et Cie., Paris, 1940.

[2] KÜRSCHÁK JÓZSEF, *Matematikai versenytételek,* Budapest, 1929.

[3] RÉNYI ALFRÉD, *Valószínűségszámítás,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

[4] JORDAN KÁROLY, *Fejezetek a klasszikus valószínűségszámításból,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956.

[5] A. RÉNYI, Quelques remarques sur les probabilités des événements dépendants, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 37 (1958) 393—398.

[6] G. BIRKHOFF, *Lattice theory,* American Math. Soc. Colloquium Publ. (revised edition), New York, 1948.

[7] П. С. Новиков, Элементы Математической Логики, Гостехиздат, Москва, 1959.

[8] E. SPERNER, Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, *Mathematische Zeitschrift* **27** (1928) 544—548.

(Beérkezett: 1960. XII. 5.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete