Turán Pál matematikai munkásságáról

(Ötvenedik születésnapja alkalmából.)

Rényi Alfréd

Turán Pál akadémikus, a Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem professzora, 1960. augusztus 18-án lett 50 éves. Ebből az alkalomból az alábbiakban áttekintést próbálunk adni eddigi nagyjelentőségű, eredményekben gazdag tudományos munkásságáról. Nem könnyű feladat ez, hiszen egy olyan tudósról van szó, aki alkotókészségének teljében van, akinek életműve nemcsak, hogy nem jutott nyugvópontra, hanem egyre erőteljesebben bontakozik ki és hatása is egyre szélesebb hullámokat ver. Barátainak, tanítványainak és tisztelőinek (ezek az egymást bőségesen átfedő kategóriák egyébként együttvéve e lap összes olvasóit magukba foglalják), egy csoportja mégis úgy gondolta, hogy egy ilyen áttekintés hasznos és tanulságos lehet, és alkalmas arra, hogy kifejezésre juttassa azt a megbecsülést, amit *Turán Pál* személye, eredményei és munkássága iránt érzünk, és engem bíztak meg az áttekintés megfogalmazásával.

Turán Pál eddig megjelent munkáinak mellékelt jegyzéke (amely a lap megjelenésének időpontjában már nem lesz teljes, mivel tíznél több, jelenleg sajtó alatt levő munkája nem szerepel benne) 118 dolgozatot tartalmaz. Ezek a következő, egymást részben átfedő csoportokra oszthatók:

A) *A hatványösszegekre vonatkozó Turán-módszerrel és alkalmazásaival foglalkozó munkák:* Ide sorolhatók a [23], [28], [29], [30], [31], [34], [40], [44], [48], [50], [51], [54], [55], [61], [63], [65], [74], [77], [78], [81], [82], [85], [86], [87], [88], [89], [91], [93], [94], [96], [107], [110], [111], [113], [116], [117] dolgozatok, és a [66], [67] és [92] monográfiák.* (Turánnak ezek a monográfiái, amelyek magyar, német és kínai nyelven jelentek meg, nem azonosak egymással: a német kiadás a magyarnak átdolgozott és kibővített

* A számok *Turán Pál* dolgozatainak mellékelt jegyzékére vonatkoznak.

verziója, a kínai fordítás pedig a németnek teljesen átdolgozott és kibővített változata. *Turán* jelenleg módszeréről egy angol nyelvű újabb és az eddigieknél teljesebb tárgyalást nyújtó könyv kéziratán dolgozik, amely az Interscience Tracts sorozatban fog megjelenni.

B) *Számelméleti munkák:* Ide sorolhatók az [1], [2], [3], [4], [6], [7], [8], [9], [11], [19], [20], [25], [26], [33], [36], [38], [52], [53], [56], [60], [75], [95], [100], [112] dolgozatok.

C) *Interpoláció és mechanikus kvadratúra elméletére vonatkozó munkák:* Ide sorolhatók a [10], [14], [16], [22], [46], [79], [80], [90], [98], [101], [102], [105], [106] dolgozatok.

D) *Polinomok és algebrai egyenletek elméletére vonatkozó munkák:* Ide sorolhatók a [18], [20], [27], [39], [42], [45], [49], [64], [72], [104], [108] dolgozatok.

E) *Komplex függvénytani, a Fourier-sorok elméletére és az általános sorelméletre vonatkozó munkák:* Ide sorolhatók az [5], [12], [15], [17], [32], [35], [37], [57], [62], [68], [69], [83], [99], [103], [109], [114] dolgozatok.

F) *Kombinatorikai és gráfelméleti munkák:* Ide sorolhatók a [13], [21], [24], [70], [73], [84], [97] dolgozatok.

A fenti felsorolásnál a B), C), D), E) és F) csoportok tárgyuk szerint rokon dolgozatokat tartalmaznak, ezzel szemben az A) csoportban tárgyuk szerint nagyon is különböző munkák szerepelnek, amelyekben az a közös, hogy részben a Turán-féle hatványösszegmódszerre, részben ezen módszer különböző területeken való alkalmazásaira vonatkoznak. E módszer legfontosabb alkalmazási területe az analitikus számelmélet; az A) csoportba sorolt dolgozatok közül a [23], [28], [31], [34], [48], [50], [54], [74], [77], [86], [88], [94], [107], [111] és [117] dolgozatok tárgyuk szerint a B) csoportba tartoznának. Úgy gondoltuk azonban, hogy az áttekintést megkönnyíti, ha a hatványösszegmódszerrel és annak alkalmazásaival foglalkozó munkákat együtt tárgyaljuk, tekintettel arra, hogy e módszer megalkotása, kifejlesztése és számos területen való nagysikerű alkalmazása kétségtelenül *Turán Pál* legjelentősebb tudományos teljesítménye.

Nincs itt helyünk *Turán Pál* nagyszámú jelentős munkáját részletesen ismertetni. Célunk pusztán áttekintést adni, kiemelni legfontosabb eredményeit és néhány megjegyzéssel érzékeltetni Turán munkásságának jelentőségét és sokoldalú voltát, de ugyanakkor rámutatni arra is, ami szétágazó vizsgálatait összekapcsolja.

A rövidség és áttekinthetőség kedvéért kénytelenek vagyunk eltekinteni attól, hogy az összes említett tételeket szabatosan megfogalmazzuk; sok esetben csak a tétel jellegének leírására szorítkozunk és a tétel pontos alakját illetőleg csak utalunk magukra a dolgozatokra.

A) *Turán Pál* érdeklődésének középpontjában egyetemi hallgató kora óta a számelmélet, ezen belül is elsősorban a prímszámok eloszlásának kérdése és ennek az igen nehéz problémának a vizsgálatára szolgáló analitikus számelméleti módszerek állnak. Már az első, *Szekeres Györggy*el közös dolgozata [1] az analitikus számelmélet módszerének alapos ismeretéről tanúskodik.

B) *Riemann* volt az első, aki teljesen tisztán látta azt a centrális szerepet, amelyet a róla elnevezett zeta-függvény a számelméletben, de különösen a prímszámok eloszlásának vizsgálatában játszik. Az $s=\sigma+it$ komplex változó $\zeta(s)$ függvénye, mint jól ismeretes, a $\sigma>1$ félsíkban az ott konvergens

$$(1) \qquad \zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

Dirichlet-sorral van értelmezve; azonban analitikus folytatással az egész komplex síkra kiterjeszthető és az $s=1$ ponttól eltekintve (ahol elsőrendű pólusa van, 1 reziduummal) mindenütt reguláris; e függvény a prímszámokkal való elválaszthatatlan kapcsolata kitűnik az ugyancsak a $\sigma>1$ félsíkra érvényes

$$(2) \qquad \zeta(s)=\prod_{p=2}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

szorzatelőállításból, ahol p az összes prímszámokon fut végig. A ζ-függvény és a prímszámok közötti kapcsolatot már *Euler* ismerte, ő azonban a ζ-függvényt csak valós s-re használta. Riemann volt az első, aki a ζ-függvényt komplex s-ekre tekintette, és felismerte, hogy éppen e függvény a komplex síkon való viselkedéséből lehet a prímszámok eloszlására következtetni. *Hadamard* és *de la Vallée-Poussin* a ζ-függvény segítségével bizonyították be a már *Gauss* által sejtett prímszámtételt, mely szerint $\pi(x)$-szel jelölve az x-nél nem nagyobb prímszámok számát,

$$(3) \qquad \pi(x)\sim Li(x)=\int_2^x\frac{dt}{\log t}.$$

Azóta *Landau* és *Wiener* munkájából kiderült, hogy (3) egyenes következménye annak, hogy $\zeta(1+it)$ semilyen valós t-re nem válik zérussá. Már *Riemann* tudta, hogy a prímszámok eloszlása szoros kapcsolatban áll a zetafüggvény gyökeinek eloszlásával, és ő állította fel több, mint 100 éve, 1859-ben azt a mindmáig eldöntetlen sejtést, hogy a $\zeta(s)=0$ egyenlet összes nemtriviális gyökei a $\sigma=1/2$ ún. kritikus egyenesen fekszenek. A ζ-függvény „triviális" gyökei az $s=-2, -4, -6, \ldots$ számok; hogy ezekre valóban $\zeta(s)=0$, az a zetafüggvény függvényegyenletéből olvasható le, mely szerint ha

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \tag{4}$$

akkor

$$\xi(1-s)=\xi(s). \tag{5}$$

Az $s=\sigma+it$ komplex sík $0<\sigma<1$ sávját *kritikus sáv*nak nevezik. Ismeretes, hogy a ζ-függvény összes nemtriviális gyökei ebben a kritikus sávban fekszenek; minél nagyobb részéről a kritikus sávnak sikerül kimutatni, hogy az nem tartalmazza a ζ-függvény gyökét, annál élesebb becslés adható meg a prímszámtétel maradéktagjára. A jelenleg ismert legjobb eredmény szerint (a legújabb eredmények *Korobov*tól és *I. M. Vinogradov*tól származnak) $\zeta(\sigma+it)\neq 0$, ha $\sigma\geqq 1-\frac{A}{(\log t)^{2/3}}$, ahol $A>0$ állandó, és ebből következik, hogy

$$\pi(x)=Li(x)+O\left(x\cdot e^{-\alpha(\log x)^{0,6}}\right), \tag{6}$$

ahol $\alpha>0$ egy alkalmasan választott állandó.

1948-ban *A. Selberg* és *Erdős Pál* a prímszámtételre elemi bizonyítást találtak, amely nem használja fel a zetafüggvény elméletét, de ez az elemi módszer csak gyenge maradéktag-becslést $\left(O\left(\frac{x}{(\log x)^c}\right)\text{ ahol } c>1\right)$ ad.

Ha θ-val jelöljük a ζ-függvény gyökei valós részének felső határát és ha $\theta<1$ (ami ezideig nincs bebizonyítva), akkor fennáll a

$$\pi(x)=Li(x)+O(x^{\theta}\cdot\log x) \tag{7}$$

maradéktagbecslés*; ha tehát a Riemann-sejtés igaz, akkor $\pi(x)-$ $-Li(x)$ lényegében $\sqrt{x}$-rendű.**

* *Ingham* bebizonyította, hogy ha $\theta>\frac{1}{2}$, vagyis ha a Riemann-sejtés nem igaz, a $\log^2 x$ faktor (7)-ben elhagyható.

** A (7) típusú állítások meg is fordíthatók: éppen *Turán* vizsgálatai mutatták meg, hogy minden olyan tételből, amely a prímszámtétel maradéktagjára éles becslést ad, lehet következtetni a ζ-függvény gyökeinek eloszlására.

A Riemann-sejtésből, illetve általában a ζ-függvény gyökeire vonatkozó állításokból nemcsak a prímszámtétel maradéktagjára lehet következtetéseket levonni, hanem a prímszámok elméletének számos más megoldatlan problémájára is.* Ezek közé tartozik például a *Landau* által a prímszámelmélet egyik fő problémájának nevezett probléma, a konzekutív prímszámok közötti különbség megbecsülése, ill. az a sejtés, hogy n^2 és $(n+1)^2$ között mindig van prímszám $(n=1, 2, \ldots)$. Azt, hogy n^3 és $(n+1)^3$ között mindig van prímszám, *Ingham* szintén a ζ-függvényre vonatkozó eredményekből vezette le.

Az elmúlt 100 év során a kor jelentős matematikusai hallatlan erőfeszítéseket tettek a Riemann-sejtés eldöntésére, azonban ez a probléma konokul ellenállt *Hadamard, de la Vallée-Poussin, Jensen, Hardy, Landau, Littlewood, H. Bohr, Pólya György, Carlson, Siegel, Ingham, Selberg* — hogy csak néhányat említsünk — és még sokan mások minden próbálkozásának. 100 évi megfeszített munka után a matematikának ez a talán legjelentősebb megoldatlan problémája még mindig állja az ostromot. Egyesek, mint pl. *Littlewood*, azt *sejtik*, hogy a Riemann-sejtés nem igaz. (*Littlewood* ezt nyomtatásban megjelent munkáiban sehol sem mondja ki, de problémafelvető szemináriumának sokszorosított jegyzetében a következő szavak olvashatók: „I guess the RH (Riemann-hypothesis) to be false...") Ez az ostrom azonban távolról sem volt eredménytelen; amellett, hogy számos, a Riemann-sejtéssel ekvivalens állítást fedeztek fel és tisztázták a Riemann-sejtés következményeit és kapcsolatát a számelmélet más megoldatlan problémáival, eközben fejlődtek ki az analitikus számelmélet igen éles szerszámai, és ezek az erőfeszítések rendkívül megtermékenyítően hatottak az egész analízisre, úgy, hogy bár a siker még ma is igen távolinak tűnik,** az eredmények, amelyek e törekvéseknek mintegy melléktermékeként jöttek létre, felbecsülhetetlen értékűek. Ez a legnagyobb mértékben vonatkozik *Turán Pál*nak a Riemann-sejtéssel kapcsolatos kutatásaira is, amelyek során számos jelentős eredményt ért el; többek között a hatványösszegekre vonatkozó módszere is ezúton jött létre.

Turánnak több dolgozata ([23], [54], [74], [77], [86], [94]) foglalkozik az ún. *Carlson-típusú tételek*kel, azaz olyan tételekkel,

* Téves volna azonban azt hinni, hogy a Riemann-sejtés bebizonyítása megoldaná a prímszámelmélet összes híres megoldatlan problémáit; így például a Goldbach-sejtésről (mely szerint minden 4-nél nagyobb páros szám két páratlan prímszám összegeként állítható elő) nem ismeretes, hogy az a Riemann-sejtés helyességéből következnék.

** *Hilbert* azt mondotta, hogy ha 500 év múlva újra életre kelne, első kérdése az volna, hogy megoldották-e már a Riemann-sejtést.

amelyek a ζ-függvénynek egy $\sigma \geqq \sigma_0 > 1/2$, $0 < t < T$ téglalapba eső gyökeinek $N(\sigma_0, T)$ számára adnak felső becslést, T egy függvénye segítségével. Ismeretes, hogy ha be volna bizonyítva, hogy tetszőleges kis $\varepsilon > 0$-ra és $T > T_0(\varepsilon)$-ra érvényes a

$$(8) \qquad N(\sigma_0, T) < T^{(2+\varepsilon)(1-\sigma_0)}$$

becslés, hacsak $1/2 < \sigma_0 < 1$, ebből következnék, hogy a prímszámok az $(x, x+x^\vartheta)$ intervallumban „szabályosan" oszlanak el, hacsak $\vartheta > 1/2$ és $x \to +\infty$, azaz $\pi(x+x^\vartheta) - \pi(x) \sim \frac{x^\vartheta}{\log x}$ érvényes volna, illetve hogy ha p_n az n-edik törzsszám, akkor bármely $\varepsilon > 0$-ra $p_{n+1} - p_n < p_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ volna, ha $n \geqq n_0(\varepsilon)$. A (8) sejtést az irodalomban legtöbbször *„sűrűségi hipotézis"* néven szokták említeni. A (8) sűrűségi hipotézis sok más tekintetben is pótolni tudja a Riemann-sejtést, ezért az elmúlt évtizedekben igen nagy erőfeszítések történtek (teljességre való törekvés nélkül csak *Carlson, Hoheisel, Ingham* és *Titchmarsh* nevét említjük) a (8)-hoz hasonló típusú tételek bebizonyítására. A történeti sorrendtől eltekintve említsük már itt meg, hogy ez irányban az összes előző eredményeket túlszárnyalva a legmesszebbmenő eredményt *Turán* érte el, hatványösszegmódszere segítségével, amennyiben kimutatta (l. [54] és [92]), hogy léteznek olyan $\frac{1}{2} < c_1 < 1$ és $c_2 > 0$ állandók, hogy ha $c_1 \leqq \sigma \leqq 1$ és $T \geqq c_2$, akkor

$$(9) \qquad N(\sigma, T) < T^{2(1-\sigma)+(1-\sigma)^{1,1}}$$

A (9) egyenlőtlenséggel *Turán* lényegében azt bizonyította be, hogy (8) bármilyen kis $\varepsilon > 0$-ra érvényes, hacsak σ elég közel van 1-hez és T elég nagy. Ez az eredmény a Turán-féle hatványösszegmódszerrel eddig elért eredmények közül talán a legjelentősebb; a módszernek azonban még számos lehetséges alkalmazása nincs kidolgozva, és így várható, hogy a módszer még sok más hasonló (vagy még nagyobb) jelentőségű eredményhez fog vezetni.

Egyébként *Turánt* a hatványösszegmódszer felfedezésére is a sűrűségi hipotézissel kapcsolatos vizsgálatai vezették. A [23] dolgozatban, ahol a hatványösszegmódszerről először történik említés, *Turán* a (8) sejtést egy olyan hipotézisből vezeti le, amely nem számelméleti jellegű, ugyanis tetszőleges komplex számok konzekutív hatványösszegeire vonatkozik és olyan típusú állítást tartalmaz, hogy ha $\max_{1 \leqq k \leqq n} |z_k| \geqq 1$, akkor a $\sum_{k=1}^{n} z_k^\nu$ hatványösszegek közül

$(\nu = m+1, m+2, \ldots)$ nem lehet „túl sok" konzekutív hatványösszeg „túl kicsi".

Ez a felismerés vezette *Turán*t a hatványösszegmódszerének kidolgozásához. Már a [23] dolgozatban bebizonyított egy tételt, amely a fent vázolt típusba tartozik és csak annyiban különbözik a felállított sejtéstől, hogy a ν kitevő hosszabb intervallumon fut végig, mint amit a sejtés megkívánna. A hatványösszegmódszer igen jelentős alkalmazását tartalmazza a [31] dolgozat, amely a Riemann-sejtés következő gyengébb változatával foglalkozik: létezik olyan θ_0 állandó $\left(\frac{1}{2} \leqq \theta_0 < 1\right)$, hogy a $\sigma > \theta_0$ félsíkban a $\zeta(s)$ függvénynek $(s = \sigma + it)$ csak véges sok gyöke van. Ezt a sejtést *Turán* (*Kalmár László* javaslatára) *kvázi-Riemann-sejtés*nek nevezte el. E dolgozatban *Turán*nak sikerült a kvázi-Riemann-sejtéssel ekvivalens, a p^{it} (p törzsszám) komplex számok véges összegeire vonatkozó feltételt megadnia.

Turán tétele pontosan a következőképpen szól: a kvázi-Riemann-sejtés ekvivalens azzal, hogy léteznek olyan $\alpha \geqq 2$ és β $(0 < \beta \leqq 1)$, továbbá $A > 0$ és $B > 0$ állandók, hogy ha $t > A$ és $t^{\alpha} \leqq \frac{N}{2} \leqq N_1 < N_2 \leqq N$, akkor

$$\left| \sum_{N_1 \leqq p \leqq N_2} p^{it} \right| < B \cdot \frac{N \log^{100} N}{t^{\beta}}. \tag{10}$$

Igen meglepő, hogy a (10) egyenlőtlenségtől kevéssel különböző egyenlőtlenségeket *Turán*nak sikerült *Vinogradov* módszere segítségével bebizonyítania: például a $\Sigma p^{it} = \Sigma e^{it \log p}$ összegek helyett a $\Sigma e^{it(\log p)^{\gamma}}$ összegekre sikerült neki (10)-típusú egyenlőtlenséget bebizonyítani, hacsak $\frac{1}{2} \leqq \gamma \leqq 2$ és $\gamma \neq 1$ (bármilyen kevéssel különbözik is γ 1-től). Sőt, még a $\Sigma e^{it \log p \cdot (\log \log p)^{\delta}}$ $(\delta \neq 0)$ alakú összegeket is hasonlóképpen meg tudta becsülni, vagyis rendkívül közel jutott a kvázi-Riemann-sejtéssel ekvivalens (10) egyenlőtlenség bebizonyításához. Ezen túlmenőleg azt is sikerült kimutatnia, — amit már *Landau* sejtett — hogy nemcsak a prímszámok teljes sorozata és az összes ζ-gyökök között áll fenn elválaszthatatlan kapcsolat, hanem ez a kapcsolat lokalizálható is: ha egy bizonyos véges intervallumban ismerjük a prímszámok elhelyezkedését, ebből következtethetünk arra, hogy a ζ-függvénynek vannak-e gyökei a kritikus sáv egy bizonyos téglalapjában és megfordítva.

A [31] dolgozatban centrális szerepet játszanak *Turán*nak a hatványösszegekre vonatkozó tételei. E dolgozat tehát a konzekutív hatványösszegekre vonatkozó, *Turán* által bebizonyított tételek jelentős számelméleti konzekvenciáit tartalmazta. *Turán* röviddel ezután felismerte, hogy ez a módszer nemcsak a prímszámelméletben, hanem az analízis számos más területén is alkalmazható. Mielőtt erre rátérnék, folytatjuk a módszer prímszámelméleti alkalmazásainak ismertetését. A [48] és [50] dolgozat módszere segítségével egyrészt a prímszámtétel maradéktagjára ad alsó becslést *egyetlen* nem-triviális ζ-gyök segítségével, ezáltal megoldva egy *Littlewood* által felvetett problémát (ez mindenfajta hipotézistől mentes eredmény, hiszen a ζ-függvénynek számos, a kritikus egyenesen fekvő gyökét ismerjük); másrészt pedig a prímszámtétel maradéktagjának felső becsléséből a ζ-függvény gyökmentes tartományára következtet vissza, amivel *Heilbronn* és *Ingham* egy problémáját oldja meg. *Ingham* bebizonyította, hogy az ún. Lindelöf-sejtésből, mely szerint tetszőleges rögzített σ-ra $\left(\frac{1}{2}<\sigma<1\right)$ $\zeta(\sigma+it)$ mint t függvénye t tetszőleges kis pozitív hatványnál kisebb nagyságrendű, következik a sűrűségi hipotézis. Turán a [74] és [77] dolgozatokban kimutatta, hogy *Ingham*nek ez a tétele a hatványösszegmódszerrel is bebizonyítható, sőt, ezen az úton több is adódik, mégpedig az, hogy ha a Lindelöf-sejtést csak a kritikus sáv egy részében teszszük fel, abból is bebizonyítható (8) a kritikus sáv egy megfelelő részére.*

A [86] és [94] dolgozatban ugyancsak ezzel a módszerrel mutatja ki, hogy a sűrűségi hipotézis ekvivalens egy hipotézissel, amely bizonyos, a kritikus sávban fekvő téglalapokon levő ζ-gyökök számára vonatkozik.

Összefoglalva: *Turán*nak sikerült hatványösszeg-módszere segítségével egy igen hatékony és teljesen új utat találnia a prímszámelmélet nagy megoldatlan problémáihoz, amely úton számos olyan nehéz és mély tételt bizonyított be, amelyek az eddig ismert egyéb módszerekkel nem voltak megközelíthetők.

Ezeknek az eredményeknek a horderejét és a leküzdendő súlyos nehézségeket csak az tudja igazán felmérni, aki közelebbről ismeri az analitikus számelméletet, amely kétségtelenül a matematika egyik legnagyobb és legbonyolultabb apparátust igénylő, de ugyanakkor egyik legvonzóbb fejezete. Az az éles kontraszt, amely az

* A Riemann-sejtés helyességéből a Lindelöf-sejtés állítása következnék, megfordítva azonban nem: a Lindelöf-sejtés igaz lehet akkor is, ha a Riemann-sejtés nem az.

analitikus számelmélet fő problémáinak egyszerű megfogalmazhatósága és a bizonyítási technika bonyolultsága között fennáll, teljesen egyedülálló. Az analitikus számelmélet módszereinek nehézsége sok matematikust visszarettent attól, hogy bekapcsolódjék e kérdések kutatásába, ami pedig az emberi gondolkodás egyik legizgalmasabb vállalkozása. A matematikusok többsége a könnyebb „vadászterületeket" kedveli. Ezzel szemben, aki nem riad vissza a nehézségektől és eljut odáig, hogy az analitikus számelméletben elmélyedjen, azt szinte lenyűgözi a problémakör érdekessége és szépsége és a matematika bármilyen más ágában mélyed is el ezután, újra meg újra vissza fog térni a számelmélet nagy megoldatlan problémáihoz. Az ezekkel foglalkozó kutatók leginkább talán a legmagasabb csúcsokra törekvő hegymászókhoz hasonlíthatók. Ilyen helyzetben az is óriási erőfeszítéseket igénylő és minden elismerést megérdemlő teljesítmény, ha valaki néhány 100 méterrel magasabra tud feljutni az égbenyúló sziklafalon, mint bárki más előtte (akkor is, ha a csúcstól még mindig jó darab választja is el). Az analitikus számelmélet ember nemjárta csúcsai közül is kiemelkedik a Riemann-sejtés, amely azonban körül van véve más, szintén égbenyúló és nehezen megközelíthető sziklacsúcsok seregével (mint pl. a Lindelöf-sejtés, a sűrűségi hipotézis, a konekutív prímszámdifferenciák problémája, stb.). Hogy a hasonlatot még egy lépéssel tovább kövessük, azon sem lepődhetünk meg, hogy azok az új módszerek és technikai vívmányok, amelyeket a hegymászók az említett hegycsúcsokra való feljutásra törekedve kidolgoznak, más, kevésbé regényes, de gyakorlatilag jelentős célokra is eredményesen felhasználhatók.

Az analitikus számelmélet apparátusának rendkívül nehéz volta magyarázza meg azt, hogy *Turán*t új módszere termésének learatásában eddig csak kevesen követték. Meg kell azonban említeni, hogy a legutolsó években igen tehetséges tanítványa és követője akadt egy fiatal lengyel matematikus, *Knapowski* személyében, akinek nemrégiben sikerült *Turán* módszere segítségével egy igen nevezetes eredményt elérnie. Ismeretes, hogy *Riemann* említett dolgozatában egy heurisztikus gondolatmenet alapján azt is állította, hogy $\pi(x)-Li(x)<0$, hacsak $x>2$; ezen állítást a prímszámtáblázatok $x<10^6$-ig igazolták. Ennek ellenére *Littlewood* 1914-ben kimutatta, hogy *Riemann* ezen állítása nem igaz, $\pi(x)-Li(x)$ végtelen sokszor jelet vált. *Littlewood* e tételét *Landau* háromkötetes számelméleti kézikönyvében az analitikai számelmélet egyik legszebb gyümölcsének nevezte. Bizonyítása eredetileg tiszta existencia bizonyítás volt; ő maga és *Skewes* nevű tanítványa újra és újra visszatértek e kérdéshez, hogy a bizonyítást úgy módosítsák, hogy az egy effektív numerikus felsőkorlátot is biztosítson $\pi(x)-Li(x)$ első jelváltási helyére. Ez először *Skewes* 1955-ben publikált dolgozatában sikerült, *Littlewood* újabb ideáit is felhasználva. Mármost *Knapowski*nak nemcsak e tételt sikerült egyszerűbben igazolnia, hanem a $0<x<T$ közbe eső jelváltások számára az alsó korlátot találnia, mint T függvényét, bizonytalan feltevések nélkül.

Mielőtt a Turán-féle hatványösszeg módszer más alkalmazásaira térnénk, néhány szóval vázolni szeretnénk a módszer lényegét. Legyenek $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tetszőleges 1 abszolút értékű komplex számok, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tetszőleges komplex számok, $z_k = e^{2\pi i\varphi_k}$, $b_k = |b_k|\cdot e^{-2\pi i\psi_k}$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Vizsgáljuk meg az

$$S_\nu = \sum_{k=1}^{n} b_k z_k^\nu \tag{11}$$

hatványösszeget, ahol ν pozitív egész. Nyilvánvaló, hogy

$$|S_\nu| \leqq \sum_{k=1}^{n} |b_k|. \tag{12}$$

Ha ν értékét úgy választhatjuk, hogy a $\nu\varphi_k-\psi_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$ számoknak a legközelebbi egész számtól való távolságai egyidejűleg mind $\frac{\varepsilon}{2\pi n}$-nél kisebbek legyenek, ahol $\varepsilon>0$ tetszőleges kis szám, akkor — felhasználva a minden valós t-re érvényes $|e^{it}-1|\leqq|t|$ egyenlőtlenséget — adódik, hogy

$$|S_\nu| \geqq (1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{n} |b_k| \tag{13}$$

lesz. Ilyen ν egész számok, amelyeket nevezhetünk *„egyenirányító”* értékeknek, hiszen az ilyen ν-kre a $b_k z_k^\nu$ komplex számok argumentumai közel egyenlőek), azonban általában nem adhatók meg. *H. Bohr* vette észre, hogy ha a b_k együtthatók pozitívak, vagy az $1, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ számok lineárisan függetlenek, akkor ilyen egész ν *Dirichlet* és *Kronecker* klasszikus tételei szerint mégis van és ennek nevezetes alkalmazásait találta. A további alkalmazásoknak azonban útját állta egyrészt az, hogy a b_k-ra, ill. φ_k-kra említett kikötések legtöbb esetben nem teljesülnek, másrészt, ha igen, akkor is a megfelelő ν-k vagy egyáltalán nem lokalizálhatók vagy csak igen gyengén. *Turán* kiinduló észrevétele az volt, hogy azon alkalmazási lehetőségeknél, melyeknél *Dirichlet* és *Kronecker* tételei nem alkalmazhatók, legtöbbször (13)-nál gyengébb alsó becslés is elegendő; kiindulási feladatul tehát azt tűzte ki, (13) milyen alsó becslésekkel helyettesíthető, amelyek „sűrűn" fekvő egész ν-kre teljesülnek a b_k és φ_k számokra tett korlátozások nélkül. E feladatok persze a szándékolt alkalmazásoktól is függenek; mégis azt találta, hogy ezek nagy száma két alaptételre redukálható. Ezek közül az első a következőképpen szól: Ha $n \geqq 2$ és m tetszőleges egész számok, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tetszőleges komplex számok és $z_1, z_2, \ldots, z_n$ olyan komplex számok, amelyekre $\min\limits_{1 \leqq k \leqq n} |z_k| = 1$, akkor

$$(14) \qquad \max_{m+1 \leqq \nu \leqq m+n} \left| \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^\nu \right| \geqq \frac{|b_1 + \cdots + b_n|}{A_{n,m}},$$

ahol $A_{n,m}$ csak n-től és m-től függő pozitív állandó. *Turán* azt bizonyította be, hogy (14) érvényes $A_{n,m} = \left[\frac{2e(m+n)}{n}\right]^n$ mellett; nemrégiben *Makai Endre* és tőle függetlenül, valamivel később *N. G. de Bruijn* kimutatták, hogy (14) igaz $A_{n,m} = \sum\limits_{l=0}^{n-1} 2^l \binom{m+l}{l}$ mellett is, és ez az eredmény már nem javítható, tehát ennél tetszőlegesen kevéssel kisebb konstanssal (14) már nem érvényes általánosan. (Az alkalmazások szempontjából persze nem a konstans pontos értéke, hanem csak a nagyságrendje a döntő.)

Turán második főtétele szerint, ha $n \geqq 2$ és m tetszőleges pozitív egész számok, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tetszőleges komplex számok és $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tetszőleges olyan komplex számok, amelyekre $\max\limits_{1 \leqq k \leqq n} |z_k| = 1$, akkor

$$(15) \qquad \max_{m+1 \leqq \nu \leqq m+n} \left| \sum_{j=1}^{n} b_j z_j^\nu \right| \geqq \left[\frac{n}{8e(m+n)}\right]^n \min_{1 \leqq j \leqq n} |b_1 + \cdots + b_j|.$$

(A (15) jobboldalán álló faktor közel van a legjobbhoz, amennyiben $8e$ biztosan nem pótolható $\frac{2e}{\log 2}$-nél kisebb állandóval.) Külön figyelmet érdemel a $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$, $m = 0$ speciális eset. Erre az esetre *Turán* azt mutatta ki (továbbra is a $\max\limits_{1 \leqq k \leqq n} |z_k| = 1$ feltétel mellett), hogy

$$(16) \qquad \max_{1 \leqq \nu \leqq n} \left| \sum_{j=1}^{n} z_j^\nu \right| \geqq \frac{\log 2}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}.$$

Azt, hogy (16) jobboldalára *Turán* eredeti $\frac{1}{n}$ alsó korlátja helyett, bizonyításának egy módosításával $\frac{1}{\log n}$ nagyságrendű alsó korlát írható, elsőnek *Erdős Pál* vette észre. Később *N. G. de Bruijn* és *S. Uchiyama* kimutatták, hogy (9) jobboldala $\frac{\log\log n}{\log n}$ rendű korláttal is pótolható. *Turán* azt sejtette, hogy (9) jobboldala egy n-től független c pozitív állandóval helyettesíthető; ezt legújabban sokak sikertelen próbálkozása után *Atkinson*nak sikerült bebizonyítania, mégpedig c-re az $\frac{1}{6}$ értéket találta.

Turán többi ezirányú tételeit illetőleg utalunk könyvére [67] és a [44], [63], [78], [87], [96] dolgozatokra, továbbá *Turán Pál* és *T. Sós Vera* [81] dolgozatára. Csak azt jegyezzük még meg, hogy míg az említett két főtétel úgy jellemezhető, hogy a $\max\limits_{n+1\leqq\nu\leqq m+n}\left|\sum\limits_{j=1}^{n} b_j z_j^\nu\right|$ mennyiséget a $\min\limits_{1\leqq j\leqq n}|z_j|$, ill. $\max\limits_{1\leqq j\leqq n}|z_j|$ „normákkal" becsüli meg alulról, *Turán* további alkalmazásokat szem előtt tartva más normákat is vizsgált, pl. az általa *N. Wiener*-normának nevezett $\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|b_j|^2|z_j|^{2\nu}\right)^{1/2}$ normát. Foglalkozott továbbá újabban *Turán* egyoldalú egyenlőtlenségekkel is [116], azaz $\max\left|\sum\limits_{j=1}^{n} b_j z_j^\nu\right|$ helyett $\max \operatorname{Re}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j z_j^\nu\right)$-re ad pozitív alsó korlátot, (illetve $\min \operatorname{Re}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j z_j^\nu\right)$-re negatív felső korlátot) azon megszorítás mellett, hogy a z_j számok egy $|\arg z_j|\geqq c>0$ szögtérben helyezkednek el. *Knapowski* említett eredménye ezen a tételen alapszik.

Amint az elmondottakból látszik, *Turán* tételei tulajdonképpen a diofantikus approximáció elméletébe tartoznak és ezen elmélet egy új fejezetét alkotják. A módszer alkalmazási területe viszont az analitikus számelmélet mellett az analízis számos ágára terjed ki, és ezért teljesen jogosult a módszert — amint azt Turán könyvének címében teszi — az *analízis* egy új módszerének nevezni, amelynek lényege éppen a diofantikus approximáció elméletébe tartozó tételeknek az analízisben való alkalmazásában áll. A Turán-módszer analízisbeli alkalmazásai közül a következőket említjük meg.

Kvázianalitikus függvények elmélete [29], [91]; a D. Bernoulli—Lobacsevszkij—Graeffe-féle gyökközelítő eljárás [55], [65], [79]; differenciálegyenletrendszerek stabilitásának, ill. instabilitásának elmélete [82], [110]; hézagos hatványsorok és Dirichlet-sorok elmélete [61]; trigonometrikus és majdnem-periodikus polinomok értékkészleteloszlása, speciálisan gyökeinek eloszlása [40], [112]. Az alkalmazási területeknek ez a széles skálája képet ad a módszer horderejéről.

B) A B) csoportba sorolt számelméleti dolgozatok rövid méltatását *Turán Pál* doktori disszertációjával [3] és ahhoz kapcsolódó dolgozataival [4], [5] kezdem.

Disszertációjában *Hardy* és *Ramanujan* azon nevezetes, 1917-ből származó tételével foglalkozik, mely szerint az $1, 2, \ldots, N$ számok közül $o(N)$ szám kivételével minden számnak körülbelül $\log\log N$ számú, pontosan

$$\log\log N - \omega(N)\sqrt{\log\log N} \quad \text{és} \quad \log\log N + \omega(N)\sqrt{\log\log N}$$

közé eső számú különböző törzstényezője van, ahol $\omega(N)$ tetszőleges lassan végtelenhez tartó függvény. *Hardy* és *Ramanujan* e tételre igen bonyolult bizonyítást adtak. *Turán* disszertációjában két igen egyszerű bizonyítást ad erre a tételre: az első teljesen elemi (a második a ζ-függvény elméletén alapuló analitikus bizonyítás). Ezzel az elemi bizonyítással aratta *Turán* első jelentős nemzetközi sikerét (amelyet azóta annyi sok más siker követett); ez mutatkozott meg pl. abban is, hogy bizonyítását *Hardy* és *Wright* továbbá *Hua* és *Kubilius* számelméleti könyvükbe is felvették. Az elemi bizonyítás tulajdonképpen valószínűségszámítási meggondoláson alapszik. Jelölje $U(n)$ az n szám különböző törzstényezőinek számát; *Turán* bizonyítása a valószínűségszámítás terminológiájával úgy fogalmazható, hogy kiszámítja (aszimptotikusan) az $U(1), U(2), \ldots, U(N)$ számsorozat átlagát és szórását és azután a Csebisev-féle egyenlőtlenség alkalmazásával egycsapásra nyeri a Hardy—Ramanujan-tételt. *Turán*nak ez a bizonyítása a valószínűségszámítási módszerek azóta kibontakozott számelméleti alkalmazásainak egyik legelső sikere volt; ezen az sem változtat, hogy *Turán* ezidőtájt még nem ismerte fel, hogy itt valójában valószínűségszámításról van szó. *Turán*nak ezzel a módszerével rokon az a módszer, amelyet az utóbbi években *Ju. V. Linnik* fejlesztett ki és amelyet ő „szórás"-módszernek nevez. E módszerrel *Linnik* igen jelentős eredményeket ért el, például bebizonyította, hogy minden elég nagy szám előállítható, mint két négyzetszám és egy prímszám összege.

Turán módszere lehetővé tette a Hardy—Littlewood-tétel messzemenő általánosítását, additív számelméleti függvények egy széles osztályára, továbbá az $U(n)$-függvény helyett az $U(P(n))$ számelméleti függvényre, ahol $P(n)$ egy egészegyütthatós polinom. *Turán* bizonyítása azon vizsgálatok egyik kiindulópontja volt, amelyek az additív számelméleti függvények értékkészlet-eloszlását a valószínűségszámítás módszereivel vizsgálják. E témakörből csak *Erdős* és *Kac* következő tételét említjük meg: Jelölje $F_N(x)$ azon $n \leqq N$ természetes számok számát, amelyek különböző prímfaktorainak száma kisebb, mint $\log\log N + x\sqrt{\log\log N}$, ahol x tetszőleges rögzített valós szám, akkor

$$(17) \qquad \lim_{N\to+\infty} \frac{F_N(x)}{N} = \Phi(x),$$

ahol $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ a normális eloszlás eloszlásfüggvénye (az ún. Gauss-féle függvény). A [95] dolgozatban ki van mutatva, hogy *Erdős* és *Kac* ezen tétele az előzőleg ismert bizonyításoknál lényegesen egyszerűbben bebizonyítható azzal a második (analitikus) bizonyítási módszerrel, amelyet disszertációjában *Turán* a Hardy—Ramanujan-tételre megadott. Ez a bizonyítási módszer még többet is ád, mint az *Erdős—Kac* tételt, ugyanis kombinálva *Turán* analitikus módszerét a valószínűségszámításból ismert *Esseen*-féle tétellel (erről később még lesz szó), sikerült a [95] dolgozatban bebizonyítani *Le Veque*-nek azt az addig bizonyítatlan sejtését, hogy x-ben egyenletesen

$$(18) \qquad \frac{F_N(x)}{N} = \Phi(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log\log N}}\right).$$

A maradéktag-becslés (18)-ban tovább nem javítható. *Turán*nak ez az analitikus módszere még sok kiaknázatlan lehetőséget rejt magában.*

A [33] dolgozatban *Turán* a következő, rendkívül meglepő tételt bizonyítja be: vizsgáljuk a Riemann-féle ζ-függvény Dirichlet-sorának részletösszegeit, vagyis az $U_n(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s}$ véges összegeket; ha van olyan n_0, hogy ha $n \geqq n_0$, akkor az $U_n(s)$ függvények nem tűnnek el a $\sigma > 1$ nyílt félsíkban, akkor igaz a Riemann-sejtés. *Turán* e tételt még tovább élesítette a [112] és legújabban a [122] dolgozatában, amennyiben kimutatta, hogy a Riemann-sejtés már abból is következik, hogy $U_n(s)$ bizonyos sáv-

* *Erdős Pál* és e sorok írója „Probabilistic methods in number theory" című, jelenleg kidolgozás alatt álló könyvében elsősorban ezúton igyekszenek egységes módszerrel tárgyalni az additív számelméleti függvények értékkészlet-eloszlásának általános elméletét.

ban nem tűnik el, és kimutatta, hogy ez a tétel bizonyos értelemben meg is fordítható. Ezek az eredmények egészen váratlan és igen sokatígérő új utat nyitnak a Riemann-sejtés vizsgálatára. A [112] dolgozatban szerepel az az igen érdekes megjegyzés, hogy a ζ-függvény egyértelműen jellemezhető azáltal, hogy Dirichlet-sora együtthatói monotonok és Euler-típusú szorzatelőállítással rendelkezik. Ez azért lényeges, mert a ζ-függvény mások által adott jellemzései mind a ζ-függvény függvényegyenletével voltak kapcsolatosak.

Turán behatóan foglalkozott a számtani sorok prímszámaival és ezzel összefüggésben a Dirichlet-féle L-függvények elméletével is ([11], [19], [26] és [111]). L-függvényeknek nevezik a $\sigma>1$-re

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s} \tag{19}$$

alakú Dirichlet-sorral előállítható függvényeket, ahol $\chi(n)$ egy karakter egy $k>1$ természetes számra mint modulusra vonatkozólag. Az *általánosított Riemann-sejtés* szerint, amelyet *Piltz* fogalmazott meg először, az L-függvények egyikének sincsenek gyökei a $\sigma>1/2$ félsíkban.

E sejtés ugyanazt a szerepet tölti be a prímszámok számtani sorokban való eloszlásának elméletében, mint az eredeti Riemann-sejtés az összes prímszámok eloszlásának vizsgálatánál. *Turán* az L-függvényekre vonatkozó eredményei mind az általánosított Riemann-sejtés körül forognak. Egyrészt e sejtés következményeit vizsgálta, például 1937-ben bebizonyította, hogy e sejtésből következik *Erdős*nek az a sejtése, hogy egy irracionális α szám prímszámszorosai (azaz a $2\alpha, 3\alpha, 5\alpha, \ldots, p\alpha, \ldots$ számsorozatok) mod 1 egyenletes eloszlásúak; ezt később *I. M. Vinogradov* minden sejtés nélkül igazolni tudta. Egy másik eredménye a számtani sorok legkisebb prímszámaira vonatkozik; kimutatja, hogy „majdnem minden" $kn+r$ $(n=1,2,\ldots;(k,r)=1)$ számtani sorban (azaz $o(\varphi(k))$ számtani sor kivételével) a legkisebb prímszám kisebb, mint $\varphi(k)(\log k)^A$ ahol $A>2$ tetszőleges állandó. Azóta *Linnik* minden sejtés nélkül bebizonyította, hogy az említett számtani sorok mindegyikében a legkisebb prímszám kisebb, mint k^B, ahol B egy pozitív állandó. A [26] dolgozatban (Linnikkel egyidejűleg, de tőle nyilván teljesen függetlenül) elsőnek talált az L-függvények gyökeire statisztikus jellegű Carlson-típusú tételeket (bizonyítatlan feltevések nélkül). Az ilyen típusú tételek jelentőségének érzékeltetésére csak két példát említünk meg: *Linnik* a számtani sorok legkisebb prímszámára vonatkozó tételét éppen egy ilyen típusú, az L-függvények gyökeire vonatkozó statisztikus tétel segítségével bizonyította be (Linniknek erre az L-függvényekre vonatkozó tételére *Turán* nemrégiben hatványösszegmódszere segítségével új, sokkal egyszerűbb bizonyítást adott). Egy másik példa: e sorok írójának arra a tételre adott bizonyításában, hogy létezik olyan K univerzális állandó, hogy minden n természetes szám előállítható $n=p+P$ alakban, ahol a p prímszám és P legfeljebb K prímtényezőjű szám, szintén lényeges szerepet játszott egy, az L-függvények gyökeire vonatkozó statisztikus tétel, melyet a *Linnik*-féle „nagy szita" továbbfejlesztésével sikerült igazolnia.

Igen jelentősek *Turán*nak *Erdős Pál*lal közös, számsorozatok egyenletes eloszlására vonatkozó eredményei, amelyek összefüggnek *Turán*nak egyrészt számelméleti, másrészt az analízisre, különösen az interpolációra és a polinomok elméletére vonatkozó vizsgálataival. A [38] és [45] dolgozatokban egy polinom gyökei argumentumainak egyenletes eloszlására a polinom abszolút értékének egy körön felvett maximumából következtetnek. (Előzőleg, a [20] dolgozatban egy csupa valós gyökű polinom gyökeinek eloszlására a polinom abszolút értékének a gyököket tartalmazó intervallumon felvett maximumából következtettek.) A komplex gyökű polinomok gyökei argumentumának eloszlására vonatkozó egyik eredményüket (l. [38]) egy számelméleti jellegű eredményből vezetik le, amely a híres Weyl-féle tétel „végesítését" tartalmazza. Mint ismeretes, *H. Weyl* bebizonyította, hogy ha az $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots$ valós számsorozat azzal a tulajdonsággal bír, hogy bevezetve a

$$S_n(k)=\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i k x_j} \tag{19}$$

jelölést, minden k természetes számra

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n(k)}{n}=0, \tag{20}$$

akkor az x_j számsorozat mod 1 egyenletes eloszlású, vagyis $A_n(y)$-nal jelölve az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számok közül azok számát, amelyek törtrésze a $[0, y]$ intervallumba esik, minden y-ra $(0\leq y\leq 1)$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{A_n(y)}{n}=y. \tag{21}$$

Mármost *Erdős* és *Turán* csak véges sok $S_n(k)$ $(k=1, 2, \dots, m)$ összeget vizsgálnak rögzített n-re és bebizonyítják, hogy ha ezekre megfelelő becslés ismeretes, abból az $x_1, x_2, \dots, x_n$ véges számsorozat mod 1 vett eloszlásának „nagyjából" egyenletes voltára következtethetünk.

Érdemes rámutatni e tétel valószínűségszámítási vonatkozásaira. A Weyl-tétel analóg a karakterisztikus függvényekre vonatkozó, a valószínűségszámításból jól ismert folytonossági tétellel, amely szerint, ha eloszlások egy sorozatának karakterisztikus függvényei egy $\varphi(t)$ karakterisztikus függvényhez konvergálnak, úgy az eloszlások maguk is konvergálnak ahhoz az eloszláshoz, amelynek karakterisztikus függvénye éppen $\varphi(t)$. Ismeretes továbbá a karakterisztikus függvényekre vonatkozó folytonossági tételnek egy „végesített" alakja: ez éppen a már fentebb említett Esseen-féle tétel. Mármost *Erdős* és *Turán* előbb említett tétele ugyanúgy viszonylik az Esseen-tételhez, mint ahogy a Weyl-tétel viszonylik a karakterisztikus függvényekre vonatkozó folytonossági tételhez. Ez az összefüggés *Erdős* és *Turán* említett tétele és *Esseen* tétele között közelebbi vizsgálatot érdemelne.

Erdős és *Turán* említett eredményét egymástól függetlenül *Koksma* és *Szüsz Péter* a többdimenziós esetre is kiterjesztették. A tétel ezen általánosításának *Turán Pál Egerváry Jenő*vel együtt ([53], [56]) rendkívül meglepő alkalmazását adta a kinetikus gázelmélet egy (előzőleg már *H. Steinhaus* által vizsgált) kérdésére. Arról van itt szó, hogy megadhatók egy edénybe zárt gáznak olyan aritmetikai modelljei, ahol az összes molekulák kezdeti helyzetének megadása alapján ezek helyzete és sebessége bármely későbbi időpontban egyszerű explicit képlettel írható le, ugyanakkor viszont a gáz egészére vonatkozó, a kinetikus gázelméletben valószínűségszámítási meggondolásokkal igazolt statisztikus törvényszerűségek e modellben az említett explicit képletek és a diofantikus approximáció-elmélet említett eredményei alapján közvetlenül verifikálhatók. Ez az eredmény matematikai érdekességén túl ismeretelméleti szempontból is figyelemreméltó és rendkívül alkalmas bizonyos, a statisztikus természettörvényekre vonatkozó, meglehetősen széles körben elterjedt téves elképzelések megcáfolására.

Egyébként a diofantikus approximációelmélet eredményeinek fizikai alkalmazása nem annyira szokatlan jelenség, mint első pillantásra látszik. Így például *Bohl*, aki *Sierpinski*-vel és *Weyl*-el nagyjából egyidejűleg és tőlük függetlenül bebizonyította 1910-ben, hogy minden irracionális szám egészszámú többszörösei mod 1 egyenletesen oszlanak el, ebből az eredményből az égi mechanikában a 3-bolygójú rendszerekre vonatkozólag fontos következtetéseket vont le. Ha még azt is figyelembevesszük, hogy a szóbanforgó tétel az $\alpha, 2\alpha, \ldots, n\alpha, \ldots$ számsorozat mod 1 egyenletes eloszlásáról tulajdonképpen a Birkhoff-féle ergodtétel speciális esetét alkotja, nyilvánvalóvá válik, hogy ezen eredményeknek a statisztikus fizikával való szoros kapcsolata van. *Turán* és *Egerváry* dolgozatában azonban az a lényegesen új mozzanat, hogy nem határértéktételeket, hanem a véges esetre vonatkozó egyenlőtlenségeket használnak fel.

Szép példája ez annak, hogy a matematika legelvontabbnak látszó fejezeteit is számtalan szál fűzi össze a matematika alkalmazásaival és a matematikának a keletkezésükkor kizárólag elméleti jelentőségűnek látszó új eredményeinél is szinte biztosan számíthatunk arra, hogy azokat a gyakorlatban előbb vagy utóbb fel lehet majd használni. Igen jól példázza ezt a Turán-féle hatványösszegmódszer esete. Mint láttuk, e módszer felfedezésére Turánt a Riemann-sejtés körüli vizsgálatai vezették; később azonban ő maga fedezte fel, hogy e módszernek a gyakorlat szempontjából is jelentős alkalmazásai adhatók meg a differenciálegyenletek elméletében és a numerikus matematikában. Itt említjük meg, hogy legújabban *Turán* módszerét (közelebbről a (16) egyenlőtlenséget, illetve annak Atkinson által adott élesítését) sikerrel alkalmazta mátrixok legnagyobb sajátértékének közelítő kiszámítására, amely feladat, mint az közismert, számos műszaki és közgazdasági problémában döntő szerepet játszik.

Nem beszéltünk még *Turán* számos más érdekes számelméleti eredményéről, így nem beszéltünk *Erdős Pál*lal közös [2], [7], [8], [9], [25] és [36] dolgozatairól, sem a Fermat-sejtésre vonatkozó [52] és [75] dolgozatairól, sem az *Erdős Pál*lal és *Szüsz Péter*rel közös [100] dolgozatáról. A rövidség kedvéért csak a [9], és a [100] dolgozatokról szólunk néhány szót, bár a többi is igen figyelemreméltó. A [9] dolgozat *van der Waerden* egy nevezetes tételéhez kapcsolódik és olyan természetes számokból álló $a_1<a_2<\cdots<a_k<N$ számsorozatokkal foglalkozik, amelyekből bárhogy választva ki három tagot, ezek nem alkotnak számtani sort, azaz nincs közöttük három olyan a_i, a_j, a_k elem, amelyekre $a_i+a_k=2a_j$, és korlátot ad az ilyen sorozatok tagszámának maximumára. Azt az érdekes sejtést állítják fel, hogy ha e maximum $r_3(N)$, akkor $\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{r_3(N)}{N}=0$. Ezt a sejtést azóta *Roth* bizonyította be. A [100] dolgozat kérdésfeltevése bizonyos mértékig analóg a Turán-féle hatványösszeg-módszer problematikájával, mert — más kérdésnél ugyan, — de szintén lokalizációra vonatkozik. Ismeretes, hogy minden α irracionális számhoz végtelen sok olyan (x, y) egész számokból álló számpár adható meg, hogy

$$\left|\alpha-\frac{x}{y}\right|\leqq\frac{A}{y^2} \quad \text{és} \quad (x, y)=1, \tag{22}$$

ahol $A > 1/2$; ugyanis, ha $\frac{x}{y}$ az α szám reguláris lánctört kifejtésének egy közelítő törtje, akkor (22) teljesül. Bármely (1/2-nél kisebb) $A > 0$ állandó mellett is a (22) diofantikus egyenlőtlenségnek végtelen sok megoldása van, ha nem is minden, de majdnem minden valós α-ra. Mármost a szóbanforgó dolgozat azt a kérdést vizsgálja, hogyan lehet lokalizálni a (22)-ben szereplő y számot, pontosabban mikor lehet adott N mellett N és cN között $(c > 1)$ találni olyan y számot, amelyhez van olyan x, hogy (22) fennáll?

A dolgozat egyik eredménye szerint, ha $0 < A < \frac{c}{1+c^2}$ és $m_N(A, c)$ jelöli a $(0, 1)$ intervallum azon α valós számai halmazának mértékét, amelyekre ez lehetséges, akkor

$$\lim_{N \to +\infty} m_N(A, c) = \frac{12A}{\pi^2} \log c. \tag{23}$$

A szerzők azt sejtik, hogy $m_N(A, c)$ határértéke minden $A > 0$ és $c > 1$ esetében létezik.

Messze vezetne, ha felsorolnánk mindazokat a szakkönyveket, amelyek a számelmélet jelentős eredményeinek sorában részletesen foglalkoznak *Turán* tételeivel. A sok közül csak az Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften *Loo-Keng Hua* által írt analitikus számelméleti fejezetet, *E. C. Titchmarsh* a zetafüggvényről írt nagy monográfiáját, *K. Prachar*nak a prímszámelméletről írt könyvét, *J. W. S. Cassels*, a Cambridge Tracts-sorozatban megjelent, a diofantikus approximációról szóló könyvét, *M. Kac*nak „Statistical independence in probability, analysis and number theory" c. könyvét említjük meg.

C) Áttérünk *Turán*nak az interpoláció és a mechanikus kvadratúra kérdéseivel foglalkozó dolgozatai ismertetésére. E témakörrel *Turán* kétségtelenül *Fejér Lipót* hatására kezdett foglalkozni. *Turán* és *Erdős* 1938-, 1940-ben három egymáshoz csatlakozó jelentős dolgozatot közöltek az Annals of Mathematics-ban ([10], [16], [22]). Hogy e dolgozatok eredményeit ismertetni tudjuk, néhány definíciót és jelölést bocsátunk előre. Legyen $x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn}$ tetszőleges n elemű pontsorozat a $[-1, +1]$ intervallumban $(n = 1, 2, \ldots)$. Az $X = \{x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn};\ n = 1, 2, \ldots\}$ pontrendszert az interpoláció *alappont-rendszer*ének nevezzük. Legyen

$$\omega_n(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - x_{nj}) \tag{24}$$

és

$$l_{nj}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_{nj})(x - x_{nj})} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{25}$$

Az $l_{nj}(x)$ függvényeket a Lagrange-interpoláció *alapfüggvényeinek* nevezzük. Legyen $f(x)$ a $[-1, +1]$ intervallumban definiált függvény. Az $f(x)$ függvénynek a X alappontrendszerre vonatkozó n-edik Lagrange-interpolációs polinomjának azt az $L_n(f; X)$ $(n-1)$-edfokú polinomot nevezzük, amely az $x_{n1}, \ldots, x_{nn}$ pontokban megegyezik $f(x)$-szel; ez a polinom

$$L_n(f; X) = \sum_{j=1}^{n} f(x_{nj}) l_{nj}(x) \tag{26}$$

alakba írható.

A lineáris operációk általános elméletéből ismert *Banach—Steinhaus* tétel szerint annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy megadott x_0-ra az $L_n(f; x_0)$ számsorozat minden folytonos $f(x)$ függvény esetében konvergáljon $f(x_0)$-hoz, az, hogy az

$$A_n(x_0) = \sum_{j=1}^{n} |l_{nj}(x_0)| \tag{27}$$

számsorozat korlátos legyen; ez a számsorozat azonban semmilyen X alappontrendszer mellett nem korlátos minden x_0-ra $(-1 < x_0 < +1)$ sőt, az

$$A_n = \operatorname*{Max}_{-1 \leqq x \leqq +1} A_n(x) \tag{28}$$

ún. *Lebesgue-állandók* legalább $\log n$ rendben tartanak végtelenhez. A Lagrange-interpoláció a közönséges konvergencia tekintetében tehát „rossz". A Fourier-sorokkal való analógia kézenfekvővé teszi azt a kérdést, hogyan viselkednek a Lagrange-féle interpolációs polinomok a négyzetes átlagkonvergencia szempontjából, vagyis, hogy igaz-e minden folytonos $f(x)$ függvényre (esetleg még tágabb függvénycsaládokra), hogy

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-1}^{+1} (f(x) - L_n(f; x))^2 dx = 0. \tag{29}$$

Erdős és *Turán* első cikkükben bebizonyították, hogy ha alappontrendszerként egy pozitív alsó korláttal bíró integrálható súlyfüggvényű ortogonális polinomrendszer gyökeit választják, melyek speciális esetekben már *Gauss* és *Jacobi* vizsgálataiban szerepelnek, akkor (28) minden folytonos, sőt minden korlátos és Riemann-integrálható $f(x)$ függvényre érvényes. Meglepő, hogy e kérdést előzőleg nem vizsgálták meg. (29)-ből következik, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{+1} L_n(f, x)dx = \int_{-1}^{+1} f(x)dx$$

tehát (29) egyben általánosítása *Stieltjes, Fejér, Pólya, Szegő* és mások, a mechanikus kvadratúrára vonatkozó tételeinek is.

Az interpoláció elméletében általában az interpoláció alappontjai vannak adva és vizsgálják a kapott polinomok tulajdonságait. *Fejér*től való azon észrevétel, hogy bizonyos esetekben az interpoláció alapfüggvényei az alappontok explicit ismerete nélkül is tanulmányozhatók és éppen ezekből vonható le elegánsan következtetés az interpoláció alappontjainak eloszlására. Így adott pl. pár soros bizonyítást azon tételre, hogy az n-edik Legendre-polinom két konzekutív gyökének távolsága $\leqq \varepsilon$, hacsak $n > n_0(\varepsilon)$. *Erdős* és *Turán* a [16] és [22] dolgozataikban ezen gondolatot a véges intervallumon egy súlyfüggvényre ortogonális polinomok általános elméletévé egészítették ki. E tárgyalásmód különösen a gyökeloszlás vizsgálatában vezetett más úton eddig el nem ért eredményekhez; így pl. megmutatták, hogy ha a $p(x)$ súlyfüggvény $(-1, +1)$-ben folytonos és itt $p(x)\sqrt{1-x^2} \geqq M > 0$, akkor a $p(x)$-re ortogonális n-edik polinom gyökeit $x_{n\nu} = \cos \vartheta_{n\nu}$ alakban írva $n > M_0(\varepsilon)$-ra az $\varepsilon \leqq \vartheta \leqq \pi - \varepsilon$ közben $n(\vartheta_{n,\nu+1} - \vartheta_{n,\nu}) \to \pi$.

A [79] dolgozatban *Erdős* és *Turán* azt az általánosan elterjedt nézetet cáfolják meg, hogy a Lagrange-interpoláció konvergencia-tulajdonságai szempontjából kizárólag a (28) Lebesgue-konstansok nagyságrendje a mérvadó. Megmutatják, hogy különbséget kell tenni „durva" és „finom" konvergenciatulajdonságok között, és bár az első csoportba tartozó tulajdonságok valóban csak a Lebesgue-konstansoktól függnek, azonban a második csoportra ez nem áll. Így például, ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log A_n}{\log n} = \beta \qquad (0 < \beta < 1) \tag{32}$$

akkor, mint *Fejér* megmutatta, ha $f(x)$ γ-rendű Lipschitz-feltételnek tesz eleget, ahol $\gamma > \beta$, az $f(x)$ függvényre a Lagrange-interpoláció egyenletesen konvergens; mármost *Erdős* és *Turán* kimutatják, hogy ha $\gamma < \frac{\beta}{\beta+2}$, akkor minden (32)-nek eleget tevő alappontrendszerhez van olyan $f(x)$ γ-adrendű Lipschitz-feltételnek eleget tevő függvény, amelyre a Lagrange-interpoláció nem konvergens; ezzel szemben, ha $\beta > \gamma > \frac{\beta}{\beta+2}$, akkor az X mátrix finomabb tulajdoságaitól függ, hogy minden γ-adrendű Lipschitz-feltételnek eleget tevő függvényre egyenletesen konvergens-e a Lagrange-inter poláció, vagy nem.

A [80], [90], [98], [101], [102], [105], [106] (ma sem lezárt) dolgozatsorozat, amelynek egyes dolgozatait *Turán* -*Surányi János*sal, *Balázs János*sal, ill. *Egerváry Jenő*vel együtt írta, az ún. hézagos vagy (0, 2) interpolációval foglalkozik. Ismeretes, hogy az ún. Hermite-interpolációnál olyan polinommal közelítünk meg egy adott $f(x)$ függvényt, amelynek, amellett, hogy az alappontrendszer $x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn}$ pontjaiban megegyezik a függvénnyel, ugyanezen pontokban az *első* (vagy az első r konzekutív) deriváltjának értéke is elő van írva. *Turán* mármost azt a természetes kérdést vetette fel, (amelyet meglepő módon előzőleg nem vizsgáltak meg alaposan, bár a kérdés már *Birkhoff* és *Pólya* egy munkájában fel lett vetve), hogy milyen tulajdonságai vannak annak az interpolációs eljárásnak, amelynél a függvényérték mellett csak a második derivált értékeit írjuk elő, az első deriváltét viszont nem. Kiderült, hogy bizonyos értelemben az a legmegfelelőbb alappontrendszer, amikor az $x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn}$ pontok az $(1-x^2)P'_{n-1}(x)=0$ egyenlet gyökei, ahol $P_n(x)$ az n-edik Legendre-polinom. Ez esetben, ha n páros, bárhogy írva elő az $x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn}$ pontokban a függvényértékeket és a második derivált értékeit, létezik egy és csak egy legfeljebb $2n-1$-rendű polinom, amely e feltételeknek eleget tesz [80]; e polinom explicit alakban előállítható [90]; ha $f(x)$ olyan differenciálható függvény, amelynek deriváltjának $\omega(t)$ folytonossági modulusára az $\int_0^h \frac{\omega(t)}{t} dt$ integrál véges és a második deriváltakra előírt értékek $o(n)$ nagyságrendűek, akkor az említett interpolációs polinomok egyenletesen konvergálnak $f(x)$-hez [98]. E vizsgálatok eredményeinek a szerzők a Sturm—Liouville típusú másodrendű differenciálegyenletek elméletében való alkalmazását helyeztek kilátásba.

A [102] és [105] dolgozatok a Legendre-, Laguerre- és Hermite-polinomok gyökeiből álló alappontrendszerek újszerű jellemzését tartalmazzák, az interpolációs polinomok *stabilitási tulajdonság*ai segítségével. Kiderült, hogy az említett klasszikus alappontrendszerek bizonyos tekintetben optimálisak. A „stabilitás” itt úgy értendő, hogy ha az előírt függvényértékeket legfeljebb ε-nal megváltoztatom, úgy az interpolációs polinom az egész intervallumban egyenletesen legfeljebb ε-nal változik meg, ami a numerikus számítások szempontjából nyilvánvaló jelentőséggel bír. Az említett dolgozatok azon stabilis interpolációs eljárások jellemzésével és tulajdonságaival foglalkoznak, melyek a „leggazdaságosabbak" abban az értelemben, hogy az alapfüggvények fokszámainak összege minimális. Kitűnik, hogy a minimális fokszámot (amely a $(-1, +1)$ intervallum esetében $2(n-1)^2$, a $(0, \infty)$ intervallum esetén $(n-1)(2n-1)$ és a $(-\infty, +\infty)$ intervallum esetén $n(2n-2)$) csak úgy lehet elérni, ha az említett klasszikus polinomok gyökeit választjuk alappontokul, és ez esetben a „leggazdaságosabb" stabilis interpolációs polinomok minden korlátos és folytonos függvény esetében az alapintervallum minden véges részintervallumában egyenletesen konvergálnak a függvényhez.

Turán interpolációelméleti dolgozataira a kérdésfeltevések eredetisége, a nyert eredmények eleganciája és az ortogonális polinomok elméletének igen mélyreható ismerete jellemző. E munkák igen szép visszhangot váltottak ki; számos hazai és külföldi matematikus kapcsolódott be pl. a (0, 2)-interpoláció vizsgálatába.

Megjegyezzük, hogy *Turán* az interpolációelméletre vonatkozó mélyreható ismereteit a hatványösszeg-módszer fejlesztése során is felhasználta; több, a hatványösszegekre vonatkozó tételének bizonyításában alkalmaz interpolációelméleti meggondolásokat. (L. pl. [67], 6—8. §.)

Turán (és munkatársai) fentemlített interpolációelméleti munkáival számos elismert monográfia és tankönyv foglalkozik; ezek közül megemlítjük *Szegő Gábor* ortogonális polinomokról írt híres monográfiáját, továbbá *I. L. Geronimusz, V. A. Goncsarov, A. F. Timan, I. P. Natanszon* szovjet matematikusok könyveit.

D) A D) csoportba sorolt dolgozatok közül a [20]-ról már szóltunk. Ki kell továbbá emelnünk a [49] dolgozatot, amelyben *Turán* a

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{33}$$

Legendre-polinomokra vonatkozólag többek közt bebizonyítja az igen szép és hasznos

$$P_n^2(x) - P_{n-1}(x) P_{n+1}(x) \geqq 0 \quad \text{ha} \quad -1 \leqq x \leqq +1 \tag{34}$$

egyenlőtlenséget. Ezt az eredményt *Turán* még 1946-ban találta és levélben közölte *Szegő Gáborral*; jellemző arra, hogy *Szegő* milyen érdekesnek találta ezt az eredményt, hogy ő maga (34)-re *négy* új bizonyítást adott és azt több irányba általánosította. A kérdésnek azóta rendkívül nagy irodalma támadt; oldalakat tenne ki azon dolgozatok jegyzéke, amelyek *Turán* (34) alatti egyenlőtlensége hatására jöttek létre. A (34) egyenlőtlenség *Turán*nak távolról sem a legjelentősebb, de kétségtelenül a legtöbbet idézett eredménye. Jellemző, hogy egy amerikai matematikai intézet vezetője vagy 10 év előtt panaszkodott *Erdős Pál*nak, hogy intézetének tagjai *csak* a Turán-féle egyenlőtlenséggel, ill. annak különböző általánosításaival foglalkoznak, és nem képes rávenni őket, hogy e témán kívül — melynek érdekességét és jelentőségét persze ő sem tagadta — mással *is* foglalkozzanak. Anélkül, hogy a (34) egyenlőtlenség és az ahhoz kapcsolódó örvendetesen szélesen kibontakozott kutatási irány jelentőségét kétségbe vonnánk, mégis úgy érezzük, hogy abban, hogy *Turán*nak ez a valóban nagyon szép tétele nagyobb visszhangot váltott ki, mint pl. sokkal mélyebb analitikus számelméleti eredményei, az a körülmény is szerepet játszott, amire fentebb már utaltunk, hogy a könnyebb „vadászterületek" több kutatót vonzanak. Persze, a „könnyű" vadászterületen is lehet találni nehéz és mély problémákat — erre jó példát adnak *Szegő Gábor* legújabb vizsgálatai. *Szegő Gábor* ezévben a Matematikai Kutató Intézetben tartott előadássorozatának témájául éppen *Turán* egyenlőtlenségéhez kapcsolódó vizsgálatait választotta és ezen előadások során igen érdekes, meglepő és a kiindulóponttól, vagyis a (34) egyenlőtlenségtől igen messzire elvezető, jelentős új eredményeiről számolt be, melyeket részben *S. Karlin*nal együtt talált.

Igen jelentős, és eddig még csak kis részben kiaknázott gondolatokat fejt ki *Turán* az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadásában [64]. *Turán* itt „funkcionális algebrának", (másutt, pl. [104]-ben az algebrai egyenletek analitikus elméletének) nevezi azt a kutatási irányt, amely egy polinom explicit előállításaiból e polinom gyökeire vonatkozólag levonható következtetésekkel foglalkozik. Ezen irány klasszikus eredményei szinte kizárólag a polinomok szokásos — *Turán* által *Vieta*-félének nevezett

$$V(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \tag{35}$$

előállításában szereplő a_k együtthatókból következtetnek a polinomok gyökeinek elhelyezkedésére, pl. a gyökök valós voltára. A *Turán* által kitűzött program mármost abban áll, hogy polinomok másféle előállításaiból, pl. Csebisev-, Legendre-, Laguerre- vagy Hermite-polinomok szerinti kifejezéseinek együtthatóiból igyekezzünk a polinom gyökeinek elhelyezkedésére következtetni. *Turánt* e kérdésfeltevésre is a Riemann-sejtésre vonatkozó kutatásai vezették; a Riemann-sejtés ugyanis úgy is fogalmazható, hogy a $\xi\left(\frac{1}{2}+iz\right)$ transzcendens egész függvénynek, ahol $\xi(s)$ a (4) által definiált függvény, az összes gyökei valósak. E függvénynek pl. a Hermite-polinomok szerinti kifejtése explicite megadható és nevezetes tulajdonságokkal bír (pl. együtthatói váltakozó előjelűek). Mármost igaz a következő tétel, (amelyet egész más formában és céllal *Pólya György* vett észre először): ha a (35) polinom összes gyökei valósak, akkor az ugyanazokkal az együtthatókkal képzett

$$H(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k H_k(z) \tag{36}$$

polinom összes gyökei is valósak, ahol $H_n(x)$ az n-edik Hermite-polinom, vagyis

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \qquad (n=0,1,\ldots). \tag{37}$$

Ez azt jelenti, hogy minden olyan, az a_k együtthatókkal kifejezett kritérium, amely egy (35) alakú polinom összes gyökeinek valós voltát biztosítja, automatikusan a (36) alatti Hermite-polinomok szerint kifejtett polinom összes gyökeinek valós voltát is biztosítja; ez megfordítva nem igaz és így bizonyos értelemben „könnyebb" egy csupa valós gyökű polinomról Hermite-polinomok szerinti kifejezése alapján kimutatni, hogy valóban minden gyöke valós, mint a szokásos (Vieta-féle) alakjából. *Turán* több új kritériumot is talált arra, hogy a (36) polinom gyökei mind valósak, (ill. általánosabban, hogy egy a valós tengelyre szimmetrikus sávban fekszenek). Ezek közül csak a következőt említjük: ha

$$P(z)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu c_\nu H_{2\nu}(z), \tag{38}$$

ahol a c_ν együtthatók pozitívak és $c_\nu^2 \geqq 4c_{\nu-1}c_{\nu+1}$, akkor $P(z)$ összes gyökei valósak. (L. [104]).

Nem hagyhatjuk említés nélkül *Turán*nak egy másik, szintén e témakörbe tartozó egyszerű, de igen elegáns és hasznos eredményét, amely egy valós együtthatós polinom pozitív gyökeinek számára a Descartes-féle jelszabály és annak számos általánosítása által adott felső becslést egészíti ki *alsó* becsléssel. E célból a polinom Laguerre-polinomok szerinti kifejezését vizsgálja meg. Ha

(39) $$P(x)=\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu L_\nu(x),$$

ahol $L_\nu(x)$ a ν-edik Laguerre-polinom, azaz

(40) $$L_\nu(x)=\frac{e^x}{\nu!}\frac{d^\nu}{dx^\nu}(x^\nu e^{-x}) \qquad (\nu=0,1,\ldots),$$

akkor *Turán* tétele szerint $P(x)$ jelváltásainak száma a pozitív féltengelyen legalább akkora, mint a $b_0, \Delta b_0, \Delta^2 b_0, \ldots, \Delta^n b_0$ számsorozat jelváltásainak száma, ahol $\Delta b_0=b_0-b_1$ $\Delta^2 b_0=b_0-2b_1+b_2$ és általában

(41) $$\Delta^k b_0=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}b_j \qquad (k=0,1,\ldots,n).$$

E tételt, amely az egyetlen a Descartes-jelszabályhoz hasonló típusú és a pozitív gyökök számára alsó becslést adó eredmény, *Turán* igen elegánsan vezeti le *Fejér*nek egy tételéből, amely szerint egy függvény $(0, a)$ intervallumbeli jelváltásainak száma legalább akkora, mint e függvény a $(0, a)$ intervallumon vett momentumainak sorozatában előforduló jelváltások száma.

E) Áttérünk *Turán* komplex függvénytani, általános sorelméleti és a Fourier-sorok elméletére vonatkozó munkáira. Bár az említett három tárgykör mindegyike a matematikának önálló fejezete, *Turán* idevágó dolgozatai annyira összefüggnek, hogy könnyebb azokat együtt tárgyalni. Az e csoportba sorolt dolgozatok egy korábbi részén erősen érezhető *Fejér Lipót* hatása. Így a [15] dolgozat, amely Fourier- és hatványsorok Cesàro-közepeinek monotonitási tulajdonságaival foglalkozik, hasonlóképpen a [17], [32] és [62] dolgozat közvetlenül kapcsolódnak *Fejér* eredményeihez. Fontos eredményt tartalmaz a [35] dolgozat. Ismeretes, hogy *Fejér* tételeit *Hardy* és *Littlewood* a következőképpen élesítették: ha $f(x)$ egy a $(0, 2\pi)$ intervallumban értelmezett folytonos függvény és $s_\nu(x)$ jelöli $f(x)$ Fourier-sorának ν-edik részletösszegét, akkor

(42) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}|s_k(x)-f(x)|^2=0.$$

Carleman kimutatta, hogy a 2 kitevő (42)-ben bármilyen nagy p pozitív számmal is pótolható. *Grünwald Géza* vetette fel a kérdést, hogy létezik-e olyan $k(n)$ $+\infty$-hez tartozó számsorozat, hogy minden $f(x)$ folytonos függvényre és minden x-re

$$(43)\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} |s_k(x)-f(x)|^{k(n)}=0.$$

Mármost *Turán* bebizonyította, hogy ilyen $k(n)$ számsorozat nem létezik.

A [103] dolgozatban *Turán* igen érdekes, hatványsorokra vonatkozó, problémákat vet fel. Azt kérdezi, hogy ha az

$$(44)\qquad f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

hatványsor az egységkörben reguláris és ha a (44) sor $z=1$-re konvergens, akkor az $f(z)$-ből a változó lineáris tört transzformációjával képezett

$$(45)\qquad f_1(z)=f\left(\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

hatványsor ($|z_0|<1$) konvergál-e a $z=1$-nek megfelelő $\frac{1+z_0}{1+\bar{z}_0}$ pontban? Más szóval vajon a kerületi konvergencia konform invariáns-e? *Turán* megmutatta, hogy meglepő módon e kérdésre a válasz negatív. Újabban e kérdéskörben *Álpár László* talált érdekes tételeket. Szintén a hatványsorok a konvergenciakörön való viselkedésének nehéz és érdekes kérdésére vonatkozik a [114] dolgozat, amelyben azt bizonyítja be, hogy az $f(z)$ az egységkörben reguláris függvény (44) alatti hatványsorának az együtthatóira vonatkozó $|a_k|=O\left(\frac{1}{k}\right)$ feltételt (amelyből, mint jól ismeretes, következik, hogy (44) magán az egységkörön is konvergens) az $|a_k|=O\left(\frac{\omega(k)}{k}\right)$ feltétellel pótolva, ahol $\omega(k)$ tetszőleges lassan monoton növekvőleg végtelenhez tartó számsorozat, már nem áll fenn az, hogy a (44) sor magán az egységkörön is mindig konvergens. A [35], [37], [103] és [114] dolgozatokból látható, hogy *Turán* egyik erős oldala a szellemes ellenpéldák konstrukciója.

F) Utoljára hagytuk *Turán* kombinatorikai és gráfelméleti munkáit. Ez a sorrend azonban semmiképpen sem jelent értékelést, mert *Turán*nak ezek a dolgozatai eredetiségben és jelentőségben egyáltalán nem maradnak el többi munkái mögött. *Turán* sokoldalú munkásságáról alkotott összkép nem volna teljes, ha kombinatorikai és gráfelméleti munkáit figyelmen kívül hagynánk. E munkákra ugyanaz az eredeti gondolkodásmód és problémameglátási készség és ugyanaz a brilliáns bizonyítási technika jellemző, mint a számelméletre, analízisre és az algebrára vonatkozó munkáira.

Kezdem rögtön egy olyan *Turán* által felvetett problémával, amelyről ő maga semmit sem publikált, de amely azóta szerteágazó és jelentős elméletté terebélyesedett. *Turán* még a 30-as évek közepén interpolációelméleti vizsgálataival kapcsolatban a következő kérdést vetette fel: ha egy intervallum minden pontjához hozzá van rendelve ugyanezen intervallum véges sok más pontja, megadható-e ezen intervallumban végtelen sok olyan pont, hogy ezek közül egyik sincs a másikhoz hozzárendelve. E kérdés úgy is fogalmazható, hogy ha egy kontinuum számosságú szögpontból álló irányított gráfban minden pont rendje (valenciája) véges, van-e a gráfban végtelen sok független pont? E kérdést *Erdős Pál* és tőle függetlenül *Grünwald Géza* válaszolták meg, akik bebizonyították, hogy *Turán* kérdésére a válasz igenlő. *Lázár Dezső*nek azt is sikerült bebizonyítani, hogy létezik kontinuumnyi számosságú független pont. *Lázár* dolgozata nagy hatást váltott ki, eredményeit *Sierpinski, Sophie Piccard* és *Ruziewicz* általánosították és a *Turán* által az interpolációelmélettel kapcsolatban felvetett kérdésből a halmazelméletnek (ill. a végtelen gráfok elméletének) *„binér relációk elmélete”* elnevezés alatt ismertté vált fejezete alakult ki.

A háború utáni években főként *Fodor Géza, Erdős Pál* és *Hajnal András* fejlesztették tovább ezt a problémakört. A legújabb eredmény e téren, hogy *Hajnal András* bebizonyította *Ruziewicz* sejtését.

Szekeres és *Turán* [13] dolgozata (lásd továbbá [21] és [84]) *Sylvester* azon sokak által diszkutált problémájához kapcsolódik, hogy mely n természetes számokra adható meg olyan $+1$ és -1 elemekből álló n-edrendű négyzetes mátrix, amelynek sorvektorai páronként ortogonálisak? Jelölje M_n a ± 1 elemekből álló n-edrendű négyzetes mátrixok determinánsai abszolút értékének maximumát. *Hadamard* egy tétele szerint $M_n \leqq n^{\frac{n}{2}}$ és egyenlőség azokra és csak azokra az n értékekre áll fenn, amelyekre létezik ± 1 elemekből álló ortogonális sorokból álló mátrix. Mármost *Turán* és *Szekeres* az összes, a ± 1 elemekből álló n-edrendű mátrixok determinánsainak kiszámítják a 2- és 4-edfokú hatványközepeit, ezúton bebizonyítják, hogy minden n-re $M_n \geqq \sqrt{n!}$. Ha hasonló úton sikerülne a szóbanforgó determinánsok $2k$-adik hatványközepeit végtelen sok k-ra (legalább is aszimptotikusan) kiszámítani, ezen az úton a Sylvester-féle probléma teljesen elintézhető volna.

A [84] dolgozatban e tárgyhoz visszatérve a negyedik hatványok összegére jóval egyszerűbb meghatározási módot mutat be, mely továbbvihetőnek látszik.

Szintén egy új kutatási irány kiindulópontját képezte a [24] dolgozat. Ebben *Turán* azt a kérdést vizsgálja, hogy maximálisan hány élt tartalmazhat egy olyan n szögpontú gráf,* amely nem tartalmaz k-szögpontú teljes részgráfot. *Turán* e problémát teljes egészében megoldotta, amennyiben nemcsak a szóbanforgó maximális élszámot határozta meg (ez a szám

$$M_k(n) = \frac{(k-2)}{2(k-1)}(n^2-r^2)+\binom{r}{2}, \quad \text{ahol} \quad r = n-(k-1)\left[\frac{n}{k-1}\right]\Bigg),$$

hanem meghatározta a lényegileg egyetlen extrémális gráfot is. *Turán* tétele úgy is fogalmazható, hogy ha egy n-szögpontú gráfnak több mint $M_k(n)+1$ éle van, akkor bizonyosan tartalmaz egy k szögpontú teljes részgráfot.

Hasonló kérdés másfajta részgráfokkal kapcsolatban is felvethető, és *Turán* említett dolgozatának hatására mások is foglalkoztak hasonló problémákkal. A gráfelméletben ma szokás általában beszélni *Turán-féle küszöbszám*okról, a következő, általános értelemben: Legyen G egy tetszőleges gráf; jelölje $M_n(G)$ azt a legkisebb természetes számot, amelyre minden n szögpontú és több mint $M_n(G)$ élből álló gráf tartalmaz egy olyan részgráfot, amely izomorf a G gráffal; az $M_n(G)$ számot nevezik a G gráffal izomorf részgráf fellépését biztosító Turán-féle küszöbszámnak.

Egy nemrégiben *Erdős Pál*lal közösen írt dolgozatunkban számos G gráfra hasonlítjuk össze az $M_n(G)$ Turán-küszöböt azzal az — általában lényegesen kisebb — $M_n(G, p)$ ún. *véletlen küszöbszám*mal, amely úgy van definiálva, hogy ha a gráf $M_n(G, p)$-nél több élt tartalmaz és ezen éleket találomra választjuk meg olymódon, hogy az élek összes lehetséges választásai egyformán valószínűek, akkor a gráf, ha nem is bizonyosan, de p-t meghaladó valószínűséggel tartalmaz G-vel izomorf részgráfot $(0<p<1)$. Az $M_n(G, p)$ p-valószínűségű véletlen küszöbszám a Turán-féle küszöb általánosításának tekinthető, hiszen nyilván $M_n(G, 1) = M_n(G)$. *Turán* maga az általa kezdeményezett gráfelméleti kutatási irányhoz a [70] és a *T. Sós Verá*val és *Kővári Tamás*sal írt [71] dol-

* Itt és a következőkben nem-irányított, hurkot és parallel élt nem tartalmazó gráfokról van szó.

gozatokban tért újból vissza. Utóbbi dolgozat eredményét a fenti jelöléssel úgy lehet kifejezni, hogy $M_n(G)$-re ad felső becslést, ahol G egy ún. páros körüljárású telített gráf, azaz olyan $2j$ szögpontú gráf, amelynek pontjainak halmazát lehet úgy két j-elemű részhalmazra bontani, hogy a nem ugyanabba a részhalmazba tartozó pontpárok és csak ezek vannak G-ben éllel összekötve.

Vázlatos ismertetésünk végére értünk. Még csak *Turán* munkásságának két jellemző vonását szeretném jobban kiemelni. Az egyik az a fáradhatatlan kitartás és céltudatos erőfeszítés, amellyel szinte megszakítás nélkül, semmilyen nehézségtől sem visszariadva szívósan megy lépésről-lépésre előre, a konkrét részletkérdések megoldása során soha nem tévesztve szem elől távolabbi célkitűzéseit. Nem hiszem, hogy lett volna olyan nap az elmúlt 30 év alatt, amelyen *Turán* ne foglalkozott volna valamit matematikával, tekintet nélkül a körülötte lejátszódó, időnként viharos történelmi eseményekre és a mindennapi élet örömeire és gondjaira (amelyek őt egyébként épp oly közelről érintik, mint bárki mást). Közismert például, hogy még a háború alatt, rendkívül mostoha és méltatlan körülmények között, mint munkaszolgálatos is rendszeresen foglalkozott matematikával, ha más alkalom nem volt, akkor menetelés közben vagy egy távirópózna tetején ülve. Tanúja voltam egyszer, hogy egy tanítványa megkérdezte *Turán*tól, mi a titka annak, hogy az események sodrában, a legkedvezőtlenebb körülmények között is képes matematizálni. „Nincs ennél egyszerűbb dolog" — válaszolta *Turán* — „ehhez csak az szükséges, hogy az embert *igazán* érdekeljék a matematikai problémák". Ebben a mondatban valóban benne van *Turán* sikereinek egyik „titka". *Turán* matematikai munkásságának másik jellemző vonása az a páratlan problémameglátó képessége, amelyre a fentiekben többször utaltam. Arról van szó, hogy impozáns átfogó — teljes joggal enciklopédikusnak nevezhető — tudása ellenére, ha egy problémát alaposabban szemügyre vesz, nem hagyja magát a legcsekélyebb mértékben sem befolyásolni azáltal, hogy hogyan *szokás* a szóbanforgó problémát megközelíteni; soha nem tesz egy lépést sem kitaposott utakon anélkül, hogy meggondolná, hogy valóban ez az egyedüli elképzelhető és a leginkább célravezető út-e; érthető, hogy ha valaki *így* halad előre, az gyakran fedez fel új ösvényeket, amelyek közül egyesek idővel a tudomány új országútjaivá válhatnak. *Turán* eredeti, az új módszerek és utak keresésére irányuló kérdésfeltevései teszik munkáit olyan frissé és gondolatébresztővé; munkáit olvasva különösen erőteljesen érezzük azt, hogy a tudományban nem léteznek véglegesen lezárt, „elintézett" problémák és nincsenek „egyedül üdvözítő" eljárások.

Turán munkásságának ezek a vonásai megmagyarázzák azt is, hogy előadásai, a vele való matematikai beszélgetések miért hatnak annyira ösztönzőleg mindenkire.

Befejezésül azt kívánjuk *Turán Pál*nak, hogy jó egészségben és töretlen alkotókedvvel folytassa tovább nagysikerű, egyre feljebb ívelő matematikai munkásságát.

ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ П. ТУРАНА

А. Реньи

THE MATHEMATICAL WORK OF P. TURÁN

A. Rényi

Turán Pál dolgozatainak jegyzéke

1. Über das zweite Hauptproblem der „Factorisation Numerorum" (Szekeres Györggyel), *Acta Litt. ac Scient. Szeged* 6 (1933) 143–154.
2. On a problem in the elementary theory of numbers. (Erdős Pállal) *Amer. Math. Monthly* **41** (1934) 608–611.
3. Az egész számok prímosztóiról. *Math. és Fiz. Lapok* (1934) 103–130.
4. On a theorem of Hardy and Ramanujan. *Journ. of the Lond. Math. Soc.* **9** (1934) 274–276.
5. Über die arithmetischen Mittel der Fourierreihen. *Journ. of the Lond. Math. Soc.* **10** (1935) 277–280.
6. Über einige Verallgemeinerungen eines Satzes von Hardy und Ramanujan. *Journ. of the Lond. Math. Soc.* **11** (1936) 126–133.
7. Ein zahlentheoretischer Satz. (Erdős Pállal), *Mitteilungen des Forschungsinstituts für Math. und Mech. Toms. Bd.* **I.** p. 101–103.
8. Über die Vereinfachung eines Landauschen Satzes. (Erdős Pállal) *Mitt. der Forsch. Inst. für Math. und Mech. Tomsk Bd.* **I.** (1935) 144–147.
9. On some sequences of integers. (Erdős Pállal), *Journ. of the Lond. Math. Soc.* **11** (1936) 261–264.
10. On interpolation, I. (Erdős Pállal), *Ann. of Math.* **38** (1937) 142–155.
11. Über die Primzahlen der arithmetischen Progression, I. *Acta Litt. ac. Scient. Szeged* **8** (1937) 226–235.
12. Über den Blochschen Satz (Grünwald Gézával) *Acta Litt. ac Scient. Szeged* **8** (1937) 236–240.
13. Egy szélsőértékfeladat a determinánselméletben. (Szekeres Györggyel) *Math. és Term. Tud. Értesítő* (1937) 796–806.
14. Über Interpolation. (Grünwald Gézával) *Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa* (1938) 137–146.
15. Über die monotone Konvergenz der Cesaro-Mittel bei Fourier- und Potenzreihen. *Proc. of the Cambr. Phil. Soc.* **34** (1938) 134–143.
16. On interpolation, II. (Erdős Pállal) *Ann. of Math.* **39** (1938) 702–724.
17. Über die Partialsummen der Fourierreihe. *Journ. of the Lond. Math. Soc.* (1938) 278–282.
18. Über die Ableitung von Polynomen. *Compositio Math.* (1939) 88–95.
19. Über die Primzahlen der arithmetischen Progression, II. *Acta Litt. Ac. Scient.* Szeged Bd. **9** (1939) 187–192.
20. On uniformly dense distribution of certain sequences of points. (Erdős Pállal) *Ann. of Math. Vol.* **41** (1940) 163–173.
21. Determinánsokra vonatkozó szélsőértékfeladatok. *Math. és Term. Tud. Értesítő* (1940) 95–105.
22. On interpolation, III. (Erdős Pállal) *Ann. of Math.* **41** (1940) 510–553.
23. Über die Verteilung der Primzahlen, I. *Acta Litt. ac Scient.* Szeged (1941) 81–104.
24. Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról. *Math. és Fiz. Lapok* (1941) 436–452.
25. On a problem of Sidon in additive number-theory and on some related problems. (Erdős Pállal) *Journ. of London Math. Soc.* **16** (1941) 212–215.

26. Über die Wurzeln der Dirichletschen L-Functionen. *Acta Litt. ac Scient.* Szeged. **10** (1943) 188–201.
27. On rational polynomials. *Acta Univ.* Szeged (1946) 106–113.
28. On a theorem of Littlewood. *Journ of the London Math. Soc.* (1946) 268–275.
29. Sur la théorie des fonctions quasi-analytiques. *Comptes Rendus* Paris (1947), p. 1750–1752.
30. On the gap-theorem of Fabry. *Hungarica Acta Math.* (1947) Bd. **I.** p. 21–29.
31. On Riemann's hypothesis. *Acad de Sciences de l'URSS Bull.* (1947) 197–263.
32. On power-series whose coefficients form a multiply monotonic sequence. *Lőw Immanuel emlékkönyv.* (1947) 300–305.
33. On some approximative Dirichlet polynomials in the theory of the zeta-function of Riemann. *Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Mat.—Fys. Meddelelser.* Bd. **XXIV.** no. 17 (1948) 1–36.
34. On certain exponential sums. *Indagationes Math.* Vol. **X.** fasc. 2 (1948) 343–352.
35. On the strong summability of the Fourier-series. *Journ. of Indian Math. Soc.* Vol. **XII** (1948) 8–12.
36. On some new questions on the distribution of prime-numbers. (Erdős Pállal) *Bull. of Amer. Math. Soc.* Vol. **54** (1948) 371–378.
37. On some example in the theory of power series. *Bull. of Amer. Math. Soc.* Vol. **54** (1948) 932–936.
38. On a problem in the theory of uniform distribution. (Erdős Pállal) *Indagationes Math.* Vol. **X.** fasc. 5 (1948) 370–378 és 406–413.
39. On Descartes-Harriot's rule. *Bull. of Amer. Math. Soc.* **55** (1949) 797–800.
40. On the distribution of real-roots of almost periodical polynomials. *Publ. Math. Debr. T.* **I.** Fasc. I. (1949) 38–41.
41. Megemlékezés. *Matematikai Lapok* **I.** 1 (1949) 3–16.
42. Remark on a theorem of Fejér. *Publ. Math. Debr. T.* **I.** Fasc. 2 (1949) 95–97.
43. Fejér Lipót matematikai munkássága. *Mat. Lapok.* **I.** 3 (1949) 160–170.
44. On a new method in the analysis with applications. *Casopis pro pestováni mat. a fys. roc.* **74** (1949) 123–131.
45. On the distribution of roots of polynomials. (Erdős Pállal) *Ann. of Math.* Vol. **51** (1950) 105–119.
46. On the theory of mechanical quadrature. *Acta Szeged.* **XII.** (1950) pars A. 30–37.
47. A számelmélet újabb eredményei a Szovjetunióban. *Mat. Lapok* **I.** 4 (1950) 243–266.
48. On the remainder-term of the prime-number formula. I. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **1.** 1 (1950) 48–63.
49. On the zeros of the polynomials of Legendre. *Casopis pro pest. mat. a fys. Roc.* **75** (1950) 113–122.
50. On the remainder-term of the prime-number formula. II. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **I.** 3–4 (1950) 155–166.
51. On approximative solution of algebraic equations. *Publ. Math. Debr.* **II.** 1 (1951) 26–42.
52. A note on Fermat's conjecture. *Journ. of the Ind. Math. Soc.* **XV.** Part A (March-June) (1951) (Memorial Volume to S. Pillai.) 47–50.
53. On a certain point of the kinetical gas theory. (Egerváry Jenővel) *Studia Math.* (1951) 170–180.
54. On Carlson's theorem in the theory of zeta-function of Riemann. *Acta Math. Hung.* **II.** 1–2 (1951) 39–73.
55. Magasabbfokú algebrai egyenletek közelítő megoldásáról. *MTA III. o. Közl.* **1.** 2–4 (1951) 279–287.
56. A kinetikus gázelmélet bizonyos kérdéseiről. (Egerváry Jenővel) *MTA III. o. Közl.* **I.** 2–4 (1951) 369–370.

57. Két bizonyítás Jánossy Lajos egy tételére. (Rényi Alfréddal) *MTA III. o. Közl.* I. 2–4 (1951) 369–370.
58. A függvényfogalom bevezetéséről. Litografált *K. M. kiad.* (1952)
59. Az egész számok bizonyos sorozatairól. *Középisk. Mat. Lapok* 8 (1954) 33–41.
60. On an application of the typical means in the theory of zeta-function of Riemann. *Comm. du Sém. Math. de l'Univ. de Lund. Tome supp. dédié a M. Riesz* (1952) 239–252.
61. On a property of lacunary power-series. *Acta Litt. ac Sci.* XIV. 4 (1952) 209–218.
62. On a trigonometrical sum. *Ann. de Soc. Pol. de Math.* XXV (1952) 155–161.
63. Az analízis egy új módszerének újabb alkalmazásairól. *MTA III. o. Közl.* 2 (1952) 145–153.
64. Sur l'algebre fonctionnelle. *Comptes Rendus du Prem. Congr. des Math. Hongr.* (1950) 264–290.
65. On the zeros of polynomials. (Rényi Alfréddal) *Acta Math. Hung.* 3 (1952) fasc. 4. 275–284.
66. Az analízis egy új módszeréről és annak alkalmazásáról. (Über eine Neue Methode der Analysis und ihre Anwendungen) Könyv, megj. magyarul és németül a MTA kiadásában (1953).
67. Steinhaus egy problémájáról. *Mat. Lapok.* 4. 4 (1953) 263–275.
68. A függvénytan és sorelmélet bizonyos érintkezési pontjairól. *ELTE TTK évkönyve* (1952–1953) 5–13.
69. On the theory of graphs. *Coll. Math.* 3. 1 (1954) 19–30.
70. On a problem of K. Zarankiewicz. (T. Sós Verával és Kővári Tamással) *Coll. Math.* 3. 1 (1954) 50–57.
71. Hermite-expansion and strips for zeros of polynomials. *Archiv der Math.* 5. 1–3 (1954) 148–152.
72. A kínai matematika történetének egy problémájáról. *Mat. Lapok* 5 (1954) 1–6.
73. A Riemann-féle zetafüggvény gyökeiről. (Székf. előadás) *MTA III. o. Közl.* 4 (3) (1954) 357–368.
74. A second note on Fermat's conjecture. (Dénes Péterrel) *Publ. Math. Debr.* 4. 1–3 (1955) 28–32.
75. Grünwald Géza élete és munkássága. *Mat. Lapok* 6. 1 (1955) 6–27.
76. On Lindelöf's conjecture. *Acta Math. Hung.* 5. 3–4 (1954) 146–163.
77. On a new analytical method and its applications. *Coll. Math.* 3. 2 (1955) 91–112.
78. On the role of the Lebesgue-functions in the theory of the Lagrange interpolation. (Erdős Pállal) *Acta Math, Hung.* 6. 1–2 (1955) 47–66.
79. Notes on interpolation, I. (On some interpolatorical properties of the ultrasph. polyn.) (Surányi Jánossal) *Acta Math. Hung.* 6 (1955) 67–80.
80. On some new theorems in the theory of diophantine approximation. (T. Sós Verával) *Acta Math. Hung.* 6. 3–4 (1955) 241–257.
81. On the instability of systems of differential equations. *Acta Math. Hung.* 6. 3–4 (1955) 257–271.
82. Faktoriálisos számrendszerbeli számjegyek eloszlásáról. *Mat. Lapok* 7. 1–2 (1956) 71–76.
83. On a problem in the theory of determinants. *Acta Sinica* (1955) 411–423.
84. Remark on the zeros of characteristic equations. *Publ. Math. Debr.* 4. 3–4 (1956) 406–410.
85. On the zeros of the zetafunction of Riemann. Report of an International *Colloqu. on zeta-functions. Bombay,* 1956, 17–36. (*Journ. of Indian Math. Soc.*)
86. Über eine neue Methode der Analysis. *Wiss. Zeitschr. d. Humboldt-Univ. zu Berlin,* (1955–1956) 275–279.
87. Über eine Anwendung einer neuen Methode auf die Theorie der Riemannschen Zetafunction. *Ibid.* 281–284.
88. Remark on the preceding paper of J. W. S. Cassels. *Acta Math. Hung.* 7. 3–4 (1956) 291–295.

89. Notes on interpolation, II. Explicit formulae. (Balázs Jánossal) *Acta Math. Hung.* **8.** 1–2 (1957) 201–215.
90. Remark on the theory of the quasianalytical function-classes. *Publ. of the Math. Inst. of the H. Acad. Sci.* **1.** 4 (1956) 481–489.
91. „Az analízis egy új módszeréről és annak alkalmazásairól" c. könyv kibőv. és átdolg. kínai kiadása, 1956.
92. Über lakunäre Potenzreihen. *Revue de Math. Pures et Appl.* 1 (1956) 27–32.
93. On the so-called density-hypothesis in the theory of the zetafunction of Riemann. *Acta Arithm.* **4.** 1 (1958) 31–56.
94. On a theorem of Erdős-Kac. (Rényi Alfréddal) *Acta Arith.* **4.** 1 (1958) 71–84.
95. Über die Potenzsummen komplexer Zahlen. *Archiv der Math.* **9.** 12 (1958) 59–64
96. Bizonyos szélsőértékfeladatokról. *Középisk. Mat. Lapok.* **16.** 3–4 (1958) 65–69, 97–101.
97. Notes on interpolation, III. (Convergence) (Balázs Jánossal) *Acta Math. Hung.* **9.** 1–2 (1958) 195–214.
98. On an inequality. *Annales Univ. Sci. Budap. de R. Eötvös nom. Sect. Math.* **1** (1958) 3–6.
99. Remarks on the theory of diophantine approximation. (Erdős Pállal és Szüsz Péterrel) *Coll. Math.* **6** (1958) 119–126.
100. Notes on interpolation, IV. (Inequalities). (Balázs Jánossal) *Acta Math. Hung.* **9.** 3–4 (1958) 243–258.
101. Notes on Interpolation, V. (On the stability of interpolation) (Egerváry Jenővel) *Acta Math. Hung.* **9.** 3–4 (1958) 259–267.
102. A remark concerning the behaviour of a power-series on the periphery of its convergence-circle. *Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe des Sci. Belgrade,* 1958, 19–26.
103. To the analytical theory of algebraic equations. *Izv. na Mat. Inst.* **3** (1959) 123–137.
104. Notes on interpolation, VI. (On the stability of the interpolation of an infinite interval) (Egerváry Jenővel) *Acta Math. Hung.* **10.** 1–2 (1959) 55–63.
105. Notes on interpolation, VII. (Convergence in infinite intervals) (Balázs Jánossal) *Acta Math. Hung.* **10.** 1–2 (1959) 63–68.
106. Zur Theorie der Dirichletschen Reihen. *Euler-Festband* (1959) 322–336.
107. Zur Theorie der algebraischen Gleichungen über endlichen Körpern (Rédei Lászlóval) *Acta Arith.* **V.** 2 (1959) 223–225.
108. On the infinite product-representation of functions regular and nonvanishing in the unit-circle. *Bull. de l'Acad. Pol. des Sci.* **7.** 8 (1959) 481–486.
109. On a property of the stable or conditionally stable solutions of systems of nonlinear differential equations. *Annali di Mat.* **48** (1959) 333–340.
110. A note on the real zeros of Dirichlet's L-functions. *Acta Arith.* **V.** 3 (1959) 309–314.
111. Nachtrag zu meiner Abhandlung „On some approximative Dirichletpolynomials in the theory of zeta-function of Riemann", *Acta Math. Hung.* **10.** 3–4 (1959) 277–298.
112. On the distribution of zeros of general exponential polynomials. *Publ. Math. Debr.* **7.** (1960) 130–136.
113. A hatványsorok elméletének egy kérdéséről. *Mat. Lapok.* **10.** (1959) 278–283.
114. Fejér Lipót 1880–1959. *Mat. Lapok.* **11.** (1960) 9–18.
115. On an improvement of some new one-sided theorems of the theory of diophantine approximations. *Acta Math. Hung.* **11** (1960) 299–316.
116. A theorem on diophantine approximation with application to Riemann zeta-functions. Acta Litt. ac. Sci. **21** (1960) 311–318.
117. An extremal problem in the theory of interpolation (Erdős Pállal) Acta Math. Hung. **12** (1961) p. 221–234.
118. Remark on a theorem of Erhard Schmidt. Matematica, Cluj 2(25) 1960 p. 373–378