

## EGY GRÁFELMÉLETI PROBLÉMÁRÓL

ERDŐS PÁL és RÉNYI ALFRÉD

### Bevezetés

E dolgozatban egy gráfelméleti problémával foglalkozunk, amelyre a következő kérdés vezet: megadott számú repülőtér között rendszeres (oda-vissza) légijáratokat kívánunk létesíteni oly módon, hogy bármely repülőtér-ről bármely másik repülőtérre vagy közvetlen járatral (leszállás nélkül), vagy egyetlen átszállással el lehessen jutni, azonban a repülőterek kapacitásai korlátozottak, vagyis elő van írva, hogy egy repülőtér legfeljebb hány más repülőtérrel állhat közvetlen légi kapcsolatban; kérdés, hogyan lehet a szóban-forgó légi hálózatot úgy megtervezni, hogy a fenti feltételek teljesüljenek és egyben minél kevesebb légi járatot kelljen létesíteni? E feladat gráfelméleti megfogalmazásához a következőképpen jutunk el: minden repülőtérnek feleltessünk meg egy pontot: ezek lesznek a gráf szögpontjai (vagy röviden: pontjai). Jelöljük a repülőterek számát  $n$ -nel, akkor tehát a gráfnak  $n$  pontja lesz. Két pontot kössünk össze egy (nem irányított) éllel, ha a megfelelő repülőterek között közvetlen légi kapcsolat áll fenn. Az így létrejövő (párhuzamos élek és hurkok nélküli, nem irányított) gráfra a feltételeink azt kívánják meg, hogy a pontjai fokának (valenciájának) maximuma egy megadott számmal (amelyet  $k$ -val jelölünk) legyen egyenlő és ugyanakkor a gráf „átmérője” legfeljebb 2 legyen. Egy (összefüggő) gráf átmérőjén azt a legkisebb  $d$  számot értjük, amelyre igaz az, hogy a gráf bármely két pontja összeköthető egy legfeljebb  $d$  élből álló úttal. (Útnak nevezzük a  $P_i P_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) élek sorozatát, ahol  $P_1, \dots, P_{s+1}$  a gráf különböző pontjai.) Mármost adott  $n$  és  $k$  mellett az összes, a feltételeknek eleget tevő gráfok közül (ha ilyenek egyáltalán vannak) keressük azokat, amelyek éleinek száma minimális. Ezt a minimális élszámot, amely nyilván kizárólag az  $n$  és  $k$  számoktól függ,  $F_2(n, k)$ -val fogjuk jelölni. Ha  $G_n$  jelöl egy tetszőleges  $n$  szögpontú gráfot,  $P_1, P_2, \dots, P_n$  ennek pontjait,  $v(P_j)$  jelöli a  $P_j$  pont fokát  $G_n$ -ben (vagyis  $G_n$  azon pontjainak számát, amelyekkel  $P_j$  össze van kötve egy éllel),  $d(G_n)$  jelöli a  $G_n$  gráf átmérőjét, és  $N(G_n)$  az éleinek számát, akkor tehát  $H_2(n, k)$ -val jelölve azon  $n$  adott  $P_1, \dots, P_n$  szögpontból képezhető gráfok halmazát, amelyekre  $d(G_n) \leq 2$  és  $\max_{1 \leq j \leq n} v(P_j) = k$ ,

$$(1) \quad F_2(n, k) = \min_{G_n \in H_2(n, k)} N(G_n),$$

feltéve, hogy a  $H_2(n, k)$  halmaz nem üres; ellenkező esetben legyen  $F_2(n, k) = +\infty$ . A kettes index  $F_2(n, k)$ -ban ill.  $H_2(n, k)$ -ban arra utal, hogy legfeljebb

2 átmérőjű gráfokról van szó. A feladat ugyanis nyilván általánosítható oly módon, hogy ahelyett, hogy bármely repülőtérről el lehessen jutni bármely másikra legfeljebb egy átszállással, csak annyit kötünk ki, hogy legfeljebb  $r - 1$  átszállással el lehessen jutni, ahol  $r \geq 2$ . Más szóval keressük az  $n$  szögpontú gráfok közül, amelyekben a pontok fokának maximuma  $k$  és amelyek átmérője legfeljebb  $r$ , azokat, amelyek minimális számú élből állnak. Ezt a minimális élszámot  $F_r(n, k)$ -val jelöljük, tehát

$$(2) \quad F_r(n, k) = \min_{G_n \in H_r(n, k)} N(G_n),$$

ahol  $H_r(n, k)$  azoknak a  $P_1, \dots, P_n$  szögpontokból képezett  $G_n$  gráfoknak a halmaza, amelyekre  $d(G_n) \leq r$  és  $\max_{1 \leq j \leq n} v(P_j) = k$ . (Ha  $H_r(n, k)$  üres, úgy  $F_r(n, k) = +\infty$ .)

E dolgozat 1. és 2. §-ában az  $r = 2$  esettel foglalkozunk. Az  $r > 2$  esetre vonatkozólag csak a 3. §-ban teszünk néhány megjegyzést; ezen kérdés részletes diszkussziójára egy további dolgozatban szándékozunk visszatérni.

Az 1. §-ban megvizsgáljuk az  $F_2(n, k)$  függvény viselkedését abban az esetben, ha  $n$  és  $k$  nagy számok, és  $F_2(n, k)$ -ra aszimptotikusan pontos képletet adunk meg. A 2. §-ban egy konstrukciós eljárást ismertetünk, amely bizonyos aszimptotikusan legjobb megoldásokhoz vezet.

Megjegyezzük, hogy ha találtunk egy minimális élszámú legfeljebb 2 átmérőjű  $n$  szögpontú gráfot, amelyben a pontok fokának maximuma  $k$ , és adva van  $n$  kijelölt pont, akkor ezen pontokhoz az említett gráf szögpontjait még  $n!$  különböző módon rendelhetjük hozzá. Ezen hozzárendelések közül kiválaszthatunk egy olyat, amely még valamely más szempontból is optimális. Így például ha adva vannak a repülőterek közötti távolságok, azon légi összeköttetés hálózatok közül, amelyek az adott feltételek mellett minimális számú járatból állnak, kiválaszthatjuk azt, amelynél a járatok *összhossza* minimális.

A feladat felfogható nem-lineáris programozási feladatként is. Legyen  $E = (\varepsilon_{ij})$  egy  $n \times n$ -es 1 és 0 elemekből álló szimmetrikus mátrix, amelynek diagonális elemei 1-gyel egyenlők és sorösszegeinek maximuma  $k + 1$ , továbbá

az  $E^2$  mátrix minden eleme  $\geq 1$ ; ezen feltételek mellett a  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}$  összeget kell minimalizálni.

Mi a kérdést gráfelméleti fogalmazásban vizsgáljuk.

A felhasznált módszerek mind elemiek, a probléma természetének megfelelően, a konstrukciónál azonban a véges testek, ill. véges geometriák elméletét is felhasználjuk. Ez nem az első eset, hogy gráfelméleti problémák megoldásánál a véges testek elmélete alkalmas segédeszköznek bizonyult; a gráfok aszimmetriájára vonatkozó vizsgálatainkban [1] is hasonló tapasztalatokat szereztünk. (Lásd továbbá a [2] dolgozatot.)

A 3. §-ban néhány 2 átmérőjű gráfokra vonatkozó további eredményt és néhány megoldatlan problémát is megemlítünk.

Ezúton is köszönetet mondunk GALLAI TIBORNak értékes megjegyzéseiért, amelyeket a végleges fogalmazásnál felhasználtunk.

## 1. §. Néhány egyenlőtlenség

Először azt a kérdést vizsgáljuk, hogy mely  $n, k$  számpárokra létezik egyáltalán  $n$  szögpontú, 2 átmérőjű gráf, amelyben a pontok fokának maxi-

muma  $k$ . Legyen  $G_n$  egy ilyen gráf és legyenek  $P_1, \dots, P_n$  a  $G_n$  gráf szögpontjai. Egy tetszőleges pontból, pl. a  $P_1$  pontból feltevés szerint legfeljebb  $k$  él indul ki, vagyis  $P_1$ -ből 1 hosszúságú (egy élből álló) úttal legfeljebb  $k$  pont érhető el. A  $P_1$  pontból 2 hosszúságú (két élből álló) úttal elérhető pontok száma nyilván legfeljebb akkora, mint a  $P_1$ -ből egy éllel elérhető pontokból egy éllel elérhető és  $P_1$ -től különböző pontok száma, és így  $P_1$ -ből egy vagy két élből álló úttal elérhető pontok száma legfeljebb  $k + k(k - 1) = k^2$ . Feltevés szerint azonban minden  $P_1$ -től különböző pont elérhető  $P_1$ -ből 1 vagy 2 hosszúságú úttal, tehát fenn kell állnia az

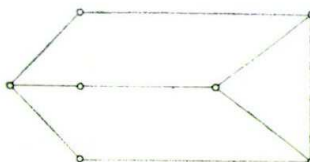
$$(1.1) \quad n \leq k^2 + 1$$

egyenlőtlenségnek. A fenti bizonyításból az is nyilvánvaló, hogy (1.1)-ben egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha minden pont fokszáma  $k$ , vagyis  $k$ -adfokú reguláris gráf esetében.

Az egyenlőség (1.1)-ben  $k = 2$  és  $k = 3$  esetben elérhető;  $k = 2$  esetben az ötszögpontú körre,  $k = 3$  esetében az ún. PETERSEN-féle gráfra (lásd 1.



1. ábra



2. ábra

ábra) A. J. HOFFMAN és R. R. SINGLETON [4] megmutatták, hogy  $k = 7$ -re is elérhető az egyenlőség (1.1)-ben, és bebizonyították, hogy a  $k = 2, 3$  és  $7$  értékeken kívül legfeljebb még  $k = 57$ -re létezhet  $k^2 + 1$  szögpontú,  $k$ -adfokú, reguláris, 2 átmérőjű gráf; hogy valóban létezik-e ilyen gráf  $k = 57$ -re, az nyitott kérdés.

Mivel ismeretes, hogy egy gráfban a páratlan fokszámú pontok száma páros kell, hogy legyen, tehát ha  $n$  és  $k$  páratlanok, akkor (1.1)-ben nem állhat egyenlőség; ez esetben kell a gráfban lenni legalább egy legfeljebb  $k - 1$  fokú pontnak és így ha  $n$  és  $k$  páratlanok, akkor az

$$(1.1') \quad n \leq k(k - 1) + 1$$

egyenlőtlenségnek kell fennállni. Az (1.1') egyenlőtlenség teljes általános-ságban szintén nem javítható, mert például (1.1')-ben egyenlőség áll fenn, ha  $k = 3, n = 7$  (lásd 2. ábra). Mindhárom példaképpen említett gráf egyben minimális élszámú is és így  $F_2(5,2) = 5, F_2(10,3) = 15, F_2(7,3) = 9$ . Az első két esetben ez az alábbi 1. tételből következik; azt, hogy  $F_2(7,3) = 9$ , később fogjuk bizonyítani.

A mondottakból az is látszik, hogy ha  $k(n)$  jelöli azt a legkisebb  $k$  számot, amelyre létezik  $n$  szögpontú 2, átmérőjű gráf, amelyben a szögpontok fokának maximuma  $k$ -val egyenlő, akkor  $k(n)$  nem monoton függvénye  $n$ -nek, ugyanis  $k(9) = 4$  de  $k(10) = 3$ . Mindenesetre látható (1.1)-ből, hogy teljesülnie kell a  $k(n) \geq \sqrt{n - 1}$  egyenlőtlenségnek.

Most be fogjuk bizonyítani a következő tételt.

**1. Tétel.** *Fennáll az*

$$(1.2) \quad F_2(n, k) \geq \frac{\binom{n}{2}}{k} = \frac{n(n-1)}{2k}$$

*egyenlőtlenség.*

**Bizonyítás.** Legyen  $G_n$  egy  $n$  szögpontú  $2$  átmérőjű gráf, amelyben a pontok fokának maximuma  $k$ . Legyen  $G_n$  éleinek száma  $N$ .

Számoljuk meg a legfeljebb  $2$  hosszúságú utak számát  $G_n$ -ben.  $1$  hosszúságú út nyilván  $N$  számú van; olyan  $2$  hosszúságú út, amely egy kijelölt élt tartalmaz, nyilván legfeljebb  $2(k-1)$  van; ilyen módon, figyelembe véve, hogy minden  $2$  hosszúságú út két élt tartalmaz és így az előbb kétszer lett számolva, a  $2$  hosszúságú utak száma legfeljebb  $(k-1)N$ , vagyis a legfeljebb  $2$  hosszúságú utak száma legfeljebb  $kN$ . Mármost bármely két pontot összeköt legfeljebb  $2$  hosszúságú út és így kell, hogy teljesüljön a  $kN \geq \binom{n}{2}$  egyenlőtlenség;

ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk.

Az (1.2) egyenlőtlenség teljes általánosságban nem javítható, hiszen az  $n = 5$ ,  $k = 2$  esetben  $\frac{n(n-1)}{2k} = 5$  és az ötszögpontú körnek valóban

$5$  éle van, vagy pl.  $n = 10$ ,  $k = 3$  esetben  $\frac{n(n-1)}{2k} = 15$  és az 1. ábrán látható

Petersen-gráfnak valóban  $15$  éle van.

Az (1.2) egyenlőtlenség  $F_2(7,3)$ -ra a  $7$  alsó korlátot adja. Ez azonban nem érhető el. Ugyanis mivel a páratlan fokú pontok száma minden gráfban páros kell, hogy legyen, egy  $7$  szögpontú gráfban nem lehet minden pont foka  $3$ . Egy  $7$  szögpontú,  $2$  átmérőjű gráfban, amelynek pontjai fokának maximuma  $3$ , kell tehát, hogy legyen legalább egy másodfokú pont. Az ugyanis nyilvánvaló, hogy első fokú pont nem lehetséges, hiszen egy gráfban, amelyben a pontok foka legfeljebb  $3$ , egy első fokú pontból legfeljebb  $5$  pont érhető el legfeljebb  $2$  hosszúságú úttal. Ha csak egy másodfokú pont volna, akkor a gráf éleinek száma  $\frac{6 \cdot 3 + 2}{2} = 10$  volna. Ha viszont egynél több másodfokú

pont van, akkor a másodfokú pontok száma  $3$  vagy  $5$  volna. Az első esetben a gráfnak  $\frac{4 \cdot 3 + 3 \cdot 2}{2} = 9$  éle van. Ez valóban lehetséges; egy ilyen ( $2$  átmérőjű) gráfot ábrázol a 2. ábra. Ha  $5$  másodfokú pont volna, akkor az élek száma  $\frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{2} = 8$  volna. Az ilyen gráf azonban nem lehet  $2$  átmérőjű;

ugyanis mivel egy másodfokú pontból, amely egy  $k_1$  és egy  $k_2$  fokú ponttal van összekötve, legfeljebb  $2$  hosszúságú úttal legfeljebb  $k_1 + k_2$  pontba lehet eljutni, tehát bármely másodfokú pontnak össze kellene kötve lennie a két harmadfokú ponttal, de ez lehetetlen, mert akkor a pontok nem harmad-, hanem ötödfokúak lennének.

Így tehát  $F_2(7, 3) \geq 9$  és mivel a 2. ábrán látható gráfnak  $9$  éle van, tehát  $F_2(7, 3) = 9$ .

Megjegyzendő, hogy az (1.1) egyenlőtlenség az 1. tételből is levezethető. Ugyanis egy  $n$  szögpontú gráfnak, amelyben a pontok foka legfeljebb  $k$ , legfeljebb  $\frac{nk}{2}$  éle van; így tehát 2 átmérőjű  $n$  szögpontú gráf, amelyben a pontok fokának maximuma  $k$ , csak akkor létezhet az 1. tétel szerint, ha  $\frac{nk}{2} \geq \frac{n(n-1)}{2k}$  tehát ha  $k^2 \geq n-1$ , vagyis ha (1.1) fennáll. Az (1.2) bizonyításából egyébként az is leolvasható, hogy (1.2)-ben egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha létezik  $n$  szögpontú  $k$ -adfokú reguláris 2 átmérőjű gráf, tehát ha  $\frac{nk}{2} = \frac{n(n-1)}{2k}$ , vagyis ha  $k^2 = n-1$ , vagyis ha (1.1)-ben egyenlőség áll fenn. Emellett az is látható a bizonyításból, hogy ha e feltétel teljesül és létezik  $\frac{n(n-1)}{2k}$  élű 2 átmérőjű  $n$  szögpontú reguláris  $k$ -adfokú gráf, úgy abban bármely két pont egy és csak egy legfeljebb 2 hosszúságú úttal van összekötve; az ilyen gráf tehát sem háromszöget, sem négyszöget nem tartalmaz.

Az 1. tétel szerint

$$(1.3) \quad \frac{F_2(n, k) k}{n(n-1)} \geq \frac{1}{2}.$$

A 2. §-ban be fogjuk bizonyítani, hogy az 1. tétel abban az értelemben aszimptotikusan pontos, hogy megadható  $k_j, n_j$  számpároknak ( $j = 1, 2, \dots$ ) olyan végtelen sorozata, hogy  $n_j \rightarrow +\infty$  (és így természetesen  $k_j \rightarrow +\infty$ ) és ugyanakkor

$$(1.4) \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{F_2(n_j, k_j) \cdot k_j}{n_j(n_j-1)} = \frac{1}{2}.$$

Mint fentebb rámutattunk, (1.2)-ben egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha  $k = \sqrt{n-1}$ . Ha tehát  $k > \sqrt{n-1}$ , akkor szükségképpen  $F_2(n, k) > \frac{n(n-1)}{2k}$ . Most be fogjuk bizonyítani, hogy ha  $k$  lényegesen nagyobb, mint  $\sqrt{n-1}$ , akkor  $F_2(n, k)$  nemcsak nagyobb kell, hogy legyen, mint  $\frac{n(n-1)}{2k}$ , hanem e számnak közel a kétszeresénél is nagyobbának kell lennie. Ezt fejezi ki a

**2. Tétel.** *Legyen  $k^2 > 8n$ , akkor*

$$(1.5) \quad F_2(n, k) > \frac{n(n-1)}{k + \frac{8n}{k}}.$$

**Megjegyzés.** A 2. §-ban meg fogjuk mutatni, hogy a 2. tétel aszimptotikusan pontos.

**A 2. tétel bizonyítása.** Legyen  $G_n$  egy  $n$  szögpontú 2 átmérőjű gráf, amelyben a pontok fokának maximuma  $k$ . Jelölje  $r$  a  $G_n$  gráf azon pontjainak számát, melyek foka  $> k/2$ ; magukat e pontokat jelöljék  $P_1, P_2, \dots, P_r$ . Legyenek  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-r}$  a  $G_n$  gráf többi pontjai. Jelölje  $N$  a  $G_n$  gráf éleinek számát. Jelölje  $x'_j$   $G_n$  azon éleinek számát, amelyek egyik végpontja  $P_j$ , másik végpontja pedig a  $Q_1, \dots, Q_{n-r}$  pontok egyike; jelölje továbbá  $y_h$  a  $G_n$  gráf azon éleinek a számát, amelyek egyik végpontja  $Q_h$  másik végpontja pedig a  $Q_1, \dots, Q_{h-1}, Q_{h+1}, \dots, Q_{n-r}$  pontok egyike. Akkor

$$(1.6) \quad \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{n-r} y_h + \sum_{j=1}^r \binom{x'_j}{2} + \sum_{h=1}^{n-r} \binom{y_h}{2} \geq \binom{n-r}{2};$$

ugyanis bármely  $Q_i$  és  $Q_j$  ( $i \neq j$ ) pont vagy egy éllel van összekötve, vagy egy  $Q_i P_h Q_j$  2 hosszúságú úttal, vagy egy  $Q_i Q_h Q_j$  ( $h \neq i, h \neq j$ ) 2 hosszúságú úttal. Tehát tekintve, hogy  $x'_j \leq k$  ( $j = 1, \dots, r$ ) és  $y_h \leq \frac{k}{2}$  ( $h = 1, \dots, n-r$ ),

$$(1.7) \quad \frac{k}{2} \sum_{h=1}^{n-r} y_h + k \sum_{j=1}^r x'_j > (n-r)(n-r-1).$$

Mivel

$$\sum_{j=1}^r x'_j + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{n-r} y_h \leq N,$$

tehát azt kaptuk, hogy

$$(1.8) \quad kN \geq (n-r)(n-r-1) > n(n-1) - 2rn.$$

Mármost nyilván

$$(1.9) \quad \frac{rk}{2} \leq 2N$$

és így

$$N > \frac{n(n-1)}{k + \frac{8n}{k}}.$$

Ezzel a 2. tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzendő, hogy az (1.5) egyenlőtlenség az  $n-1 \leq k^2 \leq 8n$  esetben is érvényes, ez esetben azonban nem mond újat az 1. tétellel szemben, mert ebben az esetben kisebb alsó korlátot ad meg  $F_2(n, k)$ -ra, mint az 1. tétel; ezért mondtuk ki a 2. tételt csak  $k^2 > 8n$ -re.

A 2. tételt kifejezhetjük a következő alakban is: Ha  $k^2 \geq 8n\lambda$ , ahol  $\lambda > 1$ , akkor

$$(1.10) \quad F_2(n, k) \geq \frac{n(n-1)}{k \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)}.$$

Ilyen módon a 2. tételből következik, hogy ha  $k_j$  és  $n_j$  úgy tartanak végtelenhez, hogy

$$(1.11) \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{k_j^2}{n_j} = +\infty,$$

akkor

$$\liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{F_2(n_j, k_j) k_j}{n_j(n_j-1)} \geq 1.$$

A 2. §-ban meg fogjuk mutatni, hogy a  $k_j$  és  $n_j$  számsorozatok megválaszthatók oly módon, hogy teljesüljön az (1.11) feltétel és amellet fennálljon, hogy

$$(1.12) \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{F_2(n_j, k_j) k_j}{n_j(n_j-1)} = 1.$$

Az (1.5) egyenlőtlenség tehát aszimptotikusan pontos, ha  $\frac{k^2}{n} \rightarrow +\infty$ .

**2. §. Közel extrémális 2 átmérőjű gráfok konstrukciója**

Annak bizonyításához, hogy az 1. tétel aszimptotikusan pontos, a következő lemmára lesz szükségünk .

**1. lemma.** *Ha  $P$  tetszőleges prímszámhatvány, létezik olyan  $n = P^2 + P + 1$  szögpontú 2 átmérőjű gráf, amelyben a pontok fokának maximuma  $P + 1$ .*

**Megjegyzés.** Az 1. lemma szerint létező gráf éleinek száma nyilván  $\leq \frac{(P + 1)(P^2 + P + 1)}{2}$ , tehát az 1. lemma szerint, ha  $P$  prímszámhatvány, akkor

$$\frac{F_2(P^2 + P + 1, P + 1)(P + 1)}{(P^2 + P + 1)(P^2 + P)} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2P}$$

és így, ha  $k_j$  a  $P_j + 1$  alakú számokon fut végig, ahol  $P_j$  prímszámhatvány, és  $n_j = P_j^2 + P_j + 1$ , akkor (1.4) fennáll.

**Az 1. lemma bizonyítása.** Legyen  $GF(P)$  egy  $P$  elemű véges test (Galois test). Legyen  $PG(P, 2)$  az ezen test segítségével konstruált véges projektív (Desargues-féle) síkgeometria. A  $PG(P, 2)$  geometria „pont”-jait homogén koordináták segítségével adjuk meg, vagyis e geometria pontjait az  $(a, b, c)$  elemhármások reprezentálják, ahol  $a, b, c$   $GF(P)$  elemei, amelyek nem mindhárman egyenlők  $O$ -val (a  $GF(P)$  test zérus-elemével). Az  $(a, b, c)$  és  $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$  elemhármások, ahol  $\lambda$  a  $GF(P)$  test egy  $O$ -tól különböző tetszőleges eleme, feltevés szerint ugyanazon pontot határozzák meg. Ilyen módon  $PG(P, 2)$  különböző pontjainak száma  $\frac{P^3 - 1}{P - 1} = P^2 + P + 1$ . A  $PG(P, 2)$  geometria

egy „egyenesén” azon  $(x, y, z)$  koordinátákkal bíró pontok halmazát értjük, amelyek eleget tesznek az  $ax + by + cz = O$  egyenletnek, ahol  $a, b, c$   $GF(P)$  tetszőleges adott elemei, amelyek nem mindhárman egyenlők  $O$ -val; az  $a, b, c$  elemhármast az előbb definiált egyenes (vonál-) koordinátáinak nevezzük és az egyenest röviden  $[a, b, c]$ -vel jelöljük. Az  $[a, b, c]$  és  $[\lambda a, \lambda b, \lambda c]$  egyenesek, ahol  $\lambda$   $GF(P)$  egy  $O$ -tól különböző tetszőleges eleme, nyilván azonosak. Ilyen módon  $PG(P, 2)$ -ben  $P^2 + P + 1$  különböző egyenes van. Ha  $ax + by + cz = O$ , akkor azt mondjuk, hogy az  $(x, y, z)$  pont rajta fekszik az  $[a, b, c]$  egyenesen (ill., hogy az  $[a, b, c]$  egyenes átmegy az  $(x, y, z)$  ponton). Nyilvánvaló, hogy ez esetben az is igaz, hogy az  $(a, b, c)$  pont rajta fekszik az  $[x, y, z]$  egyenesen (ill. az  $[x, y, z]$  egyenes átmegy az  $(a, b, c)$  ponton). Könnyen beláthatók a következő állítások:

1. Bármely egyenesen  $P + 1$  pont fekszik.
2. Bármely két különböző egyenesnek egy és csak egy közös pontja van.
3. Bármely két különböző ponton egy és csak egy egyenes megy át.

Most definiáljuk  $PG(P, 2)$  pontjainak és egyenesének egy kölcsönösen egyértelmű egymáshoz rendelését a következőképpen: az  $(a, b, c)$  ponthoz hozzárendeljük az  $[a, b, c]$  egyenest és megfordítva. Jelöljük a pontokat nagy betűkkel, az egyeneseket görög betűkkel, a leképezést, amely egy ponthoz egy egyenest ill. egy egyeneshez egy pontot rendel,  $T$ -vel, vagyis ha az  $A$  ponthoz az  $a$  egyenes van hozzárendelve, akkor azt írjuk, hogy  $a = TA$ , ill.  $A = T a$ . Könnyen belátható, hogy e leképezés a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1'. Ha a  $B$  pont hozzátartozik az  $\alpha = TA$  egyeneshez, akkor az  $A$  pont is hozzátartozik a  $\beta = TB$  egyeneshez.

2'. Ha  $C$  a  $TA$  és  $TB$  egyenesek közös pontja, akkor  $TC$  azonos az  $A$  és  $B$  pontokon átmenő egyenessel. Ha az  $\alpha$  és  $\beta$  egyenesek közös pontját  $\alpha \cdot \beta$ -val, az  $A$  és  $B$  pontokon átmenő egyenest  $A \cdot B$ -vel jelöljük, akkor tehát

$$TA \cdot TB = T(A \cdot B).$$

3'. Egy tetszőleges  $\alpha$  egyenes pontjaihoz rendelt egyenesek együttvéve lefedik (tartalmazzák) a geometria összes pontjait, mégpedig az  $A = T\alpha$  pont kivételével minden pont egyszeresen van lefedve, az  $A = T\alpha$  pont viszont  $P + 1$ -szeresen.

4'. Az  $A = (a, b, c)$  pont akkor és csak akkor fekszik rajta a  $TA$  egyenesen, ha  $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ .

Mármost legyenek a  $G[P]$  gráf szögpontjai  $PG(P, 2)$  pontjai. Az  $A = (a, b, c)$  és  $A' = (a', b', c')$  (különböző) pontokat  $G[P]$ -ben akkor és csak akkor kötjük össze egy éllel, ha  $A'$  rajta fekszik a  $TA$  egyenesen (ill.  $A$  a  $TA'$  egyenesen), vagyis, ha  $aa' + bb' + cc' = 0$ . A fent mondottak szerint e gráfnak a következő tulajdonságai vannak:

I.  $G[P]$  pontjainak száma  $P^2 + P + 1$ .

II.  $G[P]$ -ben minden pont foka  $P + 1$  vagy  $P$ . (Az  $A = (a, b, c)$  pont foka  $P + 1$ , ill.  $P$  aszerint, hogy  $A$  nem fekszik rajta, ill. rajta fekszik a  $TA$  egyenesen, tehát aszerint, hogy  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$  vagy  $= 0$ .) Ilyen módon  $G[P]$  éleinek száma nem lehet nagyobb, mint  $1/2(P + 1)(P^2 + P + 1)$ .

III.  $G[P]$  átmérője 2-vel egyenlő.

IV.  $G[P]$  nem tartalmaz négyszöget.

I. és II. nyilvánvalóak. III. a következőképpen látható be: ha  $A$  és  $B$  tetszőleges különböző pontok,  $A$  és  $B$  összeköthetők az  $ACB$  úttal, ahol  $C = TA \cdot TB$ . Ilyenmódon  $G[P]$  rendelkezik az 1. lemmában felsorolt tulajdonságokkal és így az 1. lemmát bebizonyítottuk.

A IV. tulajdonság a következőképpen látható be. Ha az  $ABCD$  négyszög  $G[P]$ -hez tartoznék, akkor a  $TA$  és  $TC$  egyeneseknek  $B$  és  $D$  egyaránt közös pontjuk volna, ami nem lehetséges, ha az  $A, B, C, D$  pontok mind különbözőek.

Most bebizonyítjuk, hogy a 2. tétel is aszimptotikusan pontos a  $\frac{k^2}{n} \rightarrow +\infty$  esetben. Legyen  $P$  megint egy prímszámhatvány. Legyen  $n$  egy tetszőleges pozitív egész szám, amelynek  $P^2 + P + 1$  valódi osztója; pl. legyen  $n = s(P^2 + P + 1)$  ahol  $s \geq 2$  egész.

Mármost a  $G_n^*$  gráfot a következőképpen konstruáljuk meg. Legyenek  $G_n^*$  pontjai egyrészt a  $PG(P, 2)$  véges geometria pontjai (ezeket  $G_n^*$  első fajú pontjainak nevezzük), másrészt az  $(\sigma, j)$  elempárok, ahol  $\sigma$  a  $PG(P, 2)$  geometria egy tetszőleges egyenese és  $j$  az  $1, 2, \dots, s - 1$  számok egyike (ezeket  $G_n^*$  másodfajú pontjainak nevezzük). Ilyen módon  $G_n^*$  pontjainak száma  $(P^2 + P + 1) + (s - 1)(P^2 + P + 1) = n$ . Mármost két első fajú pontot kössünk egy éllel össze akkor, ha a megfelelő pontok az 1. lemmában konstruált  $G[P]$  gráfban össze vannak kötve; vagyis ha a két szóban forgó elsőfajú pont  $(a, b, c)$  és  $(a', b', c')$  az 1. lemma bizonyításában használt jelölés mellett,



akkor  $e$  pontokat akkor és csak akkor kötjük össze, ha  $aa' + bb' + cc' = 0$ . Másrészt ha  $(a, b, c)$   $G_n^*$  egy elsőfajú pontja és  $(\alpha, j)$  egy másodfajú pontja, ahol  $\alpha = [x, y, z]$  akkor  $e$  pontokat ( $j$  értékére való tekintet nélkül) akkor és csak akkor kötjük össze egy éllel, ha az  $(a, b, c)$  pont  $PG[P, 2]$ -ben rajta fekszik az  $\alpha$  egyenesen, vagyis ha  $ax + by + cz = 0$ .

Másodfajú pontok  $G_n^*$ -ban ne legyenek egymással összekötve. Az így definiált  $G_n^*$  gráfról először bebizonyítjuk, hogy átmérője 2. Ugyanis két elsőfajú pont összeköthető egy legfeljebb 2 hosszúságú úttal, mivel  $G_n^*$ -nak az elsőfajú pontokból álló részgráfja izomorf az 1. lemma bizonyítása során konstruált  $G[P]$  gráffal, amelyről láttuk, hogy 2 átmérőjű. Másrészt két másodfajú pont mindig összeköthető egy 2 hosszúságú úttal; ha ugyanis a két másodfajú pont  $(\alpha, j)$  és  $(\beta, h)$  akkor vagy  $\beta = \alpha$  és  $j \neq h$ , mely esetben mindkét pont össze van kötve  $G_n^*$  összes olyan (elsőfajú)  $(a, b, c)$  pontjával, amelyre az  $(a, b, c)$  pont  $PG[P, 2]$ -ben rajta fekszik az  $\alpha$  egyenesen. Ha viszont  $\alpha \neq \beta$ , akkor  $(\alpha, j)$  és  $(\beta, h)$  össze vannak kötve  $G_n^*$  azon  $(a, b, c)$  elsőfajú pontjával, ahol  $(a, b, c)$  az  $\alpha$  és  $\beta$  egyenesek metszéspontja  $PG[P, 2]$ -ben.

Most már csak azt kell bebizonyítanunk, hogy bármely elsőfajú pont bármely másodfajú ponttal össze van kötve  $G_n^*$ -ban egy legfeljebb 2 hosszúságú úttal. Legyen  $(a, b, c)$   $G_n^*$  egy tetszőleges elsőfajú pontja és  $(\alpha, j)$  egy tetszőleges másodfajú pontja. Két esetet különböztetünk meg. Ha az  $(a, b, c)$  pont  $PG(P, 2)$ -ben rajta fekszik az  $\alpha = [a', b', c']$  egyenesen, akkor a szóban forgó két pont  $G_n^*$ -ban éllel van összekötve. Ha viszont  $(a, b, c)$  nem fekszik rajta az  $\alpha = [a', b', c']$  egyenesen, akkor legyen  $\beta$  az  $[a, b, c]$  egyenes és legyen  $(x, y, z)$  az  $\alpha$  és  $\beta$  egyenesek közös pontja. Akkor  $(x, y, z)$  rajta fekszik a  $\beta = [a, b, c]$  egyenesen, tehát  $ax + by + cz = 0$  és így az  $(x, y, z)$  pont össze van kötve  $(a, b, c)$ -vel  $G_n^*$ -ban; másrészt  $(x, y, z)$  rajta fekszik az  $\alpha = [a', b', c']$  egyenesen is, tehát  $a'x + b'y + c'z = 0$  és így az  $(x, y, z)$  elsőfajú pont össze van kötve az  $(\alpha, j)$  másodfajú ponttal is, vagyis  $(\alpha, j)$ -ből  $(a, b, c)$ -be  $(x, y, z)$ -n keresztül vezet egy 2 hosszúságú út. Ezzel bebizonyítottuk, hogy  $G_n^*$  2 átmérőjű. Most számítsuk ki  $G_n^*$  pontjai fokának maximumát, amit  $k$ -val jelölünk és becsüljük meg  $G_n^*$  éleinek számát, amit  $N$ -nel jelölünk. Egy elsőfajú pont nyilván legfeljebb  $P + 1$  elsőfajú ponttal és  $(s - 1)(P + 1)$  másodfajú ponttal van összekötve, tehát foka legfeljebb  $s(P + 1)$ . Egy másodfajú pont viszont pontosan  $P + 1$  elsőfajú ponttal van összekötve; ilyen módon  $k = s(P + 1)$ . Másrészt az elsőfajú pontokat összekötő élek száma egyenlő  $G[P]$  éleinek számával, tehát legfeljebb  $\frac{1}{2}(P + 1)(P^2 + P + 1)$ , míg az elsőfajú pontokat másodfajú pontokkal összekötő élek száma  $(P^2 + P + 1)(P + 1)(s - 1)$  tehát

$$N \leq (P^2 + P + 1)(P + 1) \left( s - \frac{1}{2} \right).$$

Így tehát, mivel  $P^2 + P + 1 \geq 7$

$$\frac{Nk}{n(n - 1)} \leq \frac{(P^2 + P + 1)(P + 1)^2 s \left( s - \frac{1}{2} \right)}{s(P^2 + P + 1) \cdot [s(P^2 + P + 1) - 1]} \leq 1 + \frac{1}{P + 1}.$$

Ennélfogva, ha  $k_j = s_j(P_j + 1)$  és  $n_j = s_j(P_j^2 + P_j + 1)$  ahol  $P_j$  prímszámhatvány, akkor

$$(2.1) \quad \frac{F_2(n_j, k_j) k_j}{n_j(n_j - 1)} \leq 1 + \frac{1}{P_j + 1},$$

vagyis ha  $P_j \rightarrow +\infty$ , akkor

$$(2.2) \quad \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{F_2(n_j, k_j) k_j}{n_j(n_j - 1)} \leq 1.$$

Mármost, figyelembe véve, hogy

$$\frac{k_j^2}{n_j} > s_j,$$

tehát, ha  $s_j \rightarrow +\infty$ , akkor a 2. tétel szerint

$$(2.3) \quad \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{F_2(n_j, k_j) k_j}{n_j(n_j - 1)} \geq 1$$

és így (2.2)-ből és (2.3)-ból következik, hogy

$$(2.4) \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{F_2(n_j, k_j) k_j}{n_j(n_j - 1)} = 1 \quad \text{ha } P_j \rightarrow +\infty \text{ és } s_j \rightarrow +\infty.$$

A 2. tétel tehát aszimptotikusan pontos, ha  $\frac{k^2}{n} \rightarrow +\infty$ ; a fent konstruált példa azonban nem zárja ki, hogy a 2. tétel némileg javítható legyen, ha  $\frac{k^2}{n}$  nem nagy szám. A

$$\liminf_{\frac{k^2}{n} \leq c} \frac{F_2(n, k) k}{n(n - 1)} = g(c)$$

függvény pontos értékét ( $c > 1$ ) nem ismerjük; az 1. és 2. tételből és a fenti gráf-konstrukcióból csak annyi következik, hogy

$$g(c) \geq \max \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{1 + \frac{8}{c}} \right), \quad \text{ha } c > 1.$$

Meg kívánjuk még jegyezni, hogy ha  $s = 2$  és a  $G_n^*$  gráfból elhagyjuk az elsőfajú pontokat összekötő éleket, azt a páros körüljárású gráfot kapjuk, amelyet KÁRTESZI FERENC nemrégiben [2] példaként adott meg arra, hogy létezik  $2(P^2 + P + 1)$  pontból álló  $P + 1$ -fokú reguláris gráf, amely nem tartalmaz 6-nál kevesebb élből álló körutat ( $P$  prímszámhatvány).

### 3. §. Néhány további probléma

Eddig  $F_2(n, k)$ -t azon feltevés mellett vizsgáltuk hogy  $k$  viszonylag kicsi  $n$ -hez képest (de persze  $\sqrt{n - 1}$ -nél nagyobb (1.1)-re való tekintettel). Most vizsgáljuk meg  $F_2(n, k)$ -t azon feltevés mellett, hogy  $k$  kevéssel kisebb

$n$ -nél; pontosabban vizsgálni fogjuk  $F_2(n, n - d)$  értékét, ahol  $d \geq 1$  rögzített egész szám és  $n = d + 2, d + 3, \dots$ . Nyilvánvaló, hogy  $k$  minden értékére  $F_2(n, k) \geq n - 1$ , hiszen egy 2 átmérőjű gráf mindenképpen összefüggő és egy  $n$  szögpontú összefüggő gráf legalább  $n - 1$  élt tartalmaz, és akkor és csak akkor tartalmaz pontosan  $n - 1$  élt, ha ún. „fa”. Mármost könnyen belátható, hogy  $F_2(n, n - 1) = n - 1$ , hiszen ha a  $G_n$   $n$ -szögpontú gráfban van egy  $n - 1$ -fokú pont, akkor a gráf 2 átmérőjű (ún. „csillag”), ehhez további élekre nincs is szükség. Az is könnyen belátható, hogy  $F_2(n, n - 2) = 2n - 4$ ; a legegyszerűbb  $n$  szögpontú 2 átmérőjű gráfot, amelyben a pontok fokának maximuma  $n - 2$ , úgy kapjuk, hogy pl. a  $P_1$  és  $P_2$  pontokat összekötjük a  $P_3, P_4, \dots, P_n$  pontok mindegyikével.

Az első nem triviális eset a  $d = 3$  eset.

**3. Tétel.** *Ha  $d \geq 3$  és  $n \geq d + 2$ , akkor*

$$(3.1) \quad F_2(n, n - d) \geq F_2(n, n - 4) = F_2(n, n - 3) = 2n - 5.$$

**Megjegyzés.** A 3. tétel azért meglepő, mert (3.1) szerint

$$(3.2) \quad F_2(n, n - 3) < F_2(n, n - 2),$$

ami azt mutatja, hogy  $F_2(n, k)$  rögzített  $n$  mellett  $k$ -nak nem monoton csökkenő függvénye, ami pedig szemléletes meggondolás alapján plauzibilisnek tűnhetne.

**A 3. tétel bizonyítása.** A tételt indukcióval bizonyítjuk.  $n$  legkisebb számba jövő értéke  $n = 5$ ;  $n = 5$ -re a tétel állítása nyilvánvalóan igaz, hiszen egy 5 szögpontú 2 átmérőjű gráf, amelyekben a pontok foka legfeljebb 2, nem lehet más, mint egy 5 szögpontú kör, és ennek éleinek száma  $5 = 2 \cdot 5 - 5$ . Tegyük fel, hogy a tétel  $n - 1$ -re igaz ( $n \geq 6$ ), és legyen  $G_n$  egy  $n$  szögpontú és 2 átmérőjű gráf, amelyben a pontok fokának maximuma  $\leq n - 3$ . Bebizonyítjuk, hogy akkor  $G_n$ -nek legalább  $2n - 5$  éle van. Ha egy ilyen gráfban minden pont foka legalább 4, akkor az élek száma legalább  $2n$ . Ha van 3-adfokú pont, de nincs alacsonyabb fokú pont, akkor legyen ez  $P_1$  és a vele összekötött pontok  $P_2, P_3$  és  $P_4$ . Ez esetben a  $P_5, \dots, P_n$  pontok mind elérhetők kell, hogy legyenek  $P_1$ -ből 2 hosszúságú úttal, tehát mindegyikük össze van kötve a  $P_2, P_3$  ill.  $P_4$  pontok egyikével és így e pontok fokának összege legalább  $n - 1$ , tehát az összes fokok összege  $\geq n - 1 + 3(n - 3) = 4n - 10$  és így az élek száma  $\geq 2n - 5$ . Ha viszont van első fokú pont, akkor a gráf nem lehet 2 átmérőjű, ha pontjainak fokszáma  $\leq n - 3$ . Ugyanis, ha pl.  $P_1$  egy első fokú pont, amely csak a  $P_2$  ponttal van összekötve, akkor, mivel  $P_2$  legfeljebb  $n - 3$  fokú,  $P_1$ -ből legfeljebb  $n - 3$  pont érhető el legfeljebb 2 hosszúságú úttal. Tehát feltehetjük, hogy  $G_n$ -nek van másodfokú pontja. (Az indukciós feltevést csak ezen eset tárgyalásánál használjuk fel.)

Legyen e pont  $P_1$  és a vele összekötött két pont  $P_2$  és  $P_3$ . Akkor a  $G_n$  gráf további  $n - 3$  pontja mind vagy  $P_2$ -vel vagy  $P_3$ -mal össze kell, hogy kötve legyen. Tegyük fel, hogy van olyan  $P_1$ -től különböző pont, amely  $P_2$ -vel és  $P_3$ -mal is össze van kötve. Ez esetben a  $G_n$  gráfból  $P_1$ -et elhagyva egy  $n - 1$  szögpontú  $G_{n-1}$  gráfot kapunk amelynek átmérője 2. Ugyanis a  $P_2, P_3$  pontpáron kívül nem lehet más pontpár, amely  $P_1$ -en át van összekötve legfeljebb 2 hosszúságú úttal és a  $P_2, P_3$  pontpár feltevés szerint össze van kötve még egy másik 2 hosszúságú úttal is. Feltehetjük, hogy a  $P_1$  elhagyásával nyert gráfban a pontok fokának maximuma  $\leq n - 4 = (n - 1) - 3$ . Ugyanis, ha nincs  $G_n$ -ben  $n - 3$  fokú pont, akkor ez nyilvánvaló. Ha van  $G_n$ -ben  $n - 3$  fokú

pont, akkor két eset lehetséges vagy van a  $P_2$  és  $P_3$  pontoktól különböző  $n - 3$  fokú pont, vagy nincs. Utóbbi esetben nyilvánvaló, hogy a  $P_1$  elhagyásával származó gráfban a pontok fokának maximuma  $\leq n - 4$ , hiszen  $P_2$  és  $P_3$  foka  $P_1$  elhagyásával eggyel csökken. Ha viszont van a  $P_2$  és  $P_3$  (és persze a  $P_1$ ) pontoktól különböző  $n - 3$  fokú pont, legyen ez  $P_4$ . Akkor az eredeti  $G_n$  gráfban az élek száma legalább  $2 + 2(n - 3) - 1 = 2n - 5$ , ugyanis a  $P_4, \dots, P_n$  pontok mindegyike vagy  $P_2$ -vel, vagy  $P_3$ -mal össze van kötve. Ez esetben tehát nincs mit bizonyítani. Tehát feltehetjük, hogy  $G_{n-1}$ -ben a pontok fokának maximuma legfeljebb  $(n - 1) - 3$ . Így, ha a 3. tétel  $n - 1$ -re érvényes, következik, hogy a  $P_1$  elhagyásával nyert  $G_{n-1}$  gráfban legalább  $2n - 7$  él és így magában  $G_n$ -ben legalább  $2n - 5$  él van. Így tehát csak az az eset van hátra, amikor a  $P_4, \dots, P_n$  pontok mindegyike vagy csak  $P_2$ -vel vagy csak  $P_3$ -mal van összekötve.

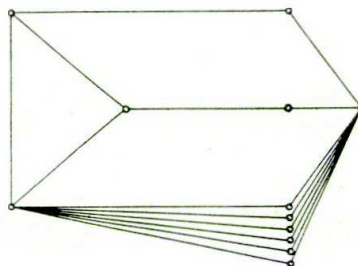
Mármost az nem lehetséges, hogy a  $P_4, \dots, P_n$  pontok mindegyike a  $P_2$  és  $P_3$  pontok közül ugyanazzal legyen összekötve, mert ez esetben e pont  $n - 2$  fokú volna. Tehát kell lenni a  $P_4, \dots, P_n$  pontok közül olyanoknak, amely  $P_2$ -vel és olyanoknak is, amely  $P_3$ -mal van összekötve. De akkor a  $G_n$  gráfból a  $P_1, P_2, P_3$  pontokat elhagyva egy összefüggő gráfot nyerünk, ugyanis két olyan pont, amelyek közül az egyik  $P_2$ -vel, a másik  $P_3$ -mal van összekötve, össze kell, hogy legyen kötve  $G_n$ -ben egy a  $P_1, P_2, P_3$  pontokon át nem menő, legfeljebb 2 hosszúságú úttal. Ha meg két olyan pontot választunk, amelyek pl.  $P_2$ -vel vannak összekötve, akkor ezek bármelyike összeköthető egy a  $P_1, P_2, P_3$  pontokat elkerülő, legfeljebb 2 hosszúságú úttal egy tetszőleges  $P_3$ -mal összekötött ponttal, és így e két pont egymással is összeköthető egy a  $P_1, P_2, P_3$  pontokat elkerülő úttal. Mivel egy  $n - 3$  szögpontú összefüggő gráf legalább  $n - 4$  élt tartalmaz, maga  $G_n$  szükségképpen legalább  $2 + n - 3 + n - 4 = 2n - 5$  élt tartalmaz. Ezzel bebizonyítottuk, hogy  $F_2(n, n - d) \geq 2n - 5$ , ha  $d \geq 3$ ,  $n \geq d + 2$ . Azonban lehet olyan  $n$  szögpontú 2 átmérőjű gráfot megadni, amelyben a pontok fokának maximuma  $n - 3$  és az élek száma  $2n - 5$ . Egy ilyen gráfot a következőképpen kaphatunk. A  $P_1$  és  $P_2$  pontokat kössük össze a  $P_5, \dots, P_n$  pontokkal, továbbá  $P_1$ -et  $P_3$ -mal,  $P_2$ -t  $P_4$ -gyel és  $P_3$ -at  $P_4$ -gyel. E gráfot  $n = 10$ -re a 3. ábra mutatja be.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy  $F_2(n, n - 3) = 2n - 5$ .

Ahhoz, hogy a 3. tétel bizonyítása teljes legyen, még csak azt kell belátni, hogy  $F_2(n, n - 4) = 2n - 5$ . Ezt a következőképpen láthatjuk be. Ha a 2. ábrán bemutatott 7 szögpontú, 2 átmérőjű, 9 élű gráfot további  $n - 7$  ponttal egészítjük ki és ezt az  $n - 7$  pontot az eredeti gráf azon két (harmadfokú) pontjával kötjük össze, amelyekkel az eddigi gráf egyik másodfokú pontja össze van kötve, egy  $n$  szögpontú 2 átmérőjű, gráfot kapunk, amelyben a pontok fokának maximuma  $n - 4$  és az élek száma  $9 + 2(n - 7) = 2n - 5$ . Egy ilyen gráfot  $n = 12$ -re a 4. ábra mutat be.



3. ábra



4. ábra

Megjegyzendő, hogy a 3. ábrán bemutatott gráf ugyanazon elv szerint származtatható egy 5 szögpontú körből, mint a 4. ábrán bemutatott gráf a 2. ábrán látható gráfból.  $F_2(n, n - d)$  általános kifejezését  $d \geq 5$ -re nem ismerjük.  $F_2(n, n - d)$  mellett kívánatos volna  $F_2(n, [nc])$  ( $0 < c < 1$ ) aszimptotikus viselkedését is megvizsgálni. Valószínűnek látszik, hogy létezik a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_2(n, [nc])}{n} = h(c)$$

határérték ( $0 < c < 1$ ) és  $h(c)$  monoton csökkenő és folytonos függvény, amelyre  $h(1) = 2$  és  $h(0) = +\infty$ . A 2. tételből csak annyi következik, hogy

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_2(n, [nc])}{n} \geq \frac{1}{c}, \quad \text{ha } 0 < c < 1.$$

Az  $F_r(n, k)$  függvényt illetőleg, ha  $r \geq 3$ , csak annyit jegyzünk meg, hogy (1.1) bizonyításához hasonló módon belátható, hogy ahhoz, hogy  $F_r(n, k)$  egyáltalán értelmezve legyen (vagyis, hogy létezzék  $n$  szögpontú,  $r$  átmérőjű gráf, melyben a pontok fokának maximuma  $k$ ), szükséges, hogy teljesüljön az

$$n \leq 1 + k \frac{(k - 1)^r - 1}{k - 2}$$

egyenlőtlenség; továbbá az 1. tétel bizonyításához hasonlóan belátható, hogy

$$F_r(n, k) \geq \frac{\binom{n}{2} (k - 2)}{(k - 1)^r - 1}.$$

Az eddigiekben azzal a kérdéssel foglalkoztunk, hogy mi az a legkisebb  $N = F_2(n, k)$  szám, amelyre azon  $n$  szögpontú gráfok között, amelyekben a pontok fokának maximuma  $k$  és amelyek  $N$  élt tartalmaznak, *van legalább egy*, amely 2 átmérőjű. Kézenfekvő felvetni azt a kérdést is, hogy mi az a legkisebb  $N = G_2(n, k)$  szám, amelyre *minden* olyan  $n$  szögpontú gráf legfeljebb 2 átmérőjű, amelyben a pontok fokának maximuma  $k$  és amely  $N$  élt tartalmaz. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor  $n$  páros. Ez esetben a kérdésnek csak akkor van értelme, ha  $k \geq \frac{n}{2}$ . Ha ugyanis  $k \leq \frac{n}{2} - 1$ , akkor

megadható könnyen egy olyan  $n$  szögpontú gráf, amelyben minden pont foka  $k$  (tehát amely az adott fokszám-korlátozás mellett maximális számú élt tartalmaz) és amelynek átmérője  $\geq 3$ ; ez esetben tehát  $G_2(n, k)$  nincs értelmezve.

Egy ilyen gráfot a következőképpen szerkeszthetünk. Legyen  $n = 2m$ . Legyenek  $P_1, \dots, P_m$  és  $Q_1, \dots, Q_m$  a gráf pontjai. Feltevés szerint  $k \leq m - 1$ . A  $P_j$  pontot ( $j = 1, \dots, m$ ) kössük össze a  $Q_{j+1}, \dots, Q_{j+k}$  pontokkal, ahol az előforduló  $m$ -nél nagyobb indexek mod  $m$  redukálандók, tehát  $Q_{m+h} = Q_h$ . Ez esetben nyilván mindegyik  $P_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) pont foka  $k$ , de hasonlóképpen mindegyik  $Q_h$  ( $h = 1, \dots, m$ ) pont foka is  $k$ , ugyanis  $Q_h$  a  $P_{h-1}, P_{h+2}, \dots, P_{h+k}$  pontokkal van összekötve, ahol az indexek megint mod  $m$  redukálандók, tehát  $P_{-j} = P_{m-j}$ . Ez a gráf azonban nyilvánvalóan nem 2 átmérőjű, mivel egy  $P_i$  és egy  $Q_j$  pontot összekötő út mindig csak páratlan

számú élből állhat és így, mivel  $P_1$  és  $Q_1$  nincsenek éllel összekötve, a gráf átmérője  $\geq 3$ .

Most vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor  $n$  páratlan,  $n = 2m + 1$ . Meg fogjuk mutatni, hogy  $G_2(n, k)$  csak akkor lehet értelmezve, ha  $k \geq m + 1$ , feltéve, hogy  $m$  páratlan, illetve, ha  $k \geq m$ , feltéve, hogy  $m$  páros. Ugyanis, ha  $k \leq m - 1$ , vizsgáljuk azt a gráfot, amelynek pontjai  $P_1, \dots, P_m$  és  $Q_1, \dots, Q_{m+1}$  és amelyben a  $P_j$  pont ( $j = 1, \dots, m$ ) a  $Q_{j+1}, \dots, Q_{j+k}$  pontokkal van összekötve (az  $m + 1$ -nél nagyobb indexek mod( $m + 1$ ) redukálандók), és amelyben össze vannak kötve a  $Q_{2l-1}, Q_{2l}$  pontpárok, ha csak  $2l \leq k$ . Ha most  $k$  páros, akkor e gráf minden pontjának foka  $k$ , ha  $k$  páratlan, akkor minden pont foka  $k$ , kivéve a  $Q_k$  pontot. Mindkét esetben a gráf azon korlátozás mellett, hogy pontjai foka legfeljebb  $k$ , maximális számú élt tartalmaz. (Ugyanis, ha  $k$  és  $n$  páratlanok, akkor nem létezik  $n$  szögpontú  $k$ -ad fokú reguláris gráf, hiszen a páratlan fokú pontok száma minden gráfban páros.) Azonban e gráfban a  $P_{k+1}$  és  $Q_{k+1}$  pontokat összekötő bármely út hossza legalább 3.

Ha  $n = 2m + 1$  és  $k = m$ , akkor két esetet kell megkülönböztetnünk. Ha  $m$  páratlan, akkor az előbbi konstrukcióval egy olyan gráfot nyerünk, amelyben a  $P_k$  pont kivételével minden pont foka  $k$  és  $P_k$  foka  $k - 1$ , és amelynek átmérője  $> 2$ , mivel a  $P_k$  és  $Q_k$  pontokat összekötő bármely út hossza legalább 3. Ha azonban  $m$  páros és  $k = m$  akkor a fenti konstrukció egy 2 átmérőjű (reguláris) gráfra vezet.

A páros és páratlan  $n$  esetét összefoglalva tehát azt láttuk be, hogy  $G_2(n, k)$  csak akkor lehet értelmezve, ha  $n$  páros és  $k \geq \frac{n}{2}$ , illetve ha  $n = 2m + 1$ , ahol  $m$  páratlan és  $k \geq m + 1$ , és végül, ha  $n = 2m + 1$ , ahol  $m$  páros és  $k \geq m$ .

Most bebizonyítjuk, hogy ez esetekben  $G_2(n, k)$  valóban értelmezve van és meghatározzuk az értékét is.

**4. tétel.** *Ha  $n - 2 \geq k \geq \frac{n}{2}$ , továbbá ha  $n = 2m + 1$ , ahol  $m$  páros és  $k = m$ , akkor*

$$(3.3) \quad G_2(n, k) = \left\{ \frac{(n-2)k + (n-1)}{2} \right\},$$

ahol  $\{x\}$  a legkisebb egész számot jelöli, amely  $\geq x$ .

**Bizonyítás.** Legyen  $G_n$  egy  $n$  szögpontú gráf, amelyben a pontok foka  $\leq k$  és az élek száma  $N \geq \left\{ \frac{(n-2)k + (n-1)}{2} \right\}$ . Legyenek  $P_1, \dots, P_n$  a  $G_n$  gráf szögpontjai és  $x_j$  a  $P_j$  pont foka. Akkor

$$x_1 + \dots + x_n = 2N$$

és mivel  $x_n \leq k$ , tehát tetszőleges  $i$ -re és  $j$ -re ( $i \neq j$ )

$$x_i + x_j \geq 2N - (n-2)k \geq 2 \left\{ \frac{(n-2)k + (n-1)}{2} \right\} - (n-2)k.$$

Mármost bármely  $a$  pozitív egész számra  $2 \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor \geq a$ , tehát

$$2 \left\lfloor \frac{(n-2)k + (n-1)}{2} \right\rfloor - (n-2)k \geq n-1$$

és így

$$(3.4) \quad x_i + x_j \geq n-1.$$

Ha  $P_i$  és  $P_j$  két olyan pontja a  $G_n$  gráfnak, amelyek nincsenek egy éllel összekötve, akkor (3.4) és a skatulya-elv szerint a többi  $n-2$  pont között kell olyan  $P_h$  pontnak lenni, amely mindkettővel össze van kötve, vagyis a  $G_n$  gráf valóban 2 átmérőjű. Még csak azt kell kimutatnunk, hogy ha az élék száma  $N < \left\lfloor \frac{(n-2)k + (n-1)}{2} \right\rfloor$ , akkor nem bizonyos, hogy  $G_n$  2 átmérőjű lesz. Legyen először  $k < n-2$ .

Vegyünk egy tetszőleges  $n-2$  szögpontú  $G_{n-2}$  gráfot, amelyben a pontok fokának maximuma  $k-1$ . Ha  $n-2$  vagy  $k-1$  páros, akkor elérhető, hogy  $G_{n-2}$  csupa  $k-1$  fokú pontból álljon; ha  $n-2$  és  $k-1$  páratlanok, akkor elérhető, hogy  $G_{n-2}$   $n-3$  darab  $k-1$  fokú és egy  $k-2$  fokú pontból álljon. Az első esetben  $G_{n-2}$  éleinek száma  $\frac{(n-2)(k-1)}{2}$ , az utóbbi esetben

$G_{n-2}$  éleinek száma  $\frac{(n-3)(k-1) + (k-2)}{2}$  lesz. Azt, hogy egy ilyen gráfot mindig konstruálhatunk, a következő egyszerű lemmából láthatjuk be:

**2. Lemma.** *Legyenek  $m$  és  $l$  tetszőleges pozitív egész számok,  $1 \leq l \leq m-1$ . Akkor, ha  $m$  és  $l$  közül legalább az egyik páros, megadható olyan  $m$  szögpontú gráf, amelyben minden pont foka  $l$ , míg ha  $m$  és  $l$  mindketten páratlanok, megadható olyan  $m$  szögpontú gráf, amelyben  $m-1$  pont foka  $l$  és egy pont foka  $l-1$ .*

**Megjegyzés.** A 2. lemma speciális esete a [3] dolgozatban szereplő általános tételnek, amely általában megadja annak szükséges és elégséges feltételét, hogy tetszőleges megadott fokszámokra létezzék egy gráf, melynek pontjai az előírt fokszámokkal bírnak. Mivel a nekünk szükséges speciális esetben a bizonyítás igen egyszerű, a teljesség kedvéért a 4. tétel bizonyításának befejezése után a 2. lemma egy közvetlen bizonyítását közöljük.

Mármost a keresett  $G_n$  gráfot a következőképpen konstruáljuk meg:  $G_n$  tartalmazza a  $G_{n-2}$  gráfot mint részgráfot és ezen kívül még két pontot, amelyek közül az egyik  $G_{n-2}$  tetszőlegesen kijelölt  $k$  pontjával, a másik pedig a többi  $n-2-k$  pontjával és csak azokkal legyen összekötve. Akkor  $G_n$  átmérője nyilván legalább 3, pontjai fokának maximuma  $k$ , míg éleinek száma az első esetben

$$\frac{(n-2)(k-1)}{2} + n-2 = \frac{(n-2)k + (n-2)}{2},$$

a második esetben

$$\frac{(n-3)(k-1) + (k-2)}{2} + n - 2 = \frac{(n-2)k + (n-3)}{2},$$

tehát mindkét esetben az élek száma  $\left\{ \frac{(n-2)k + (n-1)}{2} \right\} - 1$ . A  $k = n - 2$

eset egyszerűen elintézhető, mert  $\left\{ \frac{(n-2)(n-2) + (n-1)}{2} \right\} = \binom{n-1}{2}$  és ha

$G_n$  egy  $n - 1$  szögpontú teljes gráfból és egy izolált pontból áll, akkor nyilván nem is összefüggő, tehát nincs is átmérője.

Az  $n = 2m + 1$ ,  $k = m$  eset, ahol  $m$  páros, könnyen elintézhető. Ez esetben ugyanis

$$\left\{ \frac{(n-2)k + (n-1)}{2} \right\} = \left\{ \frac{nk}{2} \right\} = \frac{nk}{2},$$

vagyis csak azt kell kimutatni, hogy ha  $m$  páros szám, egy  $2m + 1$  szögpontú  $m$  rendű reguláris gráf mindig 2 átmérőjű. Ez azonban nyilvánvaló, hiszen ha  $P$  és  $P'$  egy ilyen gráf két pontja, amelyek nincsenek éllel összekötve, akkor, mivel mindkét pont foka  $m$  és a két ponton kívül a gráfnak  $2m - 1$  pontja van, kell lenni a gráfban legalább egy olyan  $Q$  pontnak, amely mind  $P$ -vel, mind pedig  $P'$ -vel össze van kötve egy éllel.

Ezzel a 4. tételt bebizonyítottuk.

**A 2. lemma bizonyítása.** Ha  $l$  páros, legyenek  $P_1, \dots, P_m$  a keresett gráf szögpontjai és kössük össze a  $P_i$  és  $P_j$  pontokat ( $i \neq j$ ) egy éllel, akkor és csak akkor, ha van olyan  $h$  szám, hogy  $j - i \equiv h \pmod{m}$  és  $|h| \leq \frac{l}{2}$ .

Ennek a gráfnak nyilván minden pontjának foka  $l$ . Ha  $m$  páros és  $l$  páratlan, kössük össze egymással a  $P_i$  és  $P_j$  pontokat, ha van olyan  $h$  szám, hogy  $j - i \equiv h \pmod{m}$  és  $|h| \leq \frac{l-1}{2}$ , továbbá kössük össze a  $P_i$  és  $P_{i+\frac{m}{2}}$  pon-

tokat  $\left( i = 1, \dots, \frac{m}{2} \right)$ . Ennek a gráfnak megint csak minden pontjának foka  $l$ .

Ha  $m$  és  $l$  páratlanok, kössük össze egymással megint a  $P_i$  és  $P_j$  pontokat, ha  $j - i \equiv h \pmod{m}$  és  $|h| \leq \frac{l-1}{2}$ , továbbá kössük össze a  $P_i$  és  $P_{i+\frac{m-1}{2}}$

pontpárokat, ha  $i = 1, \dots, \frac{m-1}{2}$ . Ebben a gráfban a  $P_1, \dots, P_{m-1}$  pontok

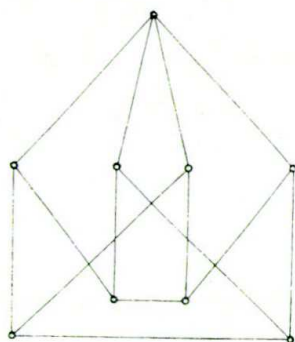
foka  $l$ , a  $P_m$  pont foka  $l - 1$  lesz. Így mindhárom esetben konstruáltunk egy a kívánt tulajdonságokkal bíró gráfot.

Ezzel a 2. lemmát bebizonyítottuk.

Az 1. Táblázat tartalmazza  $F_2(n, k)$  értékeit az összes olyan  $(n, k)$  szám-párokra, melyekre értelmezve van és melyekre  $k < 10$ ,  $n \leq 10$ .



Azt, hogy  $F_2(9, 4) = 14$ , az 5. ábrán látható gráf mutatja;  $F_2(n, k)$  többi, a táblázatban szereplő értékei a dolgozatban bebizonyított tételek alapján könnyen igazolhatók.



5. ábra

1. táblázat

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1								
3		2							
4		4	3						
5		5	6	4					
6			7	8	5				
7			9	9	10	6			
8			12	11	11	12	7		
9				14	13	13	14	8	
10			15	16	15	15	15	16	9

IRODALOM

[1] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: „Asymmetric graphs” (sajtó alatt az *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*-ban).  
 [2] KÁRTESZI F.: „Egy kombinatorikus minimum problémáról”. *Mat. Lapok* **II** (1960) 323—329.  
 [3] ERDŐS P.—GALLAI T.: „Gráfok előírt fokú pontokkal.” *Mat. Lapok* **II** (1960) 264—274  
 [4] HOFFMAN, A. J.—SINGLETON, R. R.: „On Moore graphs with diameters 2 and 3.” *IBM Journal of Research and Development* **4** (1960) 497—504.

## ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ

P. ERDŐS и A. RÉNYI

Пусть  $H_2(n, k)$  множество всех (неориентированных) графов  $G_n$  имеющих  $n$  заданных вершин, в которых максимум степени всех вершин равно  $k$  и диаметр которых  $\leq 2$ . Пусть  $F_2(n, k) = \min N(G_n)$  для  $G_n \in H_2(n, k)$ , где  $N(G)$  означает число ребер графа  $G$ . (В случае, если множество  $H_2(n, k)$  пустой, положим  $F_2(n, k) = +\infty$ .) В работе доказаны следующие неравенства:

**Теорема 1.** 
$$F_2(n, k) \geq \frac{n(n-1)}{2k}.$$

**Теорема 2.** 
$$F_2(n, k) \geq \frac{n(n-1)}{k + \frac{8n}{k}}, \quad \text{если } k^2 > 8n.$$

Доказывается далее с помощью конструкции, что Теорема 1 в пределе для  $n \rightarrow \infty$  не может быть улучшена, и Теорема 2 в пределе не может быть улучшена, если  $\frac{k^2}{n} \rightarrow \infty$ . Конструкция почти-экстремальных графов дана использованием конечных геометрий.

Возможная интерпретация задачи определения  $F_2(n, k)$  следующая: Если хотим устанавливать сеть воздушных сообщений между аэропортами так, чтобы ни одного из аэропортов не было в непосредственной связи с более чем  $k$  с другими аэропортами, и чтобы было возможным ехать из каждого аэропорта в каждый другой непосредственно или с одной единственной пересадкой, тогда требуется найти минимальное число непосредственных связей с которыми такая сеть может быть осуществлена.

## ON A PROBLEM IN THE THEORY OF GRAPHS

P. ERDŐS and A. RÉNYI

### Abstract

Let  $H_2(n, k)$  denote the set of all (non-directed) graphs  $G_n$  having  $n$  prescribed vertices, in which the maximum of the valencies of the vertices is equal to  $k$ , and the diameter of which is  $\leq 2$ . We put  $F_2(n, k) = \min N(G_n)$   $G_n \in H_2(n, k)$  where  $N(G)$  denotes the number of edges of the graph  $G$ . (If  $H_2(n, k)$  is empty we put  $F_2(n, k) = +\infty$ ). The following inequalities are proved:

**Theorem 1.**

$$F_2(n, k) \geq \frac{n(n-1)}{2k}.$$

**Theorem 2.**

$$F_2(n, k) \geq \frac{n(n-1)}{k + \frac{8n}{k}} \quad \text{if } k^2 > 8n.$$

It is shown further by effective construction that Theorem 1 is asymptotically best possible, and that Theorem 2 is also asymptotically best possible in the case  $\frac{k^2}{n} \rightarrow +\infty$ . The constructions are based on the use of finite geometries.

A possible interpretation of determining  $F_2(n, k)$  is as follows: we want to establish a network of air connections between  $n$  airports, so that the maximal number of airports with which any given airport is connected by a (direct) connection is equal to  $k$ , further that it should be possible to travel from any given airport to any other either directly or by changing the plane exactly once; (it is supposed that each plane travels from an airport  $A$  to another airport  $B$  and back, without landing at intermediate places); the problem is to determine the minimal number of air connections with which such a communication network can be realized.