Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 2, 75—84 (1963)

Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten

Von

A. Rényi und R. Sulanke

Einleitung

Seien P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ n nach einer gewissen Verteilung zufällig gewählte Punkte der Ebene, und bezeichne H_n die konvexe Hülle dieser Punkte, die ja bekanntlich ein konvexes Polygon ist. Die Anzahl X_n der Seiten von H_n ist dann eine Zufallsveränderliche, deren Verhalten für $n \to \infty$ bei verschiedenen Voraussetzungen über die Verteilung der Punkte P_i in dieser Arbeit untersucht werden soll. Dabei wird durchweg angenommen, daß die Punkte P_i unabhängig voneinander sind und dieselbe Verteilung haben. Durch $E_n = E(X_n)$ bezeichnen wir die mathematische Erwartung von X_n.

In § 1 betrachten wir den Fall, daß die P_i $(i = 1, \ldots, n)$ in einem konvexen Polygon K mit r Ecken gleichverteilt sind. Es wird gezeigt, daß $E_n = (2\,r/3)(\log n + C) + T + o(1)$ gilt; hierbei bezeichnet C die Eulersche Konstante. Die Größe $T = T(K)$ hängt dabei vom Bereich K ab. In § 2 beweisen wir den elementargeometrischen Satz, daß $T(K)$ für die dem regulären r-Eck affin äquivalenten Polygone und nur für diese maximal wird. In § 3 wird das asymptotische Verhalten von E_n untersucht, wenn die Punkte P_i in einem konvexen Bereich mit glattem Rand gleichverteilt sind. Es zeigt sich, daß E_n die Größenordnung $\sqrt[3]{n}$ hat. In § 4 schließlich beweisen wir, daß sich E_n wie $\sqrt{\log n}$ verhält, wenn die Punkte P_i normal verteilt sind.

§ 1. Zufällige Punkte in einem konvexen Polygon

Sei K ein konvexes Polygon mit den Eckpunkten $A_1, A_2, \ldots, A_r$ und den entsprechenden Winkeln $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r$. Bezeichne a_k die Länge der Seite $A_k A_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, r;\ A_{r+1} = A_1)$. Ferner bezeichne F den Flächeninhalt von K.

Sei $\varepsilon_{ij} = 1$, wenn $i \neq j$ ist und die Strecke $P_i P_j$ zur Begrenzung von H_n gehört, und $\varepsilon_{ij} = 0$ sonst. Dann gilt offenbar

$$X_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varepsilon_{ij}. \tag{1}$$

Die Wahrscheinlichkeit

$$W_n = P(\varepsilon_{ij} = 1) \tag{2}$$

ist für alle Zahlenpaare (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$ dieselbe, und es gilt

$$E_n = E(X_n) = \binom{n}{2} W_n. \tag{3}$$

Um das asymptotische Verhalten von E_n zu bestimmen genügt es also, die Wahrscheinlichkeit W_n zu berechnen. Es ist nun W_n die Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle Punkte P_h ($h = 3, 4, \ldots, n$) auf derselben Seite der Geraden durch P_1 und P_2 liegen. Bezeichnen wir durch $F_1 \leqq F/2$ und $F - F_1$ die Flächeninhalte der Teile von K, in die K durch die Gerade $P_1 P_2$ zerlegt wird, so gilt

$$W_n = \frac{1}{F^2} \int\limits_K \int\limits_K \left[\left(1 - \frac{F_1}{F}\right)^{n-2} + \left(\frac{F_1}{F}\right)^{n-2}\right] dP_1 dP_2 . \tag{4}$$

Offenbar ist wegen $F_1/F \leqq 1/2$

$$\frac{1}{F^2} \int\limits_K \int\limits_K \left(\frac{F_1}{F}\right)^{n-2} dP_1 dP_2 \leqq \frac{1}{2^{n-2}},$$

und somit*

$$E_n \sim \frac{\binom{n}{2}}{F^2} \int\limits_K \int\limits_K \left(1 - \frac{F_1}{F}\right)^{n-2} dP_1 dP_2 . \tag{5}$$

Bezeichne nun f_i den Flächeninhalt des Dreiecks $A_{i-1} A_i A_{i+1}$ ($A_{r+j} = A_j$), und sei $f = \min\limits_{1 \leqq i \leqq r} f_i$. Offenbar können wir uns bei der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von E_n auf solche Punktepaare P_1, P_2 beschränken, für die die Gerade $P_1 P_2$ entweder zwei benachbarte Seiten oder aber zwei durch eine andere Seite von K getrennte Seiten von K trifft. Für alle anderen Geraden gilt nämlich $1 - F_1/F \leqq 1 - f/F$. Daher können wir den entsprechenden Anteil des Integrals auf der rechten Seite von (5) vernachlässigen, und es gilt

$$E_n \sim \frac{\binom{n}{2}}{F^2} \left(\sum_{i=1}^{r} (I_i + J_i)\right), \tag{6}$$

wobei

$$I_i = \int\limits_{C_i} \left(1 - \frac{F_1}{F}\right)^{n-2} dP_1 dP_2 \tag{7}$$

und

$$J_i = \int\limits_{D_i} \left(1 - \frac{F_1}{F}\right)^{n-2} dP_1 dP_2 . \tag{8}$$

Hier bedeutet C_i die Menge der Punktepaare P_1, P_2, für die die Gerade $P_1 P_2$ die Seiten $A_{i-1} A_i$ und $A_i A_{i+1}$ von K trifft, und D_i die Menge der Punktepaare, für die die Gerade $P_1 P_2$ die Seiten $A_{i-1} A_i$ und $A_{i+1} A_{i+2}$ von K trifft.

Wir untersuchen zuerst das Integral I_i. Bezeichne G_{ab} die Menge der Punktepaare P_1, P_2, für die $|A_i Q_1| < a$ und $|A_i Q_2| < b$ gilt; hierbei bezeichnet Q_1 den Schnittpunkt der Geraden $P_1 P_2$ mit der Seite $A_{i-1} A_i$ und Q_2 ihren Schnittpunkt mit der Seite $A_i A_{i+1}$, ferner bedeutet $|AB|$ die Länge der Strecke AB. Durch eine elementare Rechnung ergibt sich

$$\int\limits_{G_{ab}} dP_1 dP_2 = \frac{a^2 b^2 \sin^2 \vartheta_i}{12} . \tag{9}$$

Der Flächeninhalt des von der Geraden $P_1 P_2$ abgeschnittenen Dreiecks $Q_1 A_i Q_2$

* $\sim$ bezeichnet „asymptotisch gleich", d. h. $A_n \sim B_n$ bedeutet, daß $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{A_n}{B_n} = 1$ ist.

ist gleich $1/2\ a\,b\,\sin\vartheta_i$. Somit erhalten wir

$$I_i = \int_0^{a_{i-1}}\int_0^{a_i} \left(1 - \frac{a\,b\,\sin\vartheta_i}{2\,F}\right)^{n-2} \sin^2\vartheta_i\,\frac{a\,b}{3}\,da\,db\,, \tag{10}$$

wo a_i die Länge der Seite $A_i A_{i+1}$ bedeutet.

Durch die Transformation

$$X = a\sqrt{\frac{\sin\vartheta_i}{2\,F}}\,, \qquad Y = b\sqrt{\frac{\sin\vartheta_i}{2\,F}} \tag{11}$$

ergibt sich

$$I_i = \frac{4\,F^2}{3}\int_0^{X_i}\int_0^{Y_i} (1 - X\,Y)^{n-2}\,X\,Y\,dX\,dY\,, \tag{12}$$

wobei

$$X_i = a_{i-1}\sqrt{\frac{\sin\vartheta_i}{2\,F}}\,, \qquad Y_i = a_i\sqrt{\frac{\sin\vartheta_i}{2\,F}}\,,$$

also

$$\varrho_i = X_i\,Y_i = \frac{a_{i-1}\,a_i\sin\vartheta_i}{2\,F} = \frac{f_i}{F} < 1 \tag{13}$$

gilt. Nun ist

$$\int_0^{X_i}\int_0^{Y_i}(1 - X\,Y)^{n-2}\,X\,Y\,dX\,dY = \int_0^{X_i}\int_0^{Y_i}(1 - X\,Y)^{n-2}\,dX\,dY - \int_0^{X_i}\int_0^{Y_i}(1 - X\,Y)^{n-1}\,dX\,dY.$$

Weiter gilt

$$\int_0^{X_i}\int_0^{Y_i}(1 - X\,Y)^{n-1}\,dX\,dY = \int_0^{X_i}\frac{1-(1 - X\,Y_i)^n}{n\,X}\,dX =$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(1-\varrho_i)^k}{k}}{n}\,.$$

Somit erhalten wir

$$I_i = \frac{4\,F^2}{3}\left\{\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{n\,(n-1)} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{(1-\varrho_i)^k}{k}}{n\,(n-1)} + \frac{(1-\varrho_i)^n}{n^2}\right\}. \tag{14}$$

Setzen wir

$$S_i = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\varrho_i)^k}{k} = \log\frac{1}{\varrho_i}\,, \tag{15}$$

so ergibt sich schließlich

$$E_n = \frac{2}{3}\,(C - 1 + \log n)\,r - \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{r} S_i + o\,(1) + \frac{\binom{n}{2}}{F^2}\sum_{i=1}^{r} J_i\,, \tag{16}$$

wobei C die Eulersche Konstante bedeutet.

Nun berechnen wir das Integral J_i. Wir verlängern die Seiten $A_{i-1}A_i$ und $A_{i+1}A_{i+2}$ bis zu ihrem Schnittpunkt A_i^*; der Fall, daß diese Seiten parallel sind, läßt sich ähnlich behandeln. Sei wieder Q_1 der Schnittpunkt der Geraden P_1P_2 mit der Seite $A_{i-1}A_i$ und Q_2 der Schnittpunkt mit der Seite $A_{i+1}A_{i+2}$ und sei $a' = |A_i A_i^*|$, $b' = |A_{i+1}A_i^*|$, $a = |A_i Q_1|$, $b = |A_{i+1}Q_2|$; G_{ab} sei wie oben definiert. Wir erhalten aus (9)

$$\int_{G_{ab}} dP_1\,dP_2 = \frac{\sin^2\gamma_i}{12}\,(a^2 + 2\,a\,a')\,(b^2 + 2\,b\,b')\,, \tag{17}$$

wobei γ_i den Winkel bei A_i^* bedeutet. Somit ist

$$J_i = \int_{D_i} \left(1 - \frac{(ab + a'b + ab')\sin\gamma_i}{2F}\right)^{n-2} \frac{\sin^2\gamma_i}{3} (a + a')(b + b')\, da\, db \tag{18}$$

und dieses Integral ist asymptotisch gleich

$$J_i \sim \int_{D_i} \left(1 - \frac{(a'b + ab')\sin\gamma_i}{2F}\right)^{n-2} \frac{\sin^2\gamma_i}{3} a'b'\, da\, db. \tag{19}$$

Führen wir die Transformation

$$a = \frac{F}{b'\sin\gamma_i} X, \quad b = \frac{F}{a'\sin\gamma_i} Y$$

aus, so folgt

$$J_i \sim \frac{F^2}{3} \int_0^{a'_{i-1}} \int_0^{a'_{i+1}} \left(1 - \frac{X+Y}{2}\right)^{n-2} dX\, dY =$$

$$= \frac{4F^2}{3n(n-1)} \left\{1 - \left(1 - \frac{a'_{i-1}}{2}\right)^n - \left(1 - \frac{a'_{i+1}}{2}\right)^n + \left(1 - \frac{a'_{i-1} + a'_{i+1}}{2}\right)^n\right\},$$

wobei

$$a'_{i-1} = \frac{a_i b' \sin\gamma_i}{F}, \quad a'_{i+1} = \frac{a_{i+2} a' \sin\gamma_i}{F}$$

gesetzt ist. Somit ergibt sich

$$E_n = \frac{2r}{3}(\log n + C) - \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{r} S_i + o(1).$$

Fassen wir das Bewiesene in dem folgenden Satz zusammen:

Satz 1. *Sei K ein konvexes Polygon mit r Seiten. Die mathematische Erwartung E_n der Anzahl der Seiten der konvexen Hülle H_n von n in K zufällig gewählten Punkten ist gleich*

$$E_n = \frac{2r}{3}(\log n + C) + \frac{2}{3}\log\frac{\prod_1^r f_i}{F^r} + o(1). \tag{20}$$

Hierbei bedeutet F den Flächeninhalt von K und f_i den Flächeninhalt des von den Ecken A_{i-1}, A_i, A_{i+1} von K gebildeten Dreiecks.

Ist z.B. K ein Dreieck, so gilt $f_1 = f_2 = f_3 = F$ und es folgt

$$E_n = 2(\log n + C) + o(1). \tag{21}$$

Die Formel für E_n hängt also nicht von der Form des Dreiecks ab. Das ist verständlich; denn E_n muß offenbar gegenüber affinen Transformationen invariant sein. In § 2 werden wir zeigen, daß die in (20) auftretende, von der Gestalt von K abhängende Konstante

$$Z(K) = \frac{\prod_{i=1}^r f_i}{F^r} \tag{22}$$

für ein reguläres r-Eck (und die zu ihm affin äquivalenten Polygone) maximal wird.

§ 2. Ein Extremalproblem für konvexe Polygone

Bevor wir zu weiteren asymptotischen Abschätzungen für E_n unter anderen Voraussetzungen über die Verteilung der Punkte P_i übergehen, beweisen wir den folgenden

Satz 2. *Sei K ein konvexes Polygon mit r Seiten. Dann gilt mit den Bezeichnungen des vorigen §: Die Funktion*

$$Z(K) = \frac{1}{F^r} \prod_{i=1}^{r} f_i \tag{23}$$

ist maximal genau dann, wenn K durch eine affine Transformation in das reguläre r-Eck übergeführt werden kann.

Sei $\mathfrak{a}_i = \overrightarrow{A_{i-1}A_i}$, wobei $A_{r+i} = A_i$ gesetzt werde. Dann gilt

$$f_i = \frac{1}{2}[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_{i+1}], \quad F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r-2}[\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_{i+1}], \tag{24}$$

wobei $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ die Determinante der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ bedeutet. Die Funktion $Z(K)$ ist nun eine Funktion der r Vektoren $\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$, die der Schließungsbedingung

$$\sum_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i = 0 \tag{25}$$

genügen. Wir denken uns jetzt die Eckpunkte A_i von K genügend kleinen Verschiebungen unterworfen, die stetig differenzierbar von einem Parameter t abhängen mögen. Da das Ausgangspolygon K, das dem Parameterwert $t = 0$ entsprechen möge, ein konvexes r-Eck ist, sind dann auch die durch genügend kleine Variation von t entstehenden Polygone konvexe r-Ecke. Die Funktion Z muß, betrachtet als Funktion von t, an der Stelle $t = 0$ ein Maximum haben, wenn K ein maximales Polygon ist. Als notwendige Bedingung dafür, daß K maximal ist, erhalten wir durch eine elementare Rechnung:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{r} \frac{F}{f_i}([\dot{\mathfrak{a}}_i, \mathfrak{a}_{i+1}] + [\mathfrak{a}_i, \dot{\mathfrak{a}}_{i+1}]) - \\ &\quad - r\sum_{i=1}^{r-2}([\dot{\mathfrak{a}}_1 + \cdots + \dot{\mathfrak{a}}_i, \mathfrak{a}_{i+1}] + [\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_i, \dot{\mathfrak{a}}_{i+1}]) = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Hierbei wurde

$$\dot{\mathfrak{a}}_i = \frac{d}{dt}\mathfrak{a}_i \Big|_{t=0}$$

gesetzt. Die $\dot{\mathfrak{a}}_i$ sind beliebige Vektoren, die nur der aus (25) folgenden Schließungsbedingung

$$\sum_{i=1}^{r} \dot{\mathfrak{a}}_i = 0 \tag{27}$$

zu genügen haben. Setzen wir nun nacheinander

$$\dot{\mathfrak{a}}_j = \mathfrak{b}, \quad \dot{\mathfrak{a}}_{j+1} = -\mathfrak{b}, \quad \dot{\mathfrak{a}}_i = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j, \ j+1, \tag{28}$$

wobei $\mathfrak{b}$ ein zunächst noch willkürlicher Vektor ist, so ist die Schließungsbedingung offenbar erfüllt und wir erhalten für $j = 1, \ldots, r$

$$\frac{F}{r}\left\{\frac{[\mathfrak{a}_{j-1}, \mathfrak{b}]}{f_{j-1}} - \frac{[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_{j+2}]}{f_{j+1}} + \frac{1}{f_j}[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_j + \mathfrak{a}_{j+1}]\right\} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{a}_j + \mathfrak{a}_{j+1}]. \tag{29}$$

Wählen wir nun speziell $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_j$, so folgt

$$\frac{F}{r}\left\{4 - \frac{[\mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_{j+2}]}{f_{j+1}}\right\} = 2 f_j \tag{30}$$

und für $\mathfrak{b} = -\mathfrak{a}_{j+1}$ ergibt sich

$$\frac{F}{r}\left\{4 - \frac{[\mathfrak{a}_{j-1}, \mathfrak{a}_{j+1}]}{f_{j-1}}\right\} = 2 f_j. \tag{31}$$

Der Vergleich dieser Formeln liefert

$$[\mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_{j+2}] = \frac{f_{j+1}}{f_{j-1}}[\mathfrak{a}_{j-1}, \mathfrak{a}_{j+1}]. \tag{32}$$

Wir schreiben jetzt (31) in der Gestalt

$$2\left(2 - \frac{r f_j}{F}\right) = \frac{[\mathfrak{a}_{j-1}, \mathfrak{a}_{j+1}]}{f_{j-1}}$$

und erhalten durch wiederholte Anwendung von (32)

$$2\left(2 - \frac{r f_j}{F}\right) = \frac{f_j}{f_1 \cdot f_2}[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3]$$

oder

$$f_j = \frac{2}{\frac{r}{F} + \frac{[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3]}{2 f_1 \cdot f_2}}. \tag{33}$$

Für $r = 3$ ist unsere Extremalaufgabe trivial. Im Falle $r \geqq 4$ ergibt sich zunächst $f_3 = f_4 = \cdots = f_r$. Durch eine zyklische Vertauschung der Numerierung der Eckpunkte von K folgt unmittelbar

$$f_1 = f_2 = \cdots = f_r \tag{34}$$

und nach (32) erhalten wir außerdem

$$[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_{i+2}] = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3] = \mathfrak{b} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{35}$$

wobei b eine gewisse Konstante ist.

Bemerkung. Im Fall $b = [\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_{i+2}] = 0$ ist $f_j = 2F/r$. Also ist stets $\mathfrak{a}_{i+2}$ parallel zu $\mathfrak{a}_i$. Das ist nur möglich, wenn $r = 4$ und K ein Parallelogramm ist.

Wir kehren nun zum allgemeinen Fall zurück. Durch eine affine Transformation können wir stets erreichen, daß $f_j = 1/2$, d. h.

$$[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_{i+1}] = 1 \tag{36}$$

gilt. Aus (33) folgt dann sofort

$$F = \frac{r}{2(2-b)} \quad \text{und daher} \quad b < 2. \tag{37}$$

Da die Vektoren $\mathfrak{a}_{i-2}$ und $\mathfrak{a}_{i-1}$ linear unabhängig sind, folgt aus dem Ansatz $\mathfrak{a}_i = \alpha\,\mathfrak{a}_{i-2} + \beta\,\mathfrak{a}_{i-1}$ unter Beachtung von (35) und (36) die Rekursion

$$\mathfrak{a}_i = -\mathfrak{a}_{i-2} + b\,\mathfrak{a}_{i-1}. \tag{38}$$

Wir haben also gezeigt, daß die Seitenvektoren $\mathfrak{a}_i$ eines maximalen konvexen r-Ecks notwendig eine Rekursion der Gestalt (38) erfüllen müssen. Der Beweis wird jetzt zu Ende geführt, indem wir zeigen, daß sich in diesem Fall eine euklidische Metrik in der affinen Ebene definieren läßt, bezüglich der das Polygon K gerade als reguläres r-Eck erscheint.

Zunächst bemerken wir, daß stets

$$-1 \leqq b < 2 \tag{39}$$

gelten muß. Wäre nämlich $b < -1$, so würde die Seite $\mathfrak{a}_3$ die Seite $\mathfrak{a}_1$ durchdringen, was der Konvexität von K widerspricht. Die obere Abschätzung $b < 2$ ist schon bewiesen ((37)).

Die euklidische Metrik ist eindeutig bestimmt, wenn wir die Skalarprodukte der Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ festlegen, die wir als Basisvektoren betrachten. Diese Skalarprodukte definieren wir durch

$$\mathfrak{a}_1^2 = \mathfrak{a}_2^2 = \frac{2}{\sqrt{4-b^2}}, \quad \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2 = \frac{b}{\sqrt{4-b^2}}. \tag{40}$$

Offenbar gilt

$$[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2]^2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1^2 & \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_2^2 \end{vmatrix} = 1.$$

Daher ist die so definierte Metrik positiv definit, d. h. euklidisch. Durch vollständige Induktion beweist man nun leicht unter Benutzung der Rekursion (38), daß für alle j

$$\mathfrak{a}_j^2 = \frac{2}{\sqrt{4-b^2}}, \quad \mathfrak{a}_j\,\mathfrak{a}_{j+1} = \frac{b}{\sqrt{4-b^2}}, \quad [\mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_{j+1}] = 1$$

gelten muß. Hieraus folgt, daß alle Seiten unseres r-Ecks K dieselbe Länge haben und daß sich zwei aufeinander folgende Seiten unter demselben Winkel schneiden. Also muß das r-Eck bezüglich dieser Metrik regulär sein.

Hiermit ist die Eindeutigkeit des maximalen Polygons bewiesen. Die Existenz ergibt sich durch eine einfache Folgerung aus der Beschränktheit von $Z(K)$ sowie der Stetigkeit von F und Z. Also ist Satz 2 vollständig bewiesen.

§ 3. Zufällige Punkte in einem konvexen Bereich mit glattem Rand

Sei jetzt K ein konvexer Bereich, dessen Rand eine Krümmung besitzt, die als Funktion der Bogenlänge stetig ist. Mit den Bezeichnungen der vorigen Paragraphen haben wir wieder

$$E_n = \binom{n}{2} W_n.$$

Nach einem bekannten Satz der Integralgeometrie (vgl. Blascke [*1*], S. 17, (86)) kann die Dichte für Punktepaare folgendermaßen umgeformt werden:

$$dP_1\,dP_2 = |t_1 - t_2|\,dt_1\,dt_2\,d\varphi\,dp, \tag{41}$$

wobei p den Abstand der Geraden $P_1 P_2$ vom Koordinatenursprung, φ den Winkel dieser Geraden mit einer Nullrichtung und t_1, t_2 die Parameterwerte der Bogenlänge der Punkte P_1, P_2 auf der Geraden $P_1 P_2$ bedeutet. Bezeichne f den Flächeninhalt des durch die Gerade $P_1 P_2$ von K abgeschnittenen Teils. Dann gilt

$$E_n = \frac{\binom{n}{2}}{F^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{p(\varphi)} \left(1 - \frac{f}{F}\right)^{n-2} \left(\int\int |t_1 - t_2| \, dt_1 \, dt_2 \right) dp \right\} d\varphi . \tag{42}$$

Durch $l(p, \varphi)$ bezeichnen wir die Länge der Sehne, in der die Gerade mit den Koordinaten p, φ den Bereich K trifft. Es gilt

$$\int\int |t_1 - t_2| \, dt_1 \, dt_2 = \frac{l^3(p, \varphi)}{3} . \tag{43}$$

Somit erhalten wir

$$E_n = \frac{\binom{n}{2}}{3 F^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{p(\varphi)} \left(1 - \frac{f}{F}\right)^{n-2} l^3(p, \varphi) \, dp \right\} d\varphi . \tag{44}$$

Bei der Berechnung des asymptotischen Wertes von E_n kann man sich offenbar auf solche Wertepaare p, φ beschränken, für die $f/F < \varepsilon$ gilt; denn die anderen Wertepaare geben nur ein Restglied der Ordnung $n^2 (1 - \varepsilon)^n = o(1)$. Wir betrachten nun einen festen Wert von φ. Es sei $P(\varphi)$ der Punkt, in dem die Tangente von K die Richtung φ hat. Bei der Berechnung von E_n kann man f und l durch die entsprechenden Größen $\bar{f}$ und $\bar{l}$ des Schmiegkreises im Punkte $P(\varphi)$ ersetzen, wie aus den folgenden Abschätzungen hervorgeht. Sei α der zur Sehne $\bar{l}$ gehörende Zentriwinkel und $r(\varphi)$ der Radius des Schmiegkreises im Punkte $P(\varphi)$. Dann gilt

$$\bar{l} = 2 r(\varphi) \sin \alpha/2 \quad \text{und} \quad \bar{f} = \tfrac{1}{2} (\alpha - \sin \alpha) r^2(\varphi) , \tag{45}$$

ferner

$$|dp| = \tfrac{1}{2} r(\varphi) \sin \alpha/2 \, |d\alpha| . \tag{46}$$

Schließlich ist

$$l - \bar{l} = o(\alpha^2) \quad \text{und} \quad f - \bar{f} = o(\alpha^4) . \tag{47}$$

Somit ergibt sich

$$E_n = \frac{\binom{n}{2}}{12 F^2} \int_0^{2\pi} r^4 \int_0^{\alpha(\varphi)} \left(1 - \frac{\alpha^3 r^2}{12 F^2} + o(\alpha^3)\right)^{n-2} (\alpha^4 + o(\alpha^5)) \, d\alpha \, d\varphi . \tag{48}$$

Durch die Substitution

$$\frac{\alpha^3 r^2}{12 F} = \frac{X}{n} \tag{49}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} S(\varphi) &= \int_0^{\alpha(\varphi)} \left(1 - \frac{\alpha^3 r^2}{12 F} + o(\alpha^3)\right)^{n-2} (\alpha^4 + o(\alpha^5)) \, d\alpha , \\ S(\varphi) &= \frac{1}{3} \left(\frac{12 F}{r^2 n}\right)^{5/3} \left(\int_0^{\infty} \left(1 - \frac{X}{n}\right)^{n-2} x^{2/3} \, dx + o(1) \right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{3} \left(\frac{12 F}{r^2 n}\right)^{5/3} (1 + o(1)) . \end{aligned} \tag{50}$$

Somit gilt

$$E_n \sim \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \sqrt[3]{\frac{2 n}{3 F}} \int_0^{2\pi} r^{2/3} \, d\varphi . \tag{51}$$

Bezeichnet nun s die Bogenlänge auf dem Rand von K, so erhalten wir unter

Beachtung von $d\varphi/ds = 1/r$ den folgenden Satz:

Satz 3. *Ist K ein konvexer Bereich, dessen Randkurve L die stetige Krümmung $\varkappa = \varkappa(s)$ besitzt, so gilt*

$$E_n \sim \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\, (F^{-1/3} \int_L \varkappa^{1/3}\, ds) \sqrt[3]{n}\,. \tag{52}$$

Das in (52) auftretende Integral $\int_L \varkappa^{1/3}\, ds$ ist gerade die äquiaffine Länge der Kurve L. Man erkennt leicht, daß der Faktor von $\sqrt[3]{n}$ sogar affin invariant ist. Aus der affinen isoperimetrischen Eigenschaft der Ellipsen (BLASCHKE-REIDEMEISTER) folgt unmittelbar, daß dieser Faktor für die Ellipsen und nur für die Ellipsen maximal ist.

§ 4. Normal verteilte zufällige Punkte

In diesem Paragraphen beweisen wir den folgenden Satz:

Satz 4. *Die Punkte P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ seien unabhängig voneinander und nach derselben Normalverteilung in der Ebene gewählt. Dann gilt*

$$E_n \sim 2\sqrt{2\pi \log n}\,. \tag{53}$$

Beweis. Da E_n offenbar gegenüber affinen Transformationen der Ebene invariant ist, können wir annehmen, daß die Dichtefunktion unserer Normalverteilung die Gestalt $\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ hat. Wie schon in den vorigen Paragraphen gilt

$$E_n = \binom{n}{2} W_n,$$

wobei W_n die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß alle Punkte $P_3, \ldots, P_n$ auf derselben Seite der Geraden $P_1 P_2$ liegen. Wegen der integralgeometrischen Formel

$$dP_1\, dP_2 = dp\, d\varphi\, |t_1 - t_2|\, dt_1\, dt_2$$

und wegen der Kreissymmetrie der Normalverteilung erhalten wir

$$W_n = \frac{1}{2\pi} \int\int\int (g(p)^{n-2} + (1 - g(p))^{n-2})\, |t_1 - t_2|\, e^{-p^2 - \frac{t_1^2 + t_2^2}{2}}\, dt_1\, dt_2\, dp\,, \tag{54}$$

wobei

$$g(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{p}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi}\, dx\, dy = 1 - \Phi(p) \tag{55}$$

gesetzt wurde und

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{p} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \tag{56}$$

gilt.

Durch die Transformation

$$u = \frac{t_1 - t_2}{\sqrt{2}}\,, \quad v = \frac{t_1 + t_2}{\sqrt{2}}\,, \quad \frac{\partial(t_1, t_2)}{\partial(u, v)} = 1 \tag{57}$$

erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi}\int\int|t_1-t_2|\,e^{-\frac{t_1^2+t_2^2}{2}}\,dt_1\,dt_2=\frac{2}{\sqrt{\pi}}. \tag{58}$$

Also gilt

$$W_n=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty[\Phi^{n-2}(p)+(1-\Phi(p))^{n-2}]\,e^{-p^2}\,dp \tag{59}$$

und da offenbar $1-\Phi(p)\leqq 1/2$ für $p\geqq 0$ ist, folgt

$$W_n\sim\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\Phi^{n-2}(p)\,e^{-p^2}\,dp. \tag{60}$$

Nun ist für $p>1$

$$\Phi(p)=1-\frac{e^{-\frac{p^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,p\left(1+\frac{\theta p}{p^2}\right)} \tag{61}$$

wobei $0<\theta_p<1$ gilt (A. Rényi, [3], S. 136, Aufgabe 18). Durch die Substitution

$$p=\sqrt{2\log n-\log(2\log n)}+\frac{u-\log\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\log n}} \tag{62}$$

erhält man schließlich nach einigem Rechnen

$$W_n\sim\frac{4\sqrt{2\pi\log n}}{n^2}.$$

Also ist

$$E_n\sim 2\sqrt{2\pi\log n},$$

was zu beweisen war.

Literatur

[1] Blaschke, W.: Integralgeometrie. 3. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1955, 1—130.
[2] —, und K. Reidemeister: Differentialgeometrie II, Berlin: Springer 1923, 60.
[3] Rényi, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung, mit einem Anhang über Informationstheorie. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1962, 1—547.

Magyar Tudományos Akadémia Matematikai
Kutató Intézete Reáltanoda u. 13—15
Budapest V
und
Humboldt-Universität
Berlin

(Eingegangen am 10. November 1962)