

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ALFRED RÉNYI

MAURICE FRÉCHET

## **Sur les espaces simples des Probabilités conditionnelles**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 1, n° 1 (1964), p. 3-21.

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1964\\_\\_1\\_1\\_3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1964__1_1_3_0)

© Gauthier-Villars, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Sur les espaces simples des Probabilités conditionnelles

par

Alfred RÉNYI  
(Budapest).

---

### Avertissement

par Maurice FRÉCHET  
(Paris).

---

Il y a quelques années, M. Rényi avait fait à Paris un exposé qui m'avait vivement frappé. Je lui avais dit que ses très remarquables contributions à divers chapitres du Calcul des Probabilités viendraient se placer à côté d'autres importantes contributions dues à divers auteurs, tandis que sa conception entièrement nouvelle <sup>(1)</sup> de ce que j'appellerai ses « probabilités généralisées » apporte un aspect fondamentalement distinct aux fondements du Calcul des Probabilités. Depuis lors, M. Rényi a donné des exposés très complets de sa théorie en différentes langues.

Je l'ai plusieurs fois invité à donner un article en français donnant une idée simple de sa théorie.

M. Rényi a bien voulu y consentir et se limite dans ce Mémoire à l'étude de ce qu'il appelle (p. 7) un espace *simple* de probabilités conditionnelles.

Avant de lui donner la parole, je voudrais prévenir le lecteur contre un malentendu possible. A lire le texte qui suit, on pourrait penser qu'il y a

---

<sup>(1)</sup> Toutefois, M. Rényi a appris, assez récemment, que M. Kolmogoroff a émis des idées analogues dans une conférence qui n'a pas été publiée.

dans ce texte deux innovations : 1° on renoncerait aux probabilités absolues pour se limiter aux probabilités *conditionnelles*; 2° une probabilité généralisée de l'événement A sous la condition B est de la forme

$$(I.13) \quad P(A | B) = \frac{\mu(AB)}{\mu(B)},$$

où  $\mu(B)$  n'est pas borné quand B varie.

Or si l'on parle souvent, pour abrégé, de la probabilité  $P(A)$  d'un événement A, comme s'il s'agissait d'une probabilité absolue, en réalité, l'expression n'a pas de sens par elle-même. Que l'auteur le précise ou non, les probabilités dont il parle sont toujours relatives à ce que j'ai appelé dans toutes mes publications « Une certaine catégorie d'épreuves » B ou ce que d'autres auteurs ont explicité d'une autre façon.

De sorte que l'*innovation essentielle* de M. Rényi réside dans l'hypothèse que dans la formule (I.13) (de la p. 12), la mesure  $\mu(B)$  n'est pas bornée.

M. Rényi a bien voulu m'écrire : « Vous avez parfaitement raison en disant que la théorie des champs de probabilités conditionnelles ne fournit au fond de résultat nouveau que si la mesure  $\mu$  [dans la formule (I.13)] n'est pas bornée ».

Pour voir comment cette hypothèse permet de donner un sens à des probabilités qui n'en avaient pas, je crois que le lecteur ferait bien, avant de lire en détail le texte qui suit, de voir les deux excellents exemples donnés pages 16-17, par M. Rényi.

---

#### Exposé d'Alfred RÉNYI

**RÉSUMÉ.** — Il y a quelques années, l'auteur a proposé une théorie axiomatique des espaces des probabilités conditionnelles (*voir* [2] à [6], qui est une généralisation naturelle de la théorie axiomatique des probabilités due à M. Kolmogoroff [1]. Dans le présent Mémoire, le cas spécial le plus simple des espaces des probabilités conditionnelles ayant une seule mesure génératrice, non borné est élaboré d'une façon détaillée.

**SUMMARY.** — Some years ago the author (*see* [2]-[6]) proposed an axiomatic theory of conditional probability spaces, which is a natural generalization of the axiomatic theory of probability due to A. N. Kolmogoroff [1]. In the present note the most simple special case of conditional probability spaces generated by a single unbounded measure is worked out in detail.

**Introduction.** — Il y a quelques années j'ai élaboré une théorie axiomatique des espaces des probabilités conditionnelles <sup>(1)</sup>, qui est une généralisation naturelle de la théorie axiomatique des probabilités aujourd'hui généralement acceptée, due à M. Kolmogoroff <sup>(2)</sup> [1]. Cette théorie générale est basée, comme celle de M. Kolmogoroff, sur la théorie des ensembles et de la mesure; les événements aléatoires sont représentés de la même façon par les sous-ensembles mesurables d'un espace abstrait. Une différence principale consiste en ce que les probabilités conditionnelles sont exprimées dans ma théorie par l'intermédiaire d'une mesure qui peut être non bornée; tandis que, dans la théorie classique, seulement les mesures bornées sont admises. Il y a aussi une autre différence qui est plutôt d'ordre didactique. Ceci correspond au fait qu'en réalité chaque probabilité est conditionnelle. La question : quelle est la valeur de la probabilité d'un événement aléatoire ? n'a de sens exact que si l'on précise les conditions sous lesquelles cet événement est observé. Comme M. M. Fréchet l'a formulé (*voir* [7], p. 5-10), la probabilité d'un événement n'a un sens que « dans une certaine catégorie d'épreuves ». Par exemple, si l'on parle de la probabilité de tirer une carte donnée d'un paquet de cartes, il est sous-entendu que ce paquet est bien mêlé et contient une de toutes les cartes possibles. Mais cela s'entend sans dire, et les probabilités calculées sous cette condition ne sont pas appelées probabilités conditionnelles, bien qu'elles le soient. Le fait que toute probabilité est conditionnelle est contenu seulement d'une manière implicite dans la théorie classique, mais il est exprimé d'une façon explicite dans la mienne.

En général, en appliquant la théorie de M. Kolmogoroff à une situation réelle, on choisit toujours quelques conditions (circonstances) données comme fondamentales et les probabilités calculées sous ces conditions sont appelées les probabilités ordinaires (ou absolues) sans faire allusion aux conditions fixées. C'est seulement si à ces conditions il s'ajoute une nouvelle condition complémentaire, qu'on parle des probabilités conditionnelles; mais, malgré cet emploi des mots usuels, en principe chaque probabilité est conditionnelle. Ce fait a été souligné du point de vue philosophique par plusieurs auteurs, comme par exemple MM. Reichenbach [8], Popper [9], Keynes [10], Koopman [11], Copeland [12], Barnard [13], Good [14], mais

---

<sup>(1)</sup> Voir mes travaux ([2] à [6]).

<sup>(2)</sup> Après avoir élaboré cette théorie, j'ai appris par M. B. V. Gnedenko que M. Kolmogoroff lui-même avait déjà indiqué dans une conférence, quelques années auparavant, la possibilité d'une telle généralisation de sa théorie, mais il n'avait rien publié sur ce sujet.

ces auteurs n'ont pas suivi cette idée jusqu'à la construction d'une théorie mathématique — comme celle de M. Kolmogoroff — fondée sur la théorie des ensembles et de la mesure. D'autres auteurs sont arrivés aux mêmes conclusions en partant des applications concrètes de la notion des probabilités. Il y a des situations réelles dans lesquelles il n'existe pas de condition susceptible d'être considérée comme naturelle ; chaque condition qu'on peut prendre comme fondamentale étant également arbitraire. Tel est le cas, par exemple, dans la psychologie des choix. La probabilité de choisir quelque chose dépend essentiellement de l'ensemble des alternatives possibles. Autrement dit, choisir cela signifie toujours, choisir un ensemble donné. Demander, par exemple, quelle est la probabilité qu'un consommateur choisisse un plat déterminé, n'a de sens que si l'ensemble des plats sur la carte est donné. Ces considérations ont conduit, par exemple, M. R. Luce [15], un peu plus tard, mais indépendamment de l'auteur de cette Note, à la notion d'espaces des probabilités conditionnelles spéciales.

Pour caractériser le point de départ d'un autre groupe de chercheurs, nous devons mentionner d'abord l'avantage le plus important, d'un point de vue strictement mathématique, de la théorie des probabilités conditionnelles. Comme il est bien connu, dans la théorie de Kolmogoroff, la probabilité conditionnelle  $P(A | B)$  d'un événement  $A$  sous la condition que l'événement  $B$  a lieu (en bref : sous la condition  $B$ ) est exprimé par la formule

$$(1) \quad P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

où  $P(B)$  est la probabilité de l'événement  $B$ , et  $P(AB)$  celle de la réalisation conjointe des événements  $A$  et  $B$ . Étant donné que, dans la théorie de M. Kolmogoroff, les événements sont représentés par les sous-ensembles mesurables d'un espace abstrait, et la probabilité des événements est une mesure définie sur ces ensembles (en dénotant l'ensemble représentant un événement par la même lettre que cet événement, et en désignant l'intersection des deux ensembles par leur produit), on peut dire que la probabilité conditionnelle s'exprime dans la théorie de M. Kolmogoroff sous la forme

$$(2) \quad P(A | B) = \frac{\mu(AB)}{\mu(B)},$$

où  $A$  et  $B$  sont les sous-ensembles d'un espace  $\Omega$ ,  $AB$  désigne leur intersection et  $\mu$  est une mesure. Cependant, dans la théorie de M. Kolmogoroff  $\mu$  est toujours une mesure bornée, notamment une mesure normée par la condition  $\mu(\Omega) = 1$ . Par contre, notre théorie admet des cas où la pro-

babilité conditionnelle de l'événement  $A$  sous la condition  $B$  est exprimée par la formule (2), où  $\mu$  est une mesure non bornée. Or, des cas où l'emploi d'une mesure qui n'est pas bornée semble être naturel se présentent justement dans des domaines différents, tels que la physique quantique, la statistique mathématique (en connexion avec la formule de Bayes), la géométrie intégrale et en connexion avec l'application des méthodes probabilistes dans la théorie des nombres. Dans ces cas, il est clair, pour des raisons purement mathématiques, que seulement des probabilités conditionnelles ont un sens et que les probabilités absolues ne peuvent pas être définies. Plusieurs auteurs, comme par exemple M. Jeffreys [16], M. Dumas ([17], [18]) et M. Baticle ([19], [20]) sont arrivés à la notion des espaces des probabilités conditionnelles dans des cas concrets. Mais ces auteurs n'ont pas essayé d'élaborer une théorie généralisée des probabilités où l'emploi de la formule (1) avec une mesure  $\mu$  non bornée est admissible, ils ont utilisé de telles mesures d'une manière heuristique, étant satisfaits par le fait que ce mode de raisonnement conduit souvent à des résultats finaux raisonnables.

Jusqu'ici seulement les fondements de la théorie des espaces des probabilités conditionnelles sont élaborés. L'auteur a été encouragé à écrire ce travail par M. le Professeur Maurice Fréchet qui pensait que la publication en français d'un compte rendu de cette théorie (qui ne suppose pas la connaissance de mes travaux antérieurs sur ce sujet) peut être utile pour le développement ultérieur de cette théorie. En essayant de répondre à l'invitation obligeante de M. Fréchet qui me fait beaucoup d'honneur, j'ai pensé à élaborer d'une façon plus détaillée que dans mes publications précédentes, le cas spécial le plus simple et en même temps le plus important des espaces de probabilités conditionnelles, notamment celui des espaces des probabilités conditionnelles ayant une seule mesure génératrice, c'est-à-dire dans laquelle la probabilité conditionnelle  $P(A | B)$  est pour chaque  $A$  et  $B$  donnée par la formule (2), où la mesure  $\mu$  est toujours la même, et ne dépende pas de  $B$ , comme dans le cas général. Nous appellerons dans ce qui suit un tel espace un espace simple des probabilités conditionnelles.

En ce qui concerne quelques généralisations des théorèmes fondamentaux de la théorie des probabilités aux espaces des probabilités conditionnelles et quelques applications de la théorie de ces espaces (par exemple la théorie cinétique des gaz), le lecteur est renvoyé aux travaux de l'auteur déjà mentionnés; ici nous ne discutons que les notions fondamentales de cette théorie.

Dans le paragraphe 1 nous traitons un système d'axiomes pour les espaces simples des probabilités conditionnelles, et quelques questions de nature générale. Dans le paragraphe 2 nous nous occupons des cas spéciaux les plus intéressants. Dans le paragraphe 3 nous examinons le produit des

espaces simples des probabilités conditionnelles et l'indépendance conditionnelle des événements, et enfin dans le paragraphe 4 nous étudions les variables aléatoires sur un espace des probabilités conditionnelles et leurs fonctions de répartition et leurs densités de probabilité. Je remercie M. le Professeur Fréchet pour ses conseils concernant la rédaction de mon travail.

**1. Un système d'axiomes de la théorie des espaces simples des probabilités conditionnelles.** — Soit  $\Omega$  un ensemble quelconque non vide; soit  $\mathcal{A}$  une  $\sigma$ -algèbre des sous-ensembles de  $\Omega$ , c'est-à-dire un système des sous-ensembles de  $\Omega$  ayant les propriétés suivantes :

A 1. Si  $A_1 \in \mathcal{A}$  et  $A_2 \in \mathcal{A}$ , alors  $A_2 - A_1 \in \mathcal{A}$ , où  $A_2 - A_1$  désigne l'ensemble des éléments de  $\Omega$  appartenant à  $A_2$ , mais n'appartenant pas à  $A_1$ .

A 2. Si  $A_k \in \mathcal{A}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) et  $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$  (où la somme des ensembles désigne leur union), alors  $A \in \mathcal{A}$ .

A 3.  $\Omega \in \mathcal{A}$ .

Il est clair que l'ensemble vide  $\emptyset$  appartient à  $\mathcal{A}$ .

Soit  $\mathcal{B}$  un sous-ensemble de  $\mathcal{A}$  ayant les propriétés suivantes :

B 1. Si  $B_1 \in \mathcal{B}$  et  $B_2 \in \mathcal{B}$ , alors  $B_1 + B_2 \in \mathcal{B}$ .

B 2. Il existe une suite  $B_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) d'ensembles tels que  $B_n \in \mathcal{B}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) et  $\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$ .

B 3. L'ensemble vide n'appartient pas à  $\mathcal{B}$ .

Nous appellerons les systèmes d'ensembles avec les propriétés B 1, B 2 et B 3, des *bouquets* d'ensembles.

Supposons maintenant que  $P(A | B)$  soit une fonction à valeurs réelles à deux variables définie pour  $A \in \mathcal{A}$  et  $B \in \mathcal{B}$ , où  $\mathcal{A}$  est une  $\sigma$ -algèbre des sous-ensembles de l'ensemble  $\Omega$  et  $\mathcal{B}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{A}$  qui est un bouquet des ensembles, et supposons que  $P(A | B)$  satisfait aux axiomes suivants :

P 1.  $P(A | B)$  est comme fonction de  $A$ , une mesure <sup>(3)</sup> sur  $\mathcal{A}$  pour chaque  $B \in \mathcal{B}$  fixé.

P 2.  $P(B | B) = 1$ .

---

<sup>(3)</sup> C'est-à-dire une fonction d'ensemble non négative et  $\sigma$ -additive.

P 3. Si  $B \in \mathcal{B}$ ,  $C \in \mathcal{B}$  et (\*)  $B \subset C$ , on a

$$P(B | C) > 0,$$

et pour chaque  $A \in \mathcal{A}$ , on a

$$(I.1) \quad P(A | B) = \frac{P(AB | C)}{P(B | C)}.$$

Nous appellerons un tel système  $[\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}, P(A | B)]$  un *espace simple des probabilités conditionnelles*.

L'interprétation probabiliste d'un tel système est donnée par la terminologie suivante :

Nous appellerons les éléments  $\omega$  de  $\Omega$  des événements élémentaires, les ensembles  $A$  appartenant à  $\mathcal{A}$  des événements aléatoires,  $\Omega$  lui-même l'événement sûr et  $\emptyset$  l'événement impossible, les ensembles  $B$  appartenant à  $\mathcal{B}$  des conditions. Par conséquent, toute condition est un événement, mais il y a des événements qui ne sont pas des conditions; par exemple, l'événement impossible  $\emptyset$  n'est pas une condition. Enfin, nous appellerons le nombre  $P(A | B)$  la probabilité conditionnelle de l'événement  $A$  sous la condition  $B$ .

Ajoutons que la notion d'un espace simple des probabilités conditionnelles est plus restreinte que la notion d'un espace à probabilités conditionnelles, définie dans nos travaux ([2] à [6]). La différence entre ces deux notions consiste en ce qu'un espace de probabilités conditionnelles générales est un système  $[\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}, P(A | B)]$ , où  $\mathcal{B}$  est un sous-ensemble arbitraire non vide de  $\mathcal{A}$  et l'on ne suppose pas qu'on ait  $P(B | C) > 0$  pour  $B \in \mathcal{B}$ ,  $C \in \mathcal{B}$  et  $B \subset C$ , et la validité de la formule (I.1) est postulée seulement dans le cas où les deux membres ont un sens, c'est-à-dire si  $P(B | C) > 0$ . Deux conditions  $B_1$  et  $B_2$  telles que  $P(B_1 | B_1 + B_2) \cdot P(B_2 | B_1 + B_2) > 0$  sont appelées *commensurables*. Dès lors, un espace simple des probabilités conditionnelles est un espace des probabilités conditionnelles dans lequel le système des conditions est un bouquet d'ensembles et où toutes les conditions sont commensurables.

En effet, si  $B_1$  et  $B_2$  sont des conditions quelconques, alors, d'après B 1  $B_1 + B_2$  est aussi une condition, et comme

$$B_1 \subset B_1 + B_2 \quad \text{et} \quad B_2 \subset B_1 + B_2,$$

ainsi d'après P 3, on a

$$P(B_1 | B_1 + B_2) > 0 \quad \text{et} \quad P(B_2 | B_1 + B_2) > 0.$$

---

(\*)  $B \subset C$  désigne que  $B$  est un sous-ensemble de  $C$ .



Dans ce travail, nous nous occupons seulement avec les espaces simples des probabilités conditionnelles.

Notons quelques conséquences simples des axiomes. En premier lieu, en prenant dans P 3,  $B = C$ , on obtient, d'après P 2,

$$(I.2) \quad P(A | B) = P(AB | B).$$

Étant donné que  $P(A | B)$  est une mesure, c'est-à-dire une fonction d'ensemble  $A$ , non négative et  $\sigma$ -additive, on a

$$P(AB | B) \leq P(B | B) = 1.$$

Il s'ensuit que

$$0 \leq P(A | B) \leq 1 \quad \text{pour chaque } A \in \mathcal{A} \text{ et } B \in \mathcal{B}.$$

Fixons une condition  $B \in \mathcal{B}$ . Dans ce cas,  $\mathcal{E}_B = [\Omega, \mathcal{A}, P(A | B)]$  est évidemment un espace des probabilités ordinaires au sens de Kolmogoroff. On en tire qu'un espace simple des probabilités conditionnelles est un système des différentes mesures de probabilités définies sur la même  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{A}$  des sous-ensembles d'un espace  $\Omega$ , liées entre elles par l'axiome P 3. D'ailleurs, P 3 est une condition de compatibilité dans le sens suivant. Soit  $B$  et  $C$  deux conditions, et  $B \subset C$ . Alors dans l'espace des probabilités de Kolmogoroff,

$$\mathcal{E}_C = [\Omega, \mathcal{A}, P(A | C)]$$

la probabilité conditionnelle  $P(A | B)$  est définie précisément par la formule (I.1). Mais dans l'espace  $[\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}, P(A | B)]$  la probabilité conditionnelle  $P(A | B)$  est supposée donnée auparavant. Donc P 3 exprime que les deux valeurs de  $P(A | B)$  (l'une supposée donnée auparavant et l'autre après la définition des probabilités conditionnelles dans l'espace de Kolmogoroff  $\mathcal{E}_C$ ) sont égales.

Nous démontrons maintenant le théorème suivant <sup>(5)</sup> :

**THÉORÈME I.** — *Si  $[\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}, P(A | B)]$  est un espace simple des probabilités conditionnelles, alors il existe une mesure  $\mu$   $\sigma$ -finie sur  $\mathcal{A}$  telle que pour chaque  $B \in \mathcal{B}$ , on a*

$$0 < \mu(B) < + \infty,$$

*et pour chaque  $A \in \mathcal{A}$  et  $B \in \mathcal{B}$ , on a*

$$(I.3) \quad P(A | B) = \frac{\mu(AB)}{\mu(B)}.$$

*La mesure  $\mu$  est déterminée à un facteur constant près.*

<sup>(5)</sup> Pour un résultat plus général de ce type, voir le travail de M. A. Cszaszar [22].

*Démonstration.* — Soit  $B_0 \in \mathfrak{B}$  une condition arbitraire mais fixée. Posons pour chaque  $B \in \mathfrak{B}$

$$(I.4) \quad \mu(B) = \frac{P(B | B + B_0)}{P(B_0 | B + B_0)},$$

$\mu(B)$  est positive par hypothèse et finie pour tous les  $B \in \mathfrak{B}$ .

Si  $A \in \mathcal{A}$  est un ensemble, tel qu'il existe un  $B \in \mathfrak{B}$  tel que  $A \subset B$ , nous posons

$$(I.5) \quad \mu(A) = P(A | B) \mu(B).$$

Nous démontrons maintenant que la définition de  $\mu(A)$  par (I.5) ne dépend pas du choix de  $B$ . Soit  $A \subset B_i \in \mathfrak{B}$  pour  $i = 1, 2$ . Ainsi il faut démontrer que

$$(I.6) \quad P(A | B_1) \mu(B_1) = P(A | B_2) \mu(B_2).$$

Soit  $B_3 = B_1 + B_2$ . Pour démontrer (I.6), il suffit de vérifier que

$$(I.7) \quad P(A | B_1) \mu(B_1) = P(A | B_3) \mu(B_3).$$

En effet, si (I.7) est valable, on a aussi par symétrie

$$(I.8) \quad P(A | B_2) \mu(B_2) = P(A | B_3) \mu(B_3)$$

et (I.7) et (I.8) entraînent (I.6).

Pour vérifier (I.7), nous utilisons l'axiome P 3. En vertu de cet axiome, nous avons

$$(I.9) \quad P(A | B_1) = \frac{P(A | B_3)}{P(B_1 | B_3)}$$

et, par conséquent, il ne reste à vérifier que

$$(I.10) \quad \mu(B_1) = P(B_1 | B_3) \mu(B_3).$$

Pour obtenir (I.10) nous appliquons l'axiome P 3 aux probabilités  $P(B_1 | B_1 + B_0)$  et  $P(B_0 | B_1 + B_0)$  et obtenons, d'après (I.4),

$$(I.11) \quad \mu(B_1) = \frac{P(B_1 | B_3 + B_0)}{P(B_3 | B_3 + B_0)} \mu(B_3).$$

Mais il suit aussi de l'axiome P 3 que

$$(I.12) \quad \frac{P(B_1 | B_3 + B_0)}{P(B_3 | B_3 + B_0)} = P(B_1 | B_3)$$

et nous obtenons ainsi (I.10). Ainsi (I.6) est aussi démontré. Nous obtenons comme cas particulier que (I.4) et (I.5) sont en accord, car si  $A \in \mathfrak{B}$ , nous pouvons prendre  $B = A$ .

Soit  $\mathcal{A}^*$  l'ensemble de tous les ensembles  $A \in \mathcal{A}$  pour lesquelles il existe un  $B \in \mathcal{B}$ , tel que  $A \subset B$ .

$\mathcal{A}^*$  est évidemment un anneau des ensembles. En effet, si  $A_1 \in \mathcal{A}^*$  et  $A_2 \in \mathcal{A}^*$ , alors  $A_1 \subset B_1$  et  $A_2 \subset B_2$  avec  $B_i \in \mathcal{B}$  ( $i = 1, 2$ ) il s'ensuit que  $A_1 + A_2 \subset B_1 + B_2$  et comme, d'après B 1,  $B_1 + B_2 \in \mathcal{B}$ , donc  $A_1 + A_2 \in \mathcal{A}^*$ ; si  $A_1 \in \mathcal{A}^*$ ,  $A_2 \in \mathcal{A}^*$  et si, de plus,  $A_1 \subset B_1 \in \mathcal{B}$ , on a aussi  $A_1 - A_2 \subset B_1$  et, par conséquent,  $A_1 - A_2 \in \mathcal{A}^*$ . Nous démontrons maintenant que  $\mu(A)$  est une mesure sur  $\mathcal{A}^*$ .  $\mu(A)$  est évidemment non négatif.

Si  $A_i \in \mathcal{A}^*$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) et  $A_i A_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$  et  $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}^*$ , alors nous

pouvons trouver toujours par définition un  $B \in \mathcal{B}$  tel que  $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \subset B$ .

Puisqu'on a  $A_i \subset B$  pour  $i = 1, 2, \dots$ , il s'ensuit de la  $\sigma$ -additivité de  $P(A | B)$ , considérée comme une fonction d'ensemble  $A$  que

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) \mu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B) \mu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

$\mu(A)$  est donc vraiment une mesure sur  $\mathcal{A}^*$ . Soit maintenant  $\sigma(\mathcal{A}^*)$  la plus petite  $\sigma$ -algèbre contenant  $\mathcal{A}^*$ . Dès lors (voir [21]), la définition de  $\mu$  peut être étendue à  $\sigma(\mathcal{A}^*)$  de telle façon que  $\mu$  soit une mesure sur  $\sigma(\mathcal{A}^*)$ . Mais  $\sigma(\mathcal{A}^*)$  est manifestement l'ensemble de tous les ensembles  $A \in \mathcal{A}$  qui sont contenus dans l'union d'une suite dénombrable des ensembles  $B_n \in \mathcal{B}$ . Or, d'après notre axiome B 2,  $\Omega$  même et, par conséquent, tous les  $A \in \mathcal{A}$  sont contenus dans l'union d'une infinité dénombrable des ensembles  $B_n \in \mathcal{B}$ .  $\mathcal{A}$  étant une  $\sigma$ -algèbre,  $\sigma(\mathcal{A}^*) = \mathcal{A}$  et ainsi  $\mu$  est une mesure  $\sigma$ -finie sur  $\mathcal{A}$ . Naturellement,  $\mu(A)$  peut être égale à  $+\infty$  pour certains ensembles  $A \in \mathcal{A}$ . D'autre part, comme pour chaque  $A \in \mathcal{A}$  et  $B \in \mathcal{B}$  on a  $AB \subset B$  et ainsi  $AB \in \mathcal{A}^*$ , il s'ensuit de (1.2) et de (1.5) qu'on a pour chaque  $A \in \mathcal{A}$  et  $B \in \mathcal{B}$

$$(1.13) \quad P(A | B) = \frac{\mu(AB)}{\mu(B)},$$

où  $\mu$  est une mesure  $\sigma$ -finie sur  $\mathcal{A}$ .

Il reste à montrer que la mesure  $\mu$  est déterminée à un facteur positif constant près. Si  $\nu$  est une autre mesure sur  $\mathcal{A}$  et

$$\frac{\mu(AB)}{\mu(B)} = \frac{\nu(AB)}{\nu(B)}$$

pour chaque  $A \in \mathcal{A}$  et  $B \in \mathcal{B}$ , alors en fixant  $B$ , il s'ensuit qu'on a

$$\nu(A) = C_B \mu(A) \quad \text{pour } A \in \mathcal{A}, A \subset B, \quad \text{où } C_B = \frac{\nu(B)}{\mu(B)}.$$

Considérons maintenant une suite  $B_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) telle que

$$B_n \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega;$$

d'après B 3, une telle suite existe. Prenons maintenant pour  $B$  l'ensemble

$$\sum_{k=1}^n B_k, \text{ nous avons}$$

$$\nu(A) = C_n \mu(A) \quad \text{pour } A \in \mathcal{A}, A \subset \sum_{k=1}^n B_k,$$

où  $C_n$  est une constante positive. Comme  $\sum_{k=1}^n B_k \subset \sum_{k=1}^{n+1} B_k$ , il s'ensuit que les constantes  $C_n$  sont toutes égales, et par conséquent

$$(I.14) \quad \nu(A) = C \mu(A)$$

pour l'anneau des ensembles  $A$  pour lesquelles il existe un nombre tel que

$$A \subset \sum_{k=1}^n B_k. \quad (I.14) \text{ est donc aussi valable pour tous les ensembles } A \text{ qui}$$

appartiennent à la plus petite  $\sigma$ -algèbre contenant cet anneau, c'est-à-dire (I.41) est valable pour tous les  $A \in \mathcal{A}$ . Notre théorème est ainsi démontré.

Deux cas essentiellement différents sont évidemment possibles :  $\mu(\Omega)$  est ou bien fini, ou bien  $\mu(\Omega) = +\infty$ . Dans le premier cas, on peut supposer sans restreindre la généralité, que  $\mu(\Omega) = 1$ . Dans ce cas, notre système  $[\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}, P(A | B)]$  est essentiellement équivalent avec l'espace des probabilités de Kolmogoroff  $[\Omega, \mathcal{A}, P]$ , où  $P(A) = \mu(A)$  pour tous les  $A \in \mathcal{A}$ . D'ailleurs, si  $[\Omega, \mathcal{A}, P]$  [où  $\mathcal{A}$  est une  $\sigma$ -algèbre des sous-ensembles de l'ensemble  $\Omega$ , et  $P$  est une mesure sur  $\mathcal{A}$  telle que  $P(\Omega) = 1$ ] est un espace de probabilité de Kolmogoroff, et si  $\mathcal{B}$  désigne l'ensemble de tous les ensembles  $B \in \mathcal{A}$  tels que  $P(B) > 0$ , en posant

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

on obtient un espace simple des probabilités conditionnelles.

Dans l'autre cas, si  $\mu(\Omega) = +\infty$ , nous obtenons un espace des probabilités conditionnelles qui ne peut être déduit d'un espace des probabilités de Kolmogoroff.

Étant donné un espace simple des probabilités conditionnelles  $[\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}, P(A | B)]$ , où  $P(A | B)$  peut être exprimé à l'aide de la mesure  $\mu$   $\sigma$ -finie sous la forme (1.3), on peut facilement étendre la définition de  $P(A | B)$  sur tous les ensembles  $B \in \mathcal{B}$  pour lesquels (1.3) a un sens, c'est-à-dire pour tous les  $B \in \mathcal{A}$  pour lesquels  $0 < \mu(B) < +\infty$ . En effet, il est clair que tous les axiomes restent valables, l'ensemble  $\mathcal{B}^*$  de tous les ensembles  $B \in \mathcal{A}$ , avec  $0 < \mu(B) < +\infty$ , étant un bouquet et l'axiome P 3 ayant lieu parce que, en vertu de  $BC = B$  (si  $B \subset C$ ), on a

$$\frac{\mu(AB)}{\mu(B)} = \frac{\frac{\mu(ABC)}{\mu(C)}}{\frac{\mu(BC)}{\mu(C)}}.$$

Nous appellerons l'espace des probabilités conditionnelles que nous obtenons ainsi, un espace simple et *complet* des probabilités conditionnelles. En d'autres mots, un espace simple des probabilités conditionnelles  $[\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}, P(A | B)]$ , avec

$$P(A | B) = \frac{\mu(AB)}{\mu(B)}$$

est dit complet si  $\mathcal{B}$  contient tous les ensembles  $B \in \mathcal{A}$  pour lesquels  $\mu(B)$  est positive et finie.

Il est évident d'ailleurs que si  $\Omega$  est un ensemble non vide arbitraire,  $\mathcal{A}$  une  $\sigma$ -algèbre des sous-ensembles de  $\mathcal{A}$ ,  $\mu$  une mesure  $\sigma$ -finie sur  $\mathcal{A}$ , et si  $\mathcal{B}$  désigne l'ensemble de tous les ensembles  $B \in \mathcal{A}$  pour lesquels  $\mu(B)$  est positive et finie, alors  $\mathcal{B}$  est un bouquet d'ensembles, et si  $P(A | B)$  est définie par (1.3), alors  $P(A | B)$  satisfait aux axiomes P 1, P 2 et P 3, c'est-à-dire  $[\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}, P(A | B)]$  est un espace simple et complet des probabilités conditionnelles.

Il se présente la question intéressante suivante : *Si  $\mathcal{B}$  est un bouquet d'ensembles appartenant à la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{A}$ , sous quelles conditions supplémentaires existe-t-il une mesure  $\sigma$ -finie  $\mu$  sur  $\mathcal{A}$  telle que  $\mathcal{B}$  soit identique avec le système de tous les ensembles  $B$  pour lesquels  $\mu(B)$  est positive et finie ?* En d'autres mots, comment peut-on caractériser par des conditions nécessaires et suffisantes les systèmes d'ensembles  $\mathcal{B}$  pour lesquels il existe une mesure  $\sigma$ -finie  $\mu$  telle que  $\mu(B)$  soit positive et finie si et seulement si  $B$  appartient à  $\mathcal{B}$  ?

Nous ne connaissons pas la réponse à cette question. Il est facile de donner des conditions supplémentaires nécessaires autres que B 1, B 2 et B 3 (qui sont évidemment nécessaires), notamment les conditions suivantes :

B 4. Si  $A_n \in \mathcal{A}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) et  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$ , alors au moins un des ensembles  $A_n$  appartient à  $\mathcal{B}$ .

B 5. Si  $B_1 \subset B_2 \subset B_3$ , où  $B_1 \in \mathcal{B}$  et  $B_3 \in \mathcal{B}$ , alors  $B_2 \in \mathcal{B}$ .

On peut distinguer deux types d'ensembles n'appartenant pas à  $\mathcal{B}$ . Nous disons que l'ensemble  $A \in \mathcal{A}$  n'appartenant à  $\mathcal{B}$  est de la première espèce s'il existe un  $B \in \mathcal{B}$  tel que  $B \subset A$ , et qu'il est de la seconde espèce s'il n'existe pas un tel ensemble [Il est clair que les ensembles  $A$  de la première espèce sont les ensembles pour lesquels  $\mu(A) = +\infty$ , et que sont de la seconde espèce ceux pour lesquels  $\mu(A) = 0$ ].

Ceci posé, nous pouvons donner encore quelques conditions nécessaires : Soit  $\mathcal{D}$  l'ensemble de tous les ensembles  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A \notin \mathcal{B}$  de la première espèce, et l'ensemble de tous les ensembles  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A \notin \mathcal{B}$  de la seconde espèce.

B 6. Si  $A \in \mathcal{D}$ , il existe deux ensembles disjoints  $A_1 \in \mathcal{D}$  et  $A_2 \in \mathcal{D}$  tels que  $A = A_1 + A_2$ .

B 7. Si  $A_n \in \mathcal{D}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), il existe des ensembles  $B_n \in \mathcal{B}$  tels que

$$B_n \subset A_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{D}.$$

B 8.  $\mathcal{N}$  est un  $\sigma$ -idéal dans  $\mathcal{A}$ , c'est-à-dire si

$$A_n \in \mathcal{N} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \text{alors} \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{N}$$

et si

$$A \in \mathcal{N} \quad \text{et} \quad C \in \mathcal{A}, \quad \text{alors} \quad AC \in \mathcal{N}.$$

La question de caractériser les systèmes des sous-ensembles d'un ensemble  $\Omega$  sur lesquels une mesure  $\sigma$ -finie prend des valeurs positives et finies, est ouverte aussi dans le cas spécial où  $\Omega$  est un ensemble dénombrablement infini. Dans ce cas, la question peut se réduire à la question suivante : caractériser les classes  $\mathcal{C}$  des suites  $\{n_i\}$  des nombres naturels tels qu'il existe une série divergente à termes positifs  $\sum \rho_n$  telle que  $\sum \rho_{n_i}$  soit convergente si et seulement si  $\{n_i\}$  appartient à  $\mathcal{C}$ . Cette question fut posée — comme M. P. Erdős a bien voulu m'en informer — par MM. Kakutani

et Smithies, et fut discutée par MM. Erdős et de Bruijn en 1953 en détail; ils ont trouvé quelques résultats partiels intéressants, qui ne sont pas encore publiés. Mais un système de conditions nécessaires et suffisantes manque jusqu'à aujourd'hui (Il est aisé de voir que les huit conditions mentionnées plus haut ne sont pas suffisantes).

**2. Quelques exemples.** — Nous donnons maintenant quelques exemples d'espaces simples des probabilités conditionnelles.

*Exemple 1.* — Soit  $\Omega = \{1, 2, \dots\}$  l'ensemble de tous les entiers positifs,  $p_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) une suite de nombres non négatifs tels que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$  soit divergente. Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble de tous les sous-ensembles de  $\Omega$ , et  $\mathcal{B}$  l'ensemble des sous-ensembles  $B$  de  $\Omega$  pour lesquels  $\sum_{n \in B} p_n = \mu(B)$  est positive et finie, et posons

$$P(A | B) = \frac{\mu(AB)}{\mu(B)}$$

pour chaque  $A \in \mathcal{A}$  et  $B \in \mathcal{B}$ . Alors  $[\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}, P(A | B)]$  est un espace simple et complet des probabilités conditionnelles.

Spécialement si  $p_n = 1$  pour  $n = 1, 2, \dots$ , on a

$$P(A | B) = \frac{N(AB)}{N(B)},$$

où  $N(C)$  désigne le nombre des éléments de l'ensemble  $C$ . Ce cas spécial peut servir pour donner un sens précis à l'expression « choisir un entier positif au hasard d'une telle façon que tous les nombres entiers aient la même chance d'être choisis ».

Le sens exact de cet énoncé paradoxal est naturellement le suivant : sous la condition que l'entier positif choisi au hasard appartienne à l'ensemble fini et non vide arbitraire  $B$ , tous les éléments de  $B$  ont la même probabilité conditionnelle d'être choisis.

*Exemple 2.* — Soit l'ensemble de tous les nombres réels  $x$  soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des sous-ensembles de Borel de  $\Omega$ , et soit  $\mu$  une mesure  $\sigma$ -finie sur  $\mathcal{A}$ . Soit enfin  $\mathcal{B}$  l'ensemble de tous les sous-ensembles  $B \in \mathcal{A}$  pour lesquels  $\mu(B)$  est finie et positive et  $P(A | B)$  soit défini par (1.3). Alors  $[\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}, P(A | B)]$  est un espace simple et complet des probabilités conditionnelles. On peut, par exemple, choisir une mesure  $\mu$ -donnée par la formule

$$\mu(A) = \int_A f(x) dx,$$

où  $f(x)$  est une fonction non négative et mesurable telle que  $\int_I f(x)dx$  est fini pour chaque intervalle fini  $I$ , mais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = +\infty.$$

En particulier, si  $f(x) \equiv 1$ ,  $\mu(A)$  est identique avec la mesure de Lebesgue de  $A$ . Ce cas particulier peut servir pour donner un sens précis à l'expression « choisir un nombre réel avec une répartition uniforme sur tout l'axe réel ». Le sens exact de cet énoncé paradoxal est le suivant : sous la condition qu'un nombre choisi au hasard appartienne à un intervalle fini mais arbitraire  $I$ , il est réparti uniformément sur cet intervalle.

**3. Produit des espaces simples et complets des probabilités conditionnelles, indépendance conditionnelle des événements.**  
— Soit

$$\mathcal{E}_1 = [\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, P_1(A | B)] \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_2 = [\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2, P_2(A | B)]$$

des espaces simples et complets des probabilités conditionnelles. Le produit  $\mathcal{E}_1 * \mathcal{E}_2$  de ces espaces est aussi un espace simple et complet des probabilités conditionnelles  $[\Omega_3, \mathcal{A}_3, \mathcal{B}_3, P_3(A | B)]$  qui est définie comme suit. Soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$  des mesures  $\sigma$ -finies sur  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  telles que

$$P_1(A | B) = \frac{\mu_1(AB)}{\mu_1(B)} \quad \text{et} \quad P_2(A | B) = \frac{\mu_2(AB)}{\mu_2(B)}.$$

Soit  $\Omega_3$  l'ensemble de tous les couples d'éléments  $(\omega_1, \omega_2)$  où  $\omega_1 \in \Omega_1$  et  $\omega_2 \in \Omega_2$ . Soit  $\mathcal{A}_3$  la plus petite  $\sigma$ -algèbre des sous-ensembles de  $\Omega_3$  qui contient tous les ensembles  $A_3 = A_1 * A_2$  tels que  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  et  $A_2 \in \mathcal{A}_2$ , c'est-à-dire des ensembles  $A_3$  de couples  $(\omega_1, \omega_2)$ , où

$$\omega_1 \in A_1, \quad \omega_2 \in A_2 \quad \text{et} \quad A_1 \in \mathcal{A}_1, \quad A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

Soit  $\mu_3$  le produit des mesures  $\mu_1$  et  $\mu_2$  défini en posant

$$\mu_3(A_1 * A_2) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2) \quad \text{pour} \quad A_1 \in \mathcal{A}_1, \quad A_2 \in \mathcal{A}_2$$

et en étendant la définition de  $\mu_3$  sur  $\mathcal{A}_3$  d'une façon habituelle (voir [2I]).

Soit  $\mathcal{B}_3$  l'ensemble de tous les sous-ensembles  $B$  de  $\Omega_3$  appartenant à  $\mathcal{A}_3$  tels que  $\mu_3(B)$  possède une valeur finie et positive. Posons enfin

$$P_3(A | B) = \frac{\mu_3(AB)}{\mu_3(B)} \quad \text{pour} \quad A \in \mathcal{A}_3 \quad \text{et} \quad B \in \mathcal{B}_3.$$



Alors  $[\Omega_3, \mathcal{A}_3, \mathcal{B}_3, P_3(A | B)] = \mathcal{E}_3$  est manifestement un espace simple et complet des probabilités conditionnelles. Il est clair que  $\mathcal{E}_3$  ne dépend pas du choix de  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

Ajoutons quelques mots sur la notion d'indépendance. Nous appellerons deux événements  $A'$  et  $A''$  d'un espace des probabilités conditionnelles  $[\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}, P(A | B)]$  *indépendants par rapport à une condition*  $B \in \mathcal{B}$ , si

$$(3.1) \quad P(A'A'' | B) = P(A' | B) = P(A'' | B).$$

Il est évident que deux événements peuvent être indépendants simultanément par rapport à plusieurs conditions. Leur indépendance est d'autant plus forte, que l'ensemble des conditions par rapport auxquelles l'indépendance ait lieu est plus étendu. Dans ce sens la notion d'indépendance dans un espace des probabilités conditionnelles est plus riche que dans le cas d'un espace des probabilités ordinaires. Pour en donner un exemple, revenons au produit  $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_1 * \mathcal{E}_2$  des espaces  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$ . Soit

$$A' = A_1 * A_2 \quad \text{et} \quad A'' = \Omega_1 * A_2,$$

où  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  et  $A_2 \in \mathcal{A}_2$ . Alors  $A'$  et  $A''$  sont indépendants par rapport à chaque condition  $B$  de la forme

$$B = B_1 * B_2, \quad \text{avec} \quad B_1 \in \mathcal{B}_1 \quad \text{et} \quad B_2 \in \mathcal{B}_2.$$

**4. Les variables aléatoires et leurs répartitions.** — Soit  $[\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}, P(A | B)]$  un espace simple et complet des probabilités conditionnelles. Soit  $X(\omega)$  une fonction définie pour tout  $\omega \in \Omega$  et mesurable par rapport à  $\mathcal{A}$ , c'est-à-dire telle que l'image inverse de tout intervalle  $I$  de l'axe réel  $X^{-1}(I)$  [où  $X^{-1}(I)$  désigne ici l'ensemble des  $\omega \in \Omega$  tels que  $X(\omega) \in I$ ] appartienne à  $\mathcal{A}$ . Soit  $m$  la mesure sur l'axe réel  $\mathcal{R}$  définie en posant pour chaque intervalle  $I$  de  $\mathcal{R}$

$$(4.1) \quad m(I) = \mu(X^{-1}(I)).$$

Nous appellerons la mesure  $m$  *la répartition de la variable aléatoire*  $X$  (La répartition  $m$  est définie évidemment à un facteur positif près). S'il existe un intervalle ouvert  $I^*$  (fini ou infini) de l'axe réel tel que pour chaque sous-intervalle  $I$  de  $I^*$  fermé à gauche et ouvert à droite,  $m(I)$  a une valeur finie et s'il existe un sous-intervalle  $I_0$  de  $I^*$  tel que  $m(I_0) > 0$ , nous disons que la répartition de  $X$  est finie dans  $I^*$ . Dans ce cas, nous pouvons définir la fonction de répartition de  $X$  dans  $I^*$  comme suit : Soit  $I^* = (a^*, b^*)$ ; choisissons un point arbitraire dans  $I^*(a^* < X_0 < b^*)$  et posons

$$F(X) = m(I_{X_0, X}) \quad \text{pour} \quad X_0 < X < b^*$$

et

$$F(X) = -m(I_{x,x_0}) \quad \text{pour } a^* < X \leq X_0,$$

où  $I_{a,b}$  est l'intervalle  $a \leq X$  (fermé à gauche et ouvert à droite).  $F(X)$  est évidemment une fonction non décroissante et continue à droite, avec  $F(X_0) = 0$ .

Si  $a^* < a_0 < a < b < b_0 < b^*$  et  $I_0 = [a, b]$  est tel que  $m(I_0) > 0$ , et si nous posons  $I = [a, b]$ , nous avons

$$(4.2) \quad P(X \in I \mid X \in I_0) = \frac{F(b) - F(a)}{F(b_0) - F(a_0)}.$$

Il est clair qu'une variable aléatoire possède plusieurs fonctions de répartition dans le même intervalle, mais si  $F(x)$  et  $G(x)$  sont deux fonctions de répartition de la variable aléatoire  $X$  dans le même intervalle, alors il existe des constantes  $c > 0$  et  $d$  telles que

$$G(x) = c F(x) + d.$$

Si une fonction de répartition  $F(x)$  de la variable aléatoire  $X$  dans un intervalle  $I^*$  est absolument continue et  $F'(x) = f(x)$ , nous appellerons  $f(x)$  la fonction de densité de probabilité de  $X$  dans  $I^*$ . Dans ce cas, on a, au lieu de (4.2) sous les mêmes conditions,

$$(4.3) \quad P(X \in I \mid X \in I_0) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_{a_0}^{b_0} f(x) dx},$$

$f(x)$  est définie évidemment à un facteur positif constant près.

Par exemple, si  $\mathcal{E}$  est l'espace des probabilités conditionnelles de l'exemple 2 du paragraphe 2, où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue et si  $X(\omega) = e^\omega$  pour  $-\infty < \omega < +\infty$ , alors la densité de probabilité de  $X$  dans l'intervalle  $(0 < x < +\infty)$  est égale à  $\frac{1}{x}$ . Notons que, dans ce cas, les variables aléatoires  $X^\alpha$ , où  $\alpha$  est un nombre réel différent de 0, mais d'ailleurs arbitraire, ont toutes la même densité de probabilité.

Voyons un autre exemple. Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur le même espace des probabilités conditionnelles comme dans le dernier exemple, par  $X(\omega) = \frac{1}{\omega}$ . Alors  $F(x) = -\frac{1}{x}$  est une fonction de répartition et  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  une fonction de densité de probabilité de  $X$  dans l'intervalle  $(0, +\infty)$  et aussi dans l'intervalle  $(-\infty, 0)$ .

Il est clair que si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires définies sur un espace des probabilités conditionnelles  $\mathcal{E}$  et  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est une fonction mesurable Borel à  $n$  variables, alors  $Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est aussi une variable aléatoire sur  $\mathcal{E}$ . Voyons un exemple de la composition des répartitions.

Soit  $\mathcal{E}_1 = [\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, P_1(A | B)]$  l'espace des probabilités conditionnelles définies comme suit : soit  $\Omega$  l'intervalle  $0 < \omega_1 < +\infty$ ,  $\mathcal{A}_1$  l'ensemble de tous les sous-ensembles mesurables de  $\Omega$ ,  $\mathcal{B}_1$  l'ensemble de tous les ensembles mesurables de  $\Omega_1$  dont chacun a une mesure de Lebesgue positive et finie. Soit

$$P(A | B) = \frac{\mu_1(AB)}{\mu_1(B)},$$

où  $\mu_1$  est la mesure de Lebesgue. Soit

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_1 * \mathcal{E}_2$$

au sens du paragraphe 2 et supposons que les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  soient définies sur  $\mathcal{E}_3$  par les relations

$$X_1(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 \quad \text{et} \quad X_2(\omega_1, \omega_2) = \omega_2.$$

Alors la répartition de  $X_1$  et celle de  $X_2$  est telle que chaque intervalle du demi-axe positif a une mesure infinie; mais la répartition de  $X_1 + X_2$  en est tout à fait différente : sa densité de probabilité est  $f(x) = x$  pour  $0 < x < +\infty$ .

Remarquons que

$$(4.4) \quad f(x) = \int_0^\infty f_1(u) f_1(x - u) du,$$

où  $f_1(x)$  est la densité de probabilité de la variable aléatoire  $X_1$  définie sur  $\mathcal{E}_1$  par  $X_1(\omega_1) = \omega_1$ , c'est-à-dire

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 < x < +\infty, \\ 0 & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

Donc la répartition de  $X_1 + X_2$  avec la densité  $x$  pour  $x > 0$  est le produit de composition de la répartition uniforme sur le demi-axe positif avec lui-même.

Notons enfin que, quand il s'agit de composition de répartitions avec des mesures non bornées, on ne peut pas appliquer la méthode usuelle des fonctions caractéristiques, parce qu'elle n'existe pas au sens ordinaire. Mais il existe comme des distributions au sens de L. Schwartz [23], et ainsi cette méthode peut néanmoins être appliquée dans un sens généralisé (voir [6]).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. N. KOLMOGOROFF, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, Berlin, 1933.
- [2] A. RÉNYI, *On a new axiomatic theory of probability* (*Acta Math. Acad. Sc. Hungar.*, t. 6, 1955, p. 285-335).
- [3] A. RÉNYI, *Axiomatischer Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bericht über die Tagung Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik*, V. E. B. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1954, p. 7-15.
- [4] A. RÉNYI, *On conditional probability spaces generated by a dimensionnally ordered set of measures* (*Teor. Veroiatn. prim.*, t. 1, 1956, p. 61-71).
- [5] A. RÉNYI, *A new deduction of Maxwell's law of velocity distribution* (*Isv. Mat. Inst. Sofia*, t. 2, 1957, p. 45-53).
- [6] A. RÉNYI, *Wahrscheinlichkeitsrechnung, mit einem Anhang über Informationstheorie*, V. E. B. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962, p. 1-547.
- [7] M. FRÉCHET, *Généralités sur les probabilités (Traité du calcul des probabilités et ses applications*, par É. BOREL, t. I, 2<sup>e</sup> éd., Gauthier-Villars, Paris, 1950).
- [8] H. REICHENBACH, *Wahrscheinlichkeitslehre*, Sijthoff, Leiden, 1935.
- [9] K. POPPER, *Philosophy of science : A personal report*, *British Philosophy in the Mid-Century*, ed. by C. A. Mace, 1956, p. 191.
- [10] M. I. KEYNES, *A treatise on probability theory*, MacMillan, London, 1952, p. 1-460.
- [11] B. O. KOOPMAN, *The axioms and algebra of intuitive probability* (*Ann. Math.*, t. 41, 1940, p. 269-292).
- [12] A. H. COPELAND, *Postulates for the theory of probability* (*Amer. J. Math.*, t. 63, 1941, p. 741-762).
- [13] G. A. BARNARD, *Statistical inference* (*J. Roy. Stat. Soc.*, série B, t. 11, 1949, p. 115-139).
- [14] F. I. GOOD, *Probability and weighing of evidence*, London, 1950.
- [15] R. D. LUCE, *Individual choice behaviour. A theoretical analysis*, Wiley, New York, 1959.
- [16] H. JEFFREYS, *Theory of probability*, 2<sup>e</sup> éd., Clarendon Press, Oxford, 1948.
- [17] M. DUMAS, *Sur les lois de probabilités divergentes et la formule de Fisher* (*Interméd. Rech. Math.*, t. 9, 1947, Suppl., p. 127-130).
- [18] M. DUMAS, *Interprétation de résultats de tirages exhaustifs* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 288, 1949, p. 904-906).
- [19] E. BATICLE, *Sur une loi de probabilité a priori des paramètres d'une loi laplacienne* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 55-57).
- [20] E. BATICLE, *Sur une loi de probabilité a priori pour l'interprétation des résultats de tirages dans une urne* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 902-904).
- [21] P. R. HALMOS, *Measure theory*, Van Nostrand, New York, 1949.
- [22] A. CSASZAR, *Sur la structure des espaces de probabilités conditionnelles* (*Acta Math. Acad. Sc. Hungar.*, t. 6, 1955, p. 337-361).
- [23] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, t. I-II, Paris, 1950-1951.

(Manuscrit reçu le 2 septembre 1963).