

Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten. II

Von

A. RÉNYI und R. SULANKE

Einleitung

Der vorliegende Artikel ist eine Fortsetzung unserer Arbeit [I]. Wir betrachten einen endlichen konvexen Bereich K der Ebene. Seien P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) n zufällige Punkte aus K , die unabhängig voneinander nach der Gleichverteilung gewählt werden. Durch H_n bezeichnen wir die konvexe Hülle der P_i , durch L_n die Länge des Umfanges von H_n und durch F_n den Flächeninhalt von H_n . Es ist klar, daß die mathematischen Erwartungen $E(L_n)$ bzw. $E(F_n)$ für $n \rightarrow +\infty$ gegen den Umfang L bzw. den Flächeninhalt F von K streben. Die Güte dieser Konvergenz soll im Folgenden untersucht werden.

In § 1 werden zunächst die allgemeinen Formeln zur Berechnung von $E(L_n)$ und $E(F_n)$ aufgestellt. Danach beginnen wir mit der Betrachtung des Falls, daß K eine genügend oft stetig differenzierbare Randkurve besitzt, deren Krümmung $k = k(s)$ positiv und beschränkt ist: $0 < k(s) < A$ (s bedeutet die Bogenlänge). Die in § 2 aufgestellten Näherungsformeln gestatten es uns, die Randkurve von K in der Umgebung eines ihrer Punkte durch ihren Schmiegleis zu ersetzen. Mit Hilfe dieser Formeln gelingt es dann in § 3, das asymptotische Verhalten von $E(L_n)$ und $E(F_n)$ in dem genannten Fall zu ermitteln. Es erweist sich, daß die Abweichungen $L - E(L_n)$ und $F - E(F_n)$ beide die Gestalt $\text{const. } n^{-2/3} + o(n^{-1})$ haben; für den Flächeninhalt ist hierbei die äquiaffine Länge des Randes von K der wesentliche Teil der im Hauptglied stehenden Konstanten; im Falle des Umfanges jedoch tritt das Funktional

$$Q(K) = \int_0^L (k(s))^{4/3} ds$$

auf, das bisher in der Geometrie anscheinend noch nicht untersucht wurde. Es wäre interessant, für $Q(K)$ eine isoperimetrische Aufgabe zu behandeln.

Die Untersuchung der analogen Probleme für konvexe Polygone führte auf ziemlich unübersichtliche Rechnungen. Aus diesem Grunde betrachten wir in § 4 nur den Fall, daß K ein Quadrat ist. Hier ergibt sich die auf den ersten Blick überraschende Tatsache, daß sich Flächeninhalt und Umfang asymptotisch verschieden verhalten. Während für den Umfang die Abweichung

$$L - E(L_n) = \text{const. } n^{-1/2} + o(n^{-1})$$

größer ist als im glatten Fall, gilt für den Flächeninhalt

$$F - E(F_n) = \text{const. } \frac{\ln n}{n} + o(n^{-1});$$

diese Approximation ist also bedeutend besser als die entsprechende für einen Eibereich mit glattem Rand.

§ 1. Formeln für $E(L_n)$ und $E(F_n)$

Sei wieder $\varepsilon_{ij} = 1$, wenn $i \neq j$ und $\overline{P_i P_j}$ Randstrecke von H_n ist, und $\varepsilon_{ij} = 0$ sonst. Durch $|P_i P_j|$ bezeichnen wir den Abstand der Punkte P_i, P_j . Dann gilt

$$(1) \quad L_n = \sum_{i < j} |P_i P_j| \varepsilon_{ij}.$$

Hieraus erhält man unmittelbar $E(L_n) = \binom{n}{2} E(|P_1 P_2| \varepsilon_{12})$, also

$$(2) \quad E(L_n) = \binom{n}{2} \frac{1}{F^n} \int \cdots \int |P_1 P_2| \varepsilon_{12} dP_1 \dots dP_n.$$

Führen wir die Integration über P_3, \dots, P_n aus, so ergibt sich

$$(3) \quad E(L_n) = \binom{n}{2} \frac{1}{F^2} \iint |P_1 P_2| \left\{ \left(1 - \frac{f}{F}\right)^{n-2} + \left(\frac{f}{F}\right)^{n-2} \right\} dP_1, dP_2;$$

dabei ist f der durch die Gerade $g(P_1, P_2)$ von K abgeschnittene kleinere Flächeninhalt, also $f/F \leq 1/2$. Somit gilt

$$(4) \quad E(L_n) \sim \frac{\binom{n}{2}}{F^2} \iint \left(1 - \frac{f}{F}\right)^{n-2} |P_1 P_2| dP_1 dP_2.$$

Wir führen jetzt mit denselben Bezeichnungen wie in [I], (41), die Transformation

$$(5) \quad dP_1 dP_2 = |t_1 - t_2| dt_1 dt_2 dp d\varphi$$

durch. Wegen $|t_1 - t_2| = |P_1 P_2|$ und

$$(6) \quad \iint_{g(p, \varphi) \cap K} |t_1 - t_2|^2 dt_1 dt_2 = \frac{l^4}{6}$$

wobei $l = l(p, \varphi)$, die Länge der Sehne $g(p, \varphi) \cap K$ bezeichnet, erhalten wir

$$(7) \quad E(L_n) \sim \frac{\binom{n}{2}}{6 F^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{p(\varphi)} \left(1 - \frac{f}{F}\right)^{n-2} l^4 dp d\varphi.$$

Hierbei ist $p(\varphi)$ die Stützfunktion des Bereiches K ; als Koordinatenursprung wählen wir den Schwerpunkt von K .

Bezeichne nun $p(P_i, P_j)$ den Abstand der Geraden $g(P_i, P_j)$ vom Ursprung 0. Für den Flächeninhalt von H_n gilt dann

$$(8) \quad F_n = \frac{1}{2} \sum_{i < j} \varepsilon_{ij} |P_i P_j| p(P_i, P_j).$$

Durch ganz analoge Überlegungen wie im Falle des Umfanges erhalten wir

$$(9) \quad E(F_n) \sim \frac{\binom{n}{2}}{12 F^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{p(\varphi)} \left(1 - \frac{f}{F}\right)^{n-2} l^4 p dp d\varphi.$$

§ 2. Die Approximation durch den Schmiegekreis

Unsere Aufgabe besteht jetzt darin, die Integrale (7) und (9) auszuwerten. In diesem und dem folgenden Paragraphen setzen wir voraus, daß K einen glatten Rand mit einer Krümmung $k(s)$, $0 < k(s) < A$ besitzt. Wir halten zunächst

fest und führen die Integration nach p aus. Da für das asymptotische Verhalten der Integrale offenbar nur der Anteil wichtig ist, für den f/F klein ist, können wir die Größen l, f von K durch die entsprechenden Größen \bar{l}, \bar{f} desjenigen Schmiegekreeses ersetzen, der mit K die Tangente $g(p(\varphi), \varphi)$ gemeinsam hat. Die Fehler, die bei dieser Ersetzung entstehen, sollen jetzt abgeschätzt werden. Dabei werden sich Verbesserungen der Formeln [I], (47) ergeben.

Anstelle von p führen wir den neuen Parameter β ein, welcher der halbe Zentrwinkel vom Zentrum Z des Schmiegekreeses S_φ auf die Sehne $g(p, \varphi) \cap S_\varphi$ ist. Dann gilt (vgl. Fig. 1)

$$(10) \quad p = r(\cos \beta - 1) + p(\varphi).$$

Hierbei bezeichnet r den Krümmungsradius: $r = 1/k$. Auf der Geraden $g(\beta, \varphi)$ führen wir die Bogenlänge t als Parameter ein und bezeichnen durch t_1^-, t_1^+ die Parameter der Schnittpunkte von g mit S_φ , durch t_2^-, t_2^+ die Parameter der Schnittpunkte von g mit dem Rand von K . Wählen wir die Mitte der Sehne $g \cap S_\varphi$ als Nullpunkt der Bogenlänge t , so folgt unmittelbar

$$(11) \quad t_1^- = -r \sin \beta, \quad t_1^+ = r \sin \beta.$$

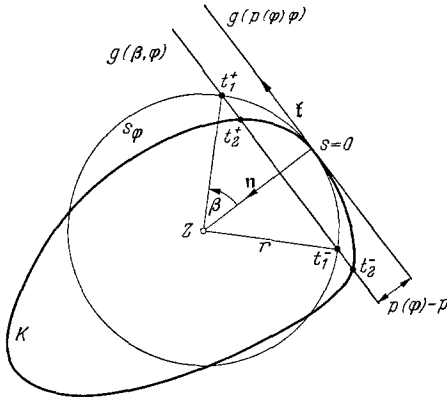


Fig. 1

Wir wollen jetzt t_2^-, t_2^+ als Funktionen von β berechnen. Zu diesem Zweck stellen wir den Rand von K in einer Umgebung des betrachteten Punktes im begleitenden Zweibein dar. Sei $\mathfrak{r}(s)$ der Ortsvektor eines variablen Punktes der Randkurve vom Berührungspunkt aus, t ein Tangentialvektor und n der Normalvektor in diesem Punkt. Wählen wir den Berührungspunkt gleichzeitig als Nullpunkt der Bogenlänge s der Randkurve, so ergibt sich aus der Taylorsche Formel unter Berücksichtigung der Frenetschen Formeln der ebenen Differentialgeometrie die folgende Darstellung:

$$(12) \quad \mathfrak{r}(s) = t \cdot \left\{ s - k^2 \frac{s^3}{3!} - 3kk' \frac{s^4}{4!} + 0(s^5) \right\} + n \cdot \left\{ k \frac{s^2}{2!} + k' \frac{s^3}{3!} + (k'' - k^3) \frac{s^4}{4!} + 0(s^5) \right\}.$$

Die Koeffizienten sind hierbei an der Stelle $s = 0$ zu nehmen; Striche bedeuten Differentiation nach der Bogenlänge. Die Gerade $g(\beta, \varphi)$ hat in diesem Koordinatensystem die Parameterdarstellung

$$(13) \quad \mathfrak{z}(t) = t \cdot t + n \cdot r(1 - \cos \beta).$$

Der Vergleich mit (12) liefert uns die beiden Beziehungen

$$(14) \quad t_2 = s - k^2 \frac{s^3}{3!} - 3kk' \frac{s^4}{4!} + 0(s^5),$$

$$(15) \quad r(1 - \cos \beta) = k \frac{s^2}{2!} + k' \frac{s^3}{3!} + (k'' - k^3) \frac{s^4}{4!} + 0(s^5).$$

Aus (15) erhalten wir s als Funktion von β :

$$(16) \quad s = r\beta - \frac{k'r^3\beta^2}{3!} + \frac{r^4}{4!} \left\{ \frac{5}{3} k'^2 r - k'' \right\} \beta^3 + 0(\beta^4).$$

Setzen wir dies in (14) ein, so folgt

$$(17) \quad t_2 = r\beta - \frac{k'r^3}{3!} \beta^2 + \left\{ \frac{5}{4!3} r^5 k'^2 - \frac{r^4 k''}{4!} - \frac{r}{3!} \right\} \beta^3 + 0(\beta^4);$$

dabei gilt offenbar $t_2^- = t_2(-\beta)$, $t_2^+ = t_2(\beta)$ bei $\beta \geq 0$. Aus der Potenzreihenentwicklung von $\sin \beta$ und (11) ergibt sich

$$(18) \quad t_1 - t_2 = \frac{k'r^3}{3!} \beta^2 + \frac{r^4}{4!} \left\{ k'' - \frac{5}{3} r k'^2 \right\} \beta^3 + 0(\beta^4);$$

hierbei erhalten wir wieder $t_1^+ - t_2^+$ für positives β und $t_1^- - t_2^-$ für negatives β .

Wir beachten nun, daß der Schmiegkreis einer Kurve in einem Punkt, der kein Scheitelpunkt ist, für den also $k' \neq 0$ gilt, die Kurve im Berührungspunkt durchsetzt, wie es auch unsere Abbildung zeigt. Hieraus folgt $l - \bar{l} = (t_1^- - t_2^-) - (t_1^+ - t_2^+)$, also

$$(19) \quad l - \bar{l} = \frac{r^4}{12} \left(\frac{5}{3} r k'^2 - k'' \right) \beta^3 + 0(\beta^4).$$

Weil in einem Scheitelpunkt $k' = 0$ ist und eine Berührung von mindestens dritter Ordnung mit dem Schmiegkreis vorliegt, gilt (19) in diesem Fall erst recht; dies erkennt man auch unmittelbar aus (18).

Für die Flächeninhalte f, \bar{f} ergibt sich durch Auswertung des Integrals

$$f - \bar{f} = \int_p^{p(\varphi)} (l - \bar{l}) dp$$

die folgende Näherungsformel:

$$(20) \quad f - \bar{f} = \frac{r^5}{60} \left(\frac{5}{3} r k'^2 - k'' \right) \beta^5 + 0(\beta^6).$$

§ 3. Berechnung von $E(L_n)$ und $E(F_n)$ für einen Eibereich mit glattem Rand

Wir gehen zum Zentriwinkel $\alpha = 2\beta$ über und drücken die Integrale (7) und (9) durch α und φ aus. Wegen

$$(21) \quad \bar{l} = 2r \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad \bar{f} = \frac{r^2}{2} (\alpha - \sin \alpha)$$

sowie

$$(22) \quad |dp| = \left(\frac{r}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right) |d\alpha|$$

ergibt sich aus (19)

$$(23) \quad l^4 dp = \left[\frac{r^5 \alpha^5}{4} (1 + G\alpha^2) + 0(\alpha^8) \right] d\alpha$$

wobei zur Abkürzung

$$(24) \quad G = \frac{5}{4!} \left(\frac{r^4 k'^2}{3} - \frac{r^3 k''}{5} - 1 \right)$$

gesetzt wurde. Aus (20) und (21) erhalten wir

$$(25) \quad \frac{f}{F} = \frac{r^2 \alpha^3}{12 F} + \varkappa \cdot \alpha^5 + 0(\alpha^6)$$

wobei

$$(26) \quad \kappa = \frac{r^2}{5! 2 F} \left[\left(\frac{r}{2} \right)^3 \left(\frac{5}{3} r k'^2 - k'' \right) - 1 \right].$$

Das Integral (7) nimmt nun die Gestalt

$$(27) \quad E(L_n) \sim \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{4! F^2} \int_0^{2\pi} r^5 d\varphi \int_0^{\alpha(\varphi)} \left(1 - \frac{r^2 \alpha^3}{12 F} - \kappa \alpha^5 - 0(\alpha^6) \right)^{n-2} \times \\ \times (\alpha^5 + G \alpha^7 + 0(\alpha^8)) d\alpha$$

an. Wir berechnen zuerst die Integrale

$$(28) \quad B_\nu = \int_0^{\alpha(\varphi)} \left(1 - \frac{r^2 \alpha^3}{12 F} - \kappa \alpha^5 - 0(\alpha^6) \right)^{n-2} \alpha^\nu d\alpha.$$

Durch die Substitution

$$(29) \quad \frac{r^2 \alpha^3}{12 F} = \frac{x}{n}$$

erhalten wir unter Berücksichtigung von

$$(30) \quad \left(1 - \frac{x}{n} - \kappa_1 \left(\frac{x}{n} \right)^{5/3} + 0 \left(\left(\frac{x}{n} \right)^2 \right)^{n-2} \right) = e^{-x} \left(1 - \frac{\kappa_1 x^{5/3}}{n^{2/3}} + 0 \left(\frac{x^2}{n} \right) \right)$$

das Integral B_ν in der Form

$$(31) \quad B_\nu = \frac{1}{3} \left(\frac{12 F}{n r^2} \right)^{(\nu+1)/3} \int_0^{nr^2 \alpha^3(\varphi)/12 F} e^{-x} \left(1 - \kappa_1 x^{5/3} n^{-2/3} + 0 \left(\frac{x^2}{n} \right) \right) x^{(\nu-2)/3} dx.$$

Hierbei wurde

$$(32) \quad \kappa_1 = \kappa \left(\frac{12 F}{r^2} \right)^{5/3}$$

gesetzt. Integrieren wir in (31) jetzt nicht nur bis zu der angegebenen oberen Grenze, sondern bis $+\infty$, so begehen wir einen Fehler exponentieller Größenordnung, der zu vernachlässigen ist. Es folgt

$$(33) \quad B_\nu = \frac{1}{3} \left(\frac{12 F}{n r^2} \right)^{(\nu+1)/3} \cdot \left[\Gamma \left(\frac{\nu+1}{3} \right) - \frac{\kappa_1}{n^{2/3}} \Gamma \left(\frac{\nu}{3} + 2 \right) \right] + 0(n^{-(\nu+4)/3}).$$

Durch Einsetzen von (33) in (27) erhalten wir

$$(34) \quad E(L_n) = L - a(K) n^{-2/3} + 0 \left(\frac{1}{n} \right).$$

Die Konstante $a(K)$ ergibt sich durch Ausrechnung von

$$(35) \quad a(K) = \Gamma \left(\frac{11}{3} \right) \int_0^{2\pi} \kappa_1 r d\varphi - (12 F)^{2/3} \Gamma \left(\frac{8}{3} \right) \int_0^{2\pi} G r^{-1/3} d\varphi$$

unter Berücksichtigung von (24), (26) und (32) in der Gestalt

$$(36) \quad a(K) = \frac{(12 F)^{2/3} \Gamma \left(\frac{8}{3} \right)}{4!} \int_0^L \left[\frac{9}{5} k^{4/3} + \frac{3}{5} k'' k^{-5/3} - k'^2 k^{-8/3} \right] ds.$$

Dabei wurde anstelle von φ die Bogenlänge s der Randkurve von K als Parameter eingeführt; es gilt ja $d\varphi = k ds$. Durch partielle Integration folgt

$$(37) \quad \frac{3}{5} \int_0^L k'' k^{-5/3} ds = \int_0^L k'^2 k^{-8/3} ds.$$

Daher erhalten wir für $a(K)$ schließlich

$$(38) \quad a(K) = \frac{1}{12} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) (12 F)^{2/3} \int_0^L k^{4/3} ds.$$

Zur Berechnung von $E(F_n)$ führen wir ebenfalls die Substitution (22) durch und erhalten

$$(39) \quad E(F_n) \sim \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{12 F^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha(\varphi)} \left(1 - \frac{r^2 \alpha^3}{12 F} - \alpha \alpha^5 - 0(\alpha^6)\right)^{n-2} \times \\ \times \left[\frac{p(\varphi) r^5 \alpha^5}{4} + \left(\frac{G p(\varphi) r^5}{4} - \frac{r^6}{32}\right) \alpha^7 + 0(\alpha^8) \right] d\alpha d\varphi.$$

Nach (33) ergibt sich hieraus

$$(40) \quad E(F_n) = F - b(K) n^{-2/3} + 0(n^{-1}).$$

Für die Konstante $b(K)$ finden wir nach einigen Rechnungen zunächst

$$(41) \quad b(K) = \frac{1}{16} \Gamma\left(\frac{8}{3}\right) (12 F)^{2/3} \sigma(K) + c(K);$$

hierbei ist

$$(42) \quad \sigma(K) = \int_0^L k^{1/3} ds$$

die äquiaffine Bogenlänge der Randkurve von K , während $c(K)$ die Gestalt

$$(43) \quad c(K) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{4!} (12 F)^{2/3} \int_0^{2\pi} p r^{-1/3} \left(\frac{9}{10} + \frac{3}{10} r^3 k'' - \frac{1}{2} r^4 k'^2\right) d\varphi$$

hat. Durch einen darübergesetzten Punkt bezeichnen wir jetzt die Ableitungen nach φ und drücken k' , k'' durch r , \dot{r} , \ddot{r} aus. Es folgt

$$(44) \quad c(K) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) (12 F)^{2/3}}{4! 10} \int_0^{2\pi} p (9 r^{-1/3} + 4 \dot{r}^2 r^{-7/3} - 3 \ddot{r} r^{-4/3}) d\varphi.$$

Durch zweimalige partielle Integration erhalten wir

$$(45) \quad \int_0^{2\pi} (4 \dot{r}^2 r^{-7/3} - 3 \ddot{r} r^{-4/3}) p d\varphi = 9 \int_0^{2\pi} r^{-1/3} \ddot{p} d\varphi.$$

Dies setzen wir in (44) ein. Wegen $p + \ddot{p} = r$ (vgl. z. B. W. BLASCHKE [2], S. 30) ergibt sich wiederum ein Vielfaches von $\sigma(K)$. Unter Berücksichtigung von (41) folgt schließlich

$$(46) \quad b(K) = \frac{1}{10} \Gamma\left(\frac{8}{3}\right) (12 F)^{2/3} \sigma(K).$$

Die Ergebnisse dieses Paragraphen können wir folgendermaßen zusammenfassen:

Satz 1. *Sei K ein ebener, beschränkter, konvexer Bereich, dessen Randkurve genügend oft stetig differenzierbar ist. Die Krümmung $k(s)$ des Randes genüge der Ungleichung $0 < k(s) < A$. Sei L der Umfang und F der Flächeninhalt von K . Die Länge L_n der konvexen Hülle H_n von n in K unabhängig und gleichverteilt gewählten Punkten besitzt die mathematische Erwartung*

$$(47) \quad E(L_n) = L - \frac{\Gamma(2/3) (12 F)^{2/3} \int_0^L k^{4/3} ds}{12 n^{2/3}} + O(n^{-1}).$$

Für die mathematische Erwartung des Flächeninhaltes F_n von H_n gilt

$$(48) \quad E(F_n) = F - \frac{\Gamma(\frac{5}{3}) (12 F)^{2/3} \sigma(K)}{10 n^{2/3}} + O(n^{-1})$$

wobei $\sigma(K)$ nach (42) die äquiaffine Länge des Randes von K bedeutet.

§ 4. Berechnung von $E(L_n)$ und $E(F_n)$ für ein Quadrat

Sei nun K ein Quadrat mit der Seitenlänge a . Den Koordinatenursprung legen wir in den Mittelpunkt von K und die Nullrichtung $\varphi = 0$ gehe von 0 zu einer Seitenmitte. Wir haben wieder die Integrale (7) und (9) auszuwerten. Aus Symmetriegründen genügt es, die Integration über φ von 0 bis $\pi/4$ auszuführen und entsprechend mit 8 zu multiplizieren. Für die Integration nach p unterscheiden wir zwei Fälle. 1. Die Gerade $g(p, \varphi)$ trifft zwei gegenüberliegende Seiten des Quadrates. Das tritt ein, wenn

$$(49) \quad 0 \leq p \leq p_1(\varphi) = \frac{a}{2} (\cos \varphi - \sin \varphi)$$

gilt. Für l und f ergibt sich

$$(50) \quad l = l(\varphi) = \frac{a}{\cos \varphi}, \quad f = f(p, \varphi) = \frac{a^2}{2} - \frac{a p}{\cos \varphi}.$$

2. Die Gerade $g(p, \varphi)$ trifft zwei aneinandergrenzende Seiten des Quadrates. In diesem Fall ist

$$(51) \quad p_1(\varphi) \leq p \leq p(\varphi) = \frac{a}{2} (\cos \varphi + \sin \varphi).$$

Ferner gilt

$$(52) \quad l = l(p, \varphi) = \frac{p(\varphi) - p}{\cos \varphi \sin \varphi}, \quad f = f(p, \varphi) = \frac{(p(\varphi) - p)^2}{2 \sin \varphi \cos \varphi}.$$

Auf Grund dieser Fallunterscheidung erscheinen die Integrale (7) und (9) jetzt als Summen

$$(53) \quad E(L_n) \sim I_1 + I_2, \quad E(F_n) \sim J_1 + J_2$$

und wir haben die folgenden vier Ausdrücke auszuwerten:

$$(54) \quad I_1 = \frac{4}{3} \binom{n}{2} \int_0^{\pi/4} \int_0^{p_1(\varphi)} \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{a \cos \varphi} \right)^{n-2} \frac{dp d\varphi}{\cos^4 \varphi},$$

$$(55) \quad I_2 = \frac{4}{3} \binom{n}{2} \int_0^{\pi/4} \int_{p_1(\varphi)}^{p(\varphi)} \left(1 - \frac{(p(\varphi) - p)^2}{2a^2 \sin \varphi \cos \varphi} \right)^{n-2} \frac{(p(\varphi) - p)^4 dp d\varphi}{\cos^4 \varphi \sin^4 \varphi},$$

$$(56) \quad J_1 = \frac{2}{3} \binom{n}{2} \int_0^{\pi/4} \int_0^{p_1(\varphi)} \left(\frac{1}{2} + \frac{p}{a \cos \varphi} \right)^{n-2} \frac{p dp d\varphi}{\cos^4 \varphi},$$

$$(57) \quad J_2 = \frac{2}{3} \binom{n}{2} \int_0^{\pi/4} \int_{p_1(\varphi)}^{p(\varphi)} \left(1 - \frac{(p(\varphi) - p)^2}{2a^2 \sin \varphi \cos \varphi} \right)^{n-2} \frac{(p(\varphi) - p)^4 p dp d\varphi}{\cos^4 \varphi \sin^4 \varphi}.$$

Wir beginnen mit der Berechnung von I_1 . Durch die Substitution

$$(58) \quad p = x a \cos \varphi$$

ergibt sich

$$(59) \quad I_1 = \frac{2na}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{(1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi)^{n-1}}{\cos^3 \varphi} d\varphi + 0(2^{-n}).$$

Substituieren wir nun

$$(60) \quad \operatorname{tg} \varphi = t$$

so erhalten wir I_1 in einer Form, die sich leicht abschätzen läßt. Es resultiert

$$(61) \quad I_1 = \frac{4a}{3} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Nun berechnen wir I_2 . Durch die Substitution

$$(62) \quad \frac{(p(\varphi) - p)^2}{2a^2 \sin \varphi \cos \varphi} = \frac{x}{n}$$

ergibt sich

$$(63) \quad I_2 = \frac{2^{5/2} \cdot a(n-1)}{3n^{3/2}} \int_0^{\pi/4} (\cos \varphi \sin \varphi)^{-3/2} \left[\int_0^{(n \operatorname{tg} \varphi)/2} \left(1 - \frac{x}{n} \right)^{n-2} x^{3/2} dx \right] d\varphi.$$

Jetzt substituieren wir

$$(64) \quad n \operatorname{tg} \varphi = z$$

und erhalten

$$(65) \quad I_2 = \frac{2^{5/2} \cdot a(n-1)}{3n} \int_0^n \left(\frac{1 + \frac{z^2}{n^2}}{z^3} \right)^{1/2} \int_0^{z/2} \left(1 - \frac{x}{n} \right)^{n-2} x^{3/2} dx dz.$$

Wir setzen

$$(66) \quad \left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right)^{1/2} = \left[\left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right)^{1/2} - 1\right] + 1$$

und zerlegen dadurch das Integral (65) in zwei Bestandteile. Durch die Ersetzung $z = n\tau$ ergibt sich für den ersten Bestandteil:

$$(67) \quad \frac{2^{5/2} \cdot a(n-1)}{3n} \int_0^n \frac{\sqrt{1 + \frac{z^2}{n^2}} - 1}{z^{3/2}} \int_0^{z/2} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} x^{3/2} dx dz = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} a q + 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

wobei

$$(68) \quad q = \int_0^1 \frac{(\sqrt{1 + \tau^2} - 1)}{\tau^{3/2}} d\tau$$

ist. Für den zweiten Bestandteil erhalten wir nach einigen elementaren Umformungen

$$(69) \quad \frac{2^{5/2} \cdot a(n-1)}{3n} \int_0^n \left(\int_0^{z/2} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} x^{3/2} dx \right) \frac{dz}{z^{3/2}} = \frac{8a}{3} - 2 \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \cdot a + 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Aus (61), (67) und (69) ergibt sich für die mathematische Erwartung von L_n

$$(70) \quad E(L_n) = 4a - \frac{a(2-q)\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} + 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Zur Berechnung von J_1 führt man wieder die Transformationen (58) und danach (60) durch. Nach einigen elementaren Rechnungen erhält man

$$(71) \quad J_1 = \frac{1}{3} a^2 + 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Schließlich müssen wir noch das Integral J_2 berechnen. Die Substitution (62) führt auf $J_2 = R_1 - R$ mit

$$(72a) \quad R_1 = \frac{4a^2(n-1)}{3n^{3/2}} \int_0^{\pi/4} \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{(\sin 2\varphi)^{3/2}} \left(\int_0^{(n \operatorname{tg} \varphi)/2} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} x^{3/2} dx \right) d\varphi,$$

$$(72b) \quad R = \frac{8a^2(n-1)}{3n^2} \int_0^{\pi/4} \left[\int_0^{(n \operatorname{tg} \varphi)/2} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} x^2 dx \right] \frac{d\varphi}{\sin 2\varphi}.$$

Die Berechnung von R_1 gelingt leicht durch die Substitution (64). Es ergibt sich

$$(73) \quad R_1 = \frac{2}{3} a^2 + 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Für R erhalten wir durch die Substitution

$$(74) \quad \frac{n \operatorname{tg} \varphi}{2} = t$$

den Ausdruck

$$(75) \quad R = \frac{4a^2(n-1)}{3n^2} \int_0^{n/2} \left(\int_0^t \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} x^2 dx \right) \frac{dt}{t}.$$

Integrieren wir über x , so ergibt sich

$$(76) \quad R = \frac{8a^2}{3(n+1)} \int_0^{n/2} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+1} \right] \frac{dt}{t} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Für die Berechnung des in (76) auftretenden Integrals benutzen wir die Formel

$$(77) \quad \frac{1}{t} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+1} \right] = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k.$$

Es folgt

$$(78) \quad \int_0^{n/2} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+1} \right] \frac{dt}{t} = \ln n + C - \log 2 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

hierbei bedeutet C die Eulersche Konstante. Er ergibt sich

$$(79) \quad J_2 = R_1 - R = \frac{2a^2}{3} - \frac{8a^2 \ln n}{3n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Beachten wir die Formel (70) und $E(F_n) = J_1 + J_2$, so können wir die Ergebnisse dieses Paragraphen in dem folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 2. *In einem Quadrat K der Seitenlänge a bezeichne H_n die konvexe Hülle von n in K unabhängig und gleichverteilt gewählten Punkten. Für die mathematische Erwartung des Umfanges L_n von H_n gilt*

$$(80) \quad E(L_n) = 4a - \frac{a(2-q)\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

wobei die Konstante q durch (68) gegeben ist. Für die mathematische Erwartung des Flächeninhaltes F_n von H_n gilt

$$(81) \quad E(F_n) = a^2 - \frac{8a^2 \ln n}{3n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Literatur

- [1] RÉNYI, A., u. R. SULANKE: Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* 2 (1963) 75–84.
 [2] BLASCHKE, W.: *Vorlesungen über Integralgeometrie*, 3. Aufl., Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1955.

Budapest VI/Ungarn Benczur u. 28
 und
 Schulzendorf über Eichwalde bei Berlin
 Hamburger Straße 4

(Eingegangen am 7. Oktober 1963)