ÚJ MÓDSZEREK ÉS EREDMÉNYEK A KOMBINATORIKUS ANALÍZISBEN, II.

Írta: RÉNYI ALFRÉD

8. §. A Pascal-háromszög egy tulajdonsága és általánosításai

A binomiális együtthatókat rendezzük el egy kétirányban végtelen mátrixba a következőképpen: az n-edik sor k-adik eleme, amelyet a_{nk}-val jelölünk $(n, k = 0, 1, \ldots)$, legyen

$$a_{nk} = \binom{n+k}{k}. \tag{8.1}$$

Így tehát a következő mátrixot nyerjük:

$$\begin{array}{|cccccc}
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \ldots \\
1 & 4 & 10 & 20 & 35 & \ldots \\
1 & 5 & 15 & 35 & 70 & \ldots \\
1 & 6 & 21 & 56 & 126 & \ldots \\
\ldots & & & & &
\end{array}$$

3. ábra

Az (a_{nk}) mátrix nyilván lényegében azonos a *Pascal*-háromszöggel, csak éppen el van forgatva 45°-al.

Régóta ismeretes volt (lásd pl. [44]), hogy ha az (a_{nk}) mátrixból bárhogyan kiveszünk egy olyan négyzetes részmátrixot, amelynek bal felső sarka a 3. ábrán ábrázolt mátrix határán van, vagyis ha vizsgáljuk az

$$M_{a,b} = (a_{nk})_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ 0 \leqq k \leqq b-a}}$$

vagy az

$$M^{(c,d)} = (a_{nk})_{\substack{0 \leqq n \leqq d-c \\ c \leqq k \leqq d}}$$

mátrixot $(0 \leqq a < b,\ 0 \leqq c < d)$, e mátrixok mindegyikének determinánsa 1-gyel lesz egyenlő.

Így például

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{vmatrix} = 60 + 30 + 30 - 24 - 50 - 45 = 1.$$

Általában legyen

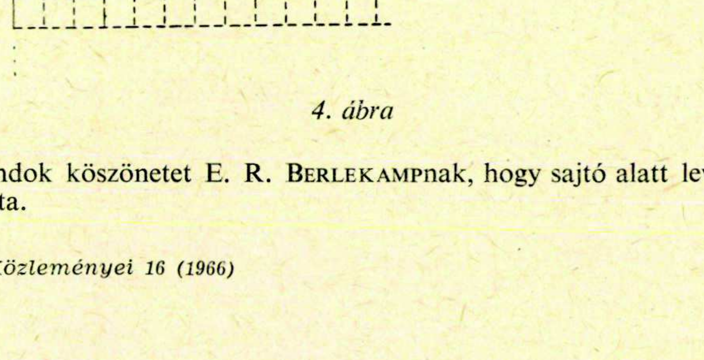
$$D_{a,a+k} = \begin{vmatrix} \binom{a}{0} & \binom{a+1}{1} & \dots & \binom{a+k}{k} \\ \binom{a+1}{0} & \binom{a+2}{1} & \dots & \binom{a+k+1}{k} \\ \vdots & & & \\ \binom{a+k}{0} & \binom{a+k+1}{1} & \dots & \binom{a+2k}{k} \end{vmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy már bebizonyítottuk, hogy $D_{a,a+j}=1$, ha $j=0, 1, \dots, k-1$ és $a=0, 1, \dots$. A $D_{a,a+k}$ determináns minden sorából (kivéve az elsőt) kivonva a felette álló sort, azt kapjuk, figyelembe véve az $\binom{a+h}{i}-\binom{a+h-1}{i}=\binom{a+h-1}{i-1}$ azonosságot, hogy

$$D_{a,a+k} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{a+1}{1} & \dots & \binom{a+k}{k} \\ 0 & \binom{a+1}{0} & \dots & \binom{a+k}{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & \binom{a+k}{0} & \dots & \binom{a+2k-1}{k-1} \end{vmatrix} = D_{a+1,a+k}$$

Figyelembe véve, hogy $D_{a,a}=\left|\binom{a}{0}\right|=|1|=1$, teljes indukcióval következik, hogy $D_{a,a+k}=1$ $(a=0, 1, \dots; k=0, 1, \dots)$.

A legutóbbi időkig ez a tétel, mint izolált tény, mint érdekes kuriózum volt ismeretes. Nemrégiben azonban ELWYN R. BERLEKAMP[1] [25] ezt a binomiális együtthatókra vonatkozó tényt messzemenően általánosította és az így nyert általános eredményt az információelméletben hibajavító kódok konstruálására használta fel. BERLEKAMP bebizonyította többek között a következő tételt: Legyen adva a síkbeli négyzetrács rácsvonalaiból álló tetszőleges végtelen „lépcső" (lásd 4. ábra).

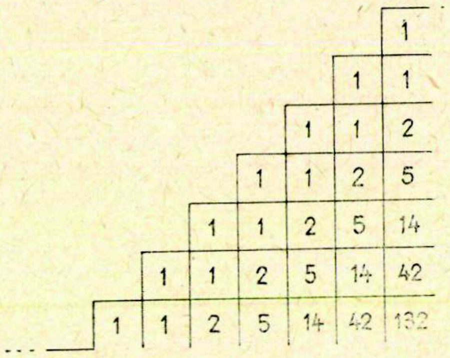


4. ábra

[1] Ez úton mondok köszönetet E. R. BERLEKAMPnak, hogy sajtó alatt levő kéziratát rendelkezésemre bocsátotta.

Akkor a „lépcső” határvonala alatti rácsnégyzeteket egy és csak egyféleképpen lehet kitölteni egész számokkal olymódon, hogy bármely olyan rácsvonalakkal határolt négyzetet választunk is ki, amelynek bal felső sarka a lépcső határvonalán fekszik, e négyzet által határolt mátrix determinánsának értéke 1.

Berlekamp tételének bizonyítása igen egyszerű, ezért csak vázoljuk. Azon rácsnégyzetekben, amelyek bal felső sarka a lépcső határvonalán fekszik, nyilván 1-nek kell állni. Ha már bizonyos rácsnégyzeteket kitöltöttünk, találhatunk mindig olyan rácsnégyzetet, amely egy olyan mátrix jobb alsó sarkában áll, melynek összes többi elemét már meghatároztuk és amelynek bal felső sarka a lépcső határán van. Ez esetben az a feltétel, hogy a szóban forgó mátrix determinánsa 1 legyen, egy elsőfokú egyenletet ad, amelyben az ismeretlen együtthatója 1, és mivel feltevés szerint a mátrix többi elemei mind egész számok, következik, hogy a szóban forgó rácsnégyzet egy egyértelműen meghatározott egész számmal töltendő ki. Így a tétel állítása indukcióval következik.



5. ábra

Így például vizsgáljunk meg egy periodikus egylépéses lépcsőt. Az ismertetett eljárás szerint kitöltve a rácsnégyzeteket, az 5. ábrán látható számokat kapjuk. Látjuk, hogy a kapott (a_{nk}) mátrix *Hankel*-féle, azaz elemei $(n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, k \geqq n)$ $a_{nk}=b_{k-n}$ alakban írhatók, ahol $b_0=1$, $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=5$, $b_4=14$, $b_5=42$, $b_6=132, \dots$. E számsorozat az ún. *Catalan-féle számok* sorozata, amelyek előállíthatók $b_n=\binom{2n-1}{n-1}-\binom{2n-1}{n-2}$ alakban $(n \geqq 2)$.

Berlekamp egy algoritmust adott meg tetszőleges „lépcső”-höz tartozó számok megkonstruálására.

9. §. Latin négyzetek

A (statisztikai) kísérletek tervezésével kapcsolatos kombinatorikai problémák részletes ismertetésére itt nem térhetünk ki, mert ez egy egész könyvet igényelne (l. pl. [26]). E problémák jellegzetessége, hogy megoldásukra a *Galois*-testek és véges geometriák elméletére van szükség. Itt csak egy — még csak részben megoldott — problémát tárgyalunk latin négyzetekre vonatkozólag; mielőtt erre rátérnénk, néhány definíciót bocsátunk előre.

Latin négyzetnek nevezünk egy (c_{ik}) négyzetes mátrixot $(1 \leqq i, k \leqq n)$, ha annak elemei az $1, 2, \dots, n$ számok és a mátrix minden sorában és minden oszlopában az $1, 2, \dots, n$ számok egy permutációja áll. Ha például növénytermesztési kísérleteknél n-féle „kezelést” akarunk kipróbálni, tekintettel arra, hogy a talaj minősége helyről-helyre általában változik, a talaj minőségének zavaró hatásának kiküszöbölése céljából előnyös, ha az n kezelést egy n^2 parcellából álló blokkon úgy alkalmazzuk, hogy az egyes parcellákba az azon alkalmazott kezelés sorszámát beírva egy latin négyzetet kapjunk; ez nagyon megkönnyíti a statisztikai kiértékelést. Latin négyzetet igen sokféleképpen lehet konstruálni; itt csak egy konstrukciós eljárást említünk meg, az ún. addiciós eljárást. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n$ az $1, 2, \ldots, n$ számok tetszőleges permutációi és legyen $c_{ik} \equiv a_i + b_k \mod n$, $1 \leqq c_{ik} \leqq n$. (A 0 maradékosztályt tehát n-nel reprezentáljuk.) Nyilvánvaló, hogy a (c_{ik}) mátrix latin négyzet lesz, hiszen a maradékosztályok egy permutációját mod n eltolva újból egy permutációt kapunk. Ha például $n=5$ és a két permutáció 3 1 4 5 2 és 2 5 1 3 4, akkor a következő latin négyzetet nyerjük:

$$\begin{matrix} 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{matrix} \tag{9.1}$$

Figyeljük meg, hogy e latin négyzetben a vízszintes sorokban szomszédként az 1, 2, 3, 4, 5 számokból képezhető 20 számpár közül csak 15 fordul elő, 5 pár ((14) (25) (31) (42) (53)) viszont kétszer is előfordul. Vannak kísérletek, amelyeknél a szomszédos kezelések bizonyos mértékig befolyásolhatják egymást. Így természetes módon merül fel a kérdés: lehet-e olyan $n \times n$-es latin négyzetet konstruálni, amelynél az $1, 2, \ldots, n$ számokból alkotott $n(n-1)$ lehetséges rendezett számpár mindegyike egyszer előfordul vízszintes szomszédként és egyszer függőleges szomszédként? E kérdésre részleges választ E. N. GILBERT [27] adott. GILBERT oly módon konkretizálta a kérdést, hogy csak a fent vázolt addiciós módszerrel konstruálható latin négyzeteket vizsgálta és azt kérdezte, hogy milyennek kell lennie az (a_i) és (b_j) permutációknak, hogy az azokból (9. 1) alapján konstruált (c_{ik}) latin négyzet a kívánt tulajdonsággal bírjon. E kérdésre a válasz igen egyszerű, ugyanis feltételünk azt kívánja meg, hogy a szóbanforgó két permutáció azzal a tulajdonsággal bírjon, hogy az $a_{i+1}-a_i$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ különbségek mod n egymástól különbözők legyenek (tehát kongruensek legyenek mod n az $1, 2, \ldots, n-1$ számok egy permutációjával) és a $\{b_j\}$ permutáció is ugyanezzel a tulajdonsággal bírjon. Az ilyen permutációkat nevezzük a rövidség kedvéért *tökéletes* permutációknak.

Ezek után felvetődnek a következő kérdések: n mely értékeire létezik az $1, 2, \ldots, n$ számoknak tökéletes permutációja; adott n-re, hány tökéletes permutáció van és ezeket hogyan lehet megkonstruálni. Az első kérdésre a válasz igen egyszerű: Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ az $1, 2, \ldots, n$ számok egy tökéletes permutációja, akkor

$$\begin{aligned} (a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_n-a_{n-1}) &= a_n-a_1 = \\ = 1+2+\ldots+n-1 &= \frac{n(n-1)}{2} \mod n. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Ha n páratlan, akkor tehát $a_n=a_1$, ami lehetetlen; tehát páratlan n-re nem létezik tökéletes permutáció. Ha viszont n páros, (9. 2) teljesítése lehetséges. Valóban, egyszerű példákkal meg lehet mutatni, hogy n minden páros értékére megadható az $1, 2, \ldots, n$ számoknak tökéletes permutációja.

Például, ha $n=2k$, a

$$2k,\ 1,\ 2k-1,\ 2,\ 2k-2,\ \ldots,\ k+1,\ k$$

permutáció tökéletes, hiszen a konzekutív elemek különbségei mod $2k$ az

$$1,\ 2k-2,\ 3,\ 2k-4,\ 5,\ \ldots,\ 2,\ 2k-1$$

számok mind különbözőek. Az összes tökéletes permutációkról egyelőre nincs áttekintésünk.

n speciális (páros) értékeire GILBERT más módon is konstruált tökéletes permutációkat. Ha pl. $n=p-1$, ahol p egy páratlan prímszám, amelyre nézve 2 primitív gyök, akkor az $a_i \equiv 2^{i-1} \bmod p$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ előírással definiált permutáció tökéletes, ugyanis az $a_{i+1}-a_i \equiv 2^i - 2^{i-1} = 2^{i-1} \bmod p$ számok definíció szerint különbözőek.

Így például, ha $n=4=5-1$, akkor 2 primitív gyök mod 5, 1, 2, 4, 8 kongruens rendre 1, 2, 4, 3-mal mod 5, tehát 1, 2, 4, 3 tökéletes permutáció mod 4; valóban a különbségek 1, 2, 3 különbözőek. Így tehát a

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{matrix}$$

latin négyzet (amelyet úgy konstruáltunk az addiciós módszerrel, hogy (a_i) és (b_j) permutációként egyaránt az 1, 2, 4, 3 permutációt választottuk) bír azzal a tulajdonsággal, hogy minden számpár egyszer és csak egyszer fordul elő vízszintes szomszédként és függőleges szomszédként egyaránt. (E latin négyzet emellett szimmetrikus is.)

B. GORDON [45] egy általános módszert adott tökéletes latin négyzetek konstruálására a csoportelmélet segítségével.[2] Legyen G egy n-elemű *Abel*-csoport. Nevezzük a G csoportot S-típusúnak, ha elemei elrendezhetők olyan módon egy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sorozatba, hogy a $b_i = a_1, a_2 \ldots a_i$ szorzatok $(i=1, 2, \ldots, n)$ mind különbözőek (tehát $b_1, \ldots, b_n$ az $a_1, \ldots, a_n$ elemek egy permutációja). B. GORDON bebizonyította, hogy egy véges *Abel*-csoport akkor és csak akkor S-típusú, ha előállítható egy 2^k rendű ciklikus csoport $(k \geqq 1)$ és egy páratlan rendű csoport direkt szorzataként. Könnyen belátható, hogy ha G S-típusú és $c_{jk}=b_j^{-1}b_k$, ahol a b_i sorozatot a fent említett módon definiáltuk, akkor a (c_{jk}) $(j, k=1, 2, \ldots, n)$ mátrix egy tökéletes latin négyzet. Jegyezzük meg, hogy a most bevezetett terminológiával a mod n vett maradékosztályok additív csoportja akkor és csak akkor S-típusú, ha n páros, és ebben a speciális esetben a most megadott konstrukció a tökéletes latin négyzetek tökéletes permutációból való fentebb adott származtatására redukálódik.

A GORDON módszerével konstruált tökéletes latin négyzetek mind csoportszorzástáblák. Nyitott probléma, hogy egy tetszőleges tökéletes latin négyzet csoport-szorzástábla-e.

A tárgyalt probléma szorosan összefügg a következő gráfelméleti problémával is: egy G gráf *arboricitás*-ának nevezzük azon erdők minimális számát, amelyekre felbontható. A felbontás itt úgy értendő, hogy ha G szögpontjainak halmaza a H halmaz, éleinek halmaza az E halmaz, vagyis $G=(H, E)$ és a felbontásban szereplő erdők ugyanilyen jelöléssel $G_k=(H_k, E_k)$ $(k=1, 2, \ldots, r)$, akkor $H_k=H$ $(k=1, 2, \ldots, n)$

[2] E dolgozatra DÉNES JÓZSEF volt szíves a figyelmet felhívni.

és $\sum_{k=1}^{r} E_k = E$. A minimális számú erdőre való felbontás esetében nyilván elérhető az is, hogy az E_k élhalmazok idegenek legyenek.

Nyilvánvaló, hogy pl. egy fa arboricitása 1, míg egy kör arboricitása 2, továbbá egy kocka éleiből álló gráf arboricitása 2.

Gráfok arboricitása meghatározásának problémáját általánosságban NASH-WILLIAMS oldotta meg [46].

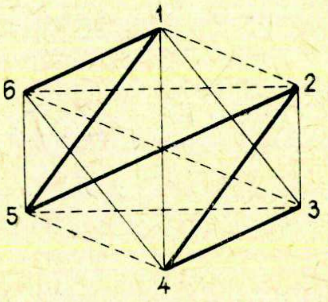
F. HARARY gráfelméleti szemináriumában (a michigani egyetemen) vetettem fel 1964-ben gráfok minimális számú erdőre való felbontása effektív megkonstruálásának problémáját. Speciális esetekre e kérdést a szeminárium egy résztvevője, L. W. BEINEKE [47] megoldotta, így pl. arra az esetre, ha G $2k$ szögpontú teljes gráf. Ez esetben, mivel G-nek $k(2k-1)$ éle, és egy $2k$ szögpontú erdőnek legfeljebb $2k-1$ éle van, nyilván k-nál kevesebb erdőre nem lehet G-t felbontani, és k erdőre is csak úgy bontható, ha ezek mindegyike fa. Egy ilyen felbontást a következőképpen nyerhetünk. A

$$2k,\ 1,\ 2k-1,\ 2,\ 2k-2, \ldots, k+1,\ k$$

tökéletes permutációból kiindulva képezzünk egy $2k$ oszlopból és k sorból álló mátrixot, amelynek i-edik sorát a fenti tökéletes permutáció mod $2k$ $(i-1)$-gyel való eltolásával nyerjük ($i = 1, 2, \ldots, k$). E mátrix soraihoz egy-egy fát (pontosabban utat) rendelünk hozzá úgy, hogy a sorban szomszédos számokkal megszámozott pontokat éllel kötjük össze. Pl. ha $k=6$, a mátrix a következő

$$\begin{matrix} 6 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5. \end{matrix}$$

A teljes 6-szög e mátrixnak megfelelő 3 fára való felbontását a 6. ábra mutatja:



6. ábra

amelyen a 3 utat vastag, vékony, ill. pontozott vonallal rajzoltuk be.

Annak bizonyítása, hogy az említett mátrix minden k-ra megoldja a felmerült problémát, azon alapszik, hogy a

$$2k,\ 1,\ 2k-1,\ 2, \ldots, k+1,\ k$$

tökéletes permutációnak megvan az a tulajdonsága is, hogy ha e permutációt $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$-val jelöljük, úgy

$$a_{2b-j+1} - a_j \equiv k \mod 2k.$$

Ennek következtében, ha

$$i-1+a_j = c \quad \text{és} \quad i-1+a_{j+1} = d,$$

akkor

$$k+i-1+a_{2k-j} \equiv d \mod 2k$$

és

$$k+i-1+a_{2k-j+1} \equiv c \mod 2k,$$

vagyis, ha a (c, d) rendezett számpár a mátrix felső k sora valamelyikében fordul elő, akkor a (d, c) rendezett számpár az alsó k sor valamelyikében fordul elő. Más szóval, az $(i-1+a_j)$ mátrixnak megvan az a tulajdonsága, hogy az $1, 2, \ldots, 2k$ számokból alkotható $\binom{2k}{2}$ *rendezetlen* számpár mindegyike pontosan egyszer fordul elő egy sorban egymás mellett a mátrix felső k sorából alkotott $k \times 2k$-as mátrixban.

E fejezet befejezéseként megemlítünk egy latin négyzetekre vonatkozó nehéz problémát, amely hosszú időn át nyitott volt és csak nemrégiben sikerült azt megoldani. Az $1, 2, \ldots, n$ számokból képezett (c_{ik}) és (d_{ik}) latin négyzeteket *ortogonális*nak nevezik, ha a (c_{ik}, d_{ik}) rendezett számpárok között nincs két azonos. Például az alábbi két 4-edrendű latin négyzet ortogonális:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{matrix}$$

Ezt könnyen beláthatjuk, ha a két latin négyzetet szuperponáljuk, azaz úgy írjuk bele egy 4×4 mezős mátrixba, hogy a mátrix minden mezejébe két szám kerüljön: első helyre az első négyzet, második helyre a második négyzet megfelelő eleme. Ha a két latin négyzet ortogonális, akkor az így kapott $n \times n$ rendezett számpár mind különböző. A fenti példában ez így van:

$$\begin{matrix} 11 & 22 & 33 & 44 \\ 23 & 14 & 41 & 32 \\ 34 & 43 & 12 & 21 \\ 42 & 31 & 24 & 13 \end{matrix}$$

Régóta ismeretes volt, hogy nem létezik két 6×6-os ortogonális latin négyzet. EULER azt sejtette, hogy általában, ha $n = 4k + 2$, akkor nem létezik két $n \times n$-es ortogonális latin négyzet. Ezt a sejtést R. C. BOSE és S. S. SHRIKHANDE [28] és E. T. PARKER [29] 1959-ben megcáfolták. Ma már tudjuk, hogy $n = 2$ és $n = 6$ kivételével minden n-re létezik két ortogonális latin négyzet.

Egy 10×10-es ortogonális latin négyzet-párt az alábbiakban mutatunk be (10 helyett 0-t írtunk).

$$\begin{matrix} 0 & 4 & 1 & 7 & 2 & 9 & 8 & 3 & 6 & 5 \\ 8 & 1 & 5 & 2 & 7 & 3 & 9 & 4 & 0 & 6 \\ 9 & 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 8 & 3 & 0 & 4 & 7 & 6 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 4 & 1 & 5 & 0 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 0 & 9 & 8 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 7 & 1 & 9 & 8 & 6 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 8 & 9 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 9 & 7 & 8 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 7 & 8 & 6 & 9 & 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 7 & 8 & 0 & 9 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 7 & 8 & 1 & 9 & 6 & 3 & 4 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 7 & 8 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 9 & 0 & 2 & 4 & 7 & 8 & 1 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 9 & 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 5 & 9 & 2 & 4 & 6 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 9 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 8 & 9 & 7. \end{matrix}$$

Megjegyezzük, hogy amikor a 10×10-es ortogonális latin négyzetek létezésének problémája még nyitott volt, felmerült a gondolat, hogy elektronikus számológép segítségével döntsék el a kérdést. Kiderült azonban, hogy ez az út gyakorlatilag nem járható, mert az összes lehetőségek végigpróbálása a ma létező leggyorsabb számológépen is száz évnél hosszabb időt igényelt volna.

10. §. Az Ising-féle modell

Az ún. *Ising-modell* (lásd pl. [30], ahol részletes irodalomjegyzék is található) a ferromágneses anyagok elméletében játszik szerepet. Kristályos szerkezetű szilárd testekről lévén szó, első közelítésben az atomokat úgy képzeljük el, hogy rácsszerűen helyezkednek el: egy rácsszerű pontrendszer minden rácspontjában egy atom foglal helyet. Minden egyes atomot tekinthetünk egy-egy mágnesnek, amelynek mágneses momentuma (*spin*je) kétféle irányítással bírhat: pozitív vagy negatív irányítással. Képzeljük el az atomokat megszámozva és legyen $s_j = \pm 1$ aszerint, hogy a j-edik atom spinje pozitív vagy negatív. Ez esetben első közelítésben (csak a „szomszédos"[3] atomok közötti kölcsönhatást véve figyelembe, az egymástól távolabb levő atomok kölcsönhatását elhanyagolva) az $S_1, S_2, \ldots, S_N$ spin-értékek által jellemzett állapotban a rendszer belső energiája

$$\mathscr{E} = -\mathscr{J} \sum_{(j,k)\in A}' S_j S_k, \tag{10.1}$$

ahol $\mathscr{J}$ egy pozitív állandó és az összegezés csak olyan (j, k) számpárokra terjesztendő ki, amelyek szomszédos rácspontok indexei. (A-val jelöltük azoknak a (j, k) számpároknak a halmazát, amelyekre j és k szomszédos rácspontok sorszámai.) A rendszer legfőbb termodinamikai jellemzőit az ún. *állapotfüggvény* határozza meg, amelyet a

$$Z = \sum_{\substack{S_j=\pm 1\\ 1\leq j\leq N}} e^{K \sum_{(j,k)\in A} S_j S_k} \tag{10.2}$$

képlet definiál; a (10. 2) jobb oldalán az összegezés az összes lehetséges spin-eloszlásra terjesztendő ki, vagyis $S_1, S_2, \ldots, S_N$ egymástól függetlenül felveszik a ± 1 értékeket és így az összegnek 2^N tagja van. A K szám definíciója $K = \frac{\mathscr{J}}{kT}$, ahol $\mathscr{J}$ a (10. 1)-ben szereplő állandó, k a *Boltzmann*-féle állandó és T az anyag abszolút hőmérséklete. A Z állapotfüggvény tulajdonképpen — egy konstans faktortól eltekintve — felfogható, mint a rendszer (10. 1) által megadott energiájának generátorfüggvénye.

Ha ugyanis az $S_1, \ldots, S_N$ spineket valószínűségi változóknak tekintjük, amelyek a ± 1 értékeket egymástól függetlenül, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel veszik fel, akkor a rendszer energiája, $\mathscr{E}$ is valószínűségi változó lesz, amelynek generátorfüggvénye

$$g(z) = \frac{1}{2^N} \sum_{\substack{S_j=\pm 1\\ 1\leq j\leq N}} e^{-z\mathscr{J} \sum_{(j,k)\in A} S_j S_k} \tag{10.3}$$

[3] Egy rácsszerű pontrendszernél többféleképpen is lehet definiálni azt, hogy mely pontokat tekintünk szomszédoknak. E kérdésre a későbbiekben visszatérünk.

és így a Z állapotfüggvény előállítható

$$Z = 2^N g\left(-\frac{\mathcal{I}}{kT}\right) \tag{10. 4}$$

alakban.

A fizikában a rendszer (átlagos) belső energiáját az

$$\bar{E} = \lim_{T\to\infty} kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z \tag{10. 5}$$

képlettel szokták kifejezni. (10. 5) nyilvánvaló következménye a (10. 4) képletnek és annak a ténynek, hogy egy valószínűségi változó várható értékét megkaphatjuk, ha a generátorfüggvényét differenciáljuk és Z helyébe 0-t helyettesítünk. Valóban, (10. 4) szerint

$$\lim_{T\to\infty} kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z = g'(0).$$

Mármost a Z állapotfüggvényt a következőképpen lehet átalakítani: jelölje c a vizsgált rácsban egy rácspont szomszédainak a számát. (Feltesszük, hogy a rács és a pontok szomszédos voltának definíciója olyan, hogy minden pontnak ugyanannyi szomszédja van, vagyis a rács homogén). Akkor

$$Z = \sum_{\substack{S_j=\pm 1\\ 1\le j\le N}} \prod_{(j,k)\in A} e^{KS_jS_k} = (\cosh K)^{\frac{CN}{2}} \cdot \sum_{S_j=\pm 1} \prod_{(j,k)\in A} (1+WS_jS_k), \tag{10. 6}$$

ahol

$$W = \tanh K. \tag{10. 7}$$

Ugyanis

$$e^{\pm k} = (\cosh K)(1 \pm \tanh K), \tag{10. 8}$$

tehát, ha $S_j = \pm 1$ és $S_k = \pm 1$

$$e^{KS_jS_k} = (\cosh K)(1+WS_jS_k). \tag{10. 9}$$

Elvégezve (10.6)-ban a beszorzást, azt kapjuk, hogy

$$Z = (\cosh K^{\frac{NC}{2}} \sum_{S_j=\pm 1} \sum_{r\ge 0} W^r \sum_{\substack{(k_i,l_i)\in A\\ 1\le i\le r\\ (k_i,l_i)\ne(k_h,l_h) \text{ ha } l\ne h.}} S_{k_1} S_{l_1} S_{k_2} S_{l_2} \ldots S_{k_r} S_{l_r} \tag{10. 10}$$

Könnyen belátható, hogy ha egy

$$S_{k_1} S_{l_1} S_{k_2} S_{l_2} \ldots S_{k_r} S_{l_r} \tag{10. 11}$$

szorzatot összegezünk úgy, hogy $S_1, \ldots, S_N$ egymástól függetlenül felveszik a ± 1 értékeket, ez az összeg csak akkor nem lesz 0, ha a $k_1, l_1, k_2, l_2, \ldots, k_r, l_r$ számsorozatban az $1, 2, \ldots, N$ számok mindegyike páros sokszor fordul elő. Minden (10. 11) alakú szorzathoz egyértelműen hozzárendelhető egy, a $P_1, P_2, \ldots, P_N$ szögpontokból (tehát a rács rácspontjaiból) álló gráf, amelyben a P_i és P_j pontokat akkor és csak akkor kötjük össze éllel, ha az (i, j) számpár előfordul a $(k_1, l_1), \ldots, (k_r, l_r)$ számpárok között. A (10. 11) alakú tagok összege tehát akkor és csak akkor lesz 0-tól különböző, ha a hozzárendelt gráf minden szögpontjának foka páros. Nevezzük az ilyen gráfokat *zárt*nak.

Ha viszont a (10. 11)-hez rendelt gráf zárt, akkor a (10. 11) szorzat értéke mindig $+1$, tehát a (10. 11) tagot összegezve $S_j = \pm 1$-re $(j = 1, 2, \ldots, N)$ mindig 2^N-et kapunk. Jelölje $n(r)$ a vizsgált rács szögpontjaiból alkotott és r élt tartalmazó olyan zárt gráfok számát, amelyekben minden él „szomszédos" pontokat köt össze, akkor tehát

(10. 12)
$$Z = 2^N (\cosh K)^{\frac{NC}{2}} \cdot \sum_{r=0}^{\left[\frac{N(N-1)}{2}\right]} n(r)\, W^r.$$

Így tehát a ferromágneses anyagok *Ising*-modellje állapotfüggvényének meghatározása egy gráf-leszámlálási feladatra vezethető vissza.

Egy megadott rácsra (a szomszédos pontok definíciójának valamilyen módon való rögzítése mellett) az *Ising*-probléma tehát abból áll, hogy meg kell határozni a rácsra az $n(r)$ számsorozatot, vagyis le kell számlálni a rács szögpontjaiból és kizárólag szomszédos pontokat összekötő élekből álló előírt élszámú zárt (azaz csupa páros fokú pontból álló) gráfokat.

Oldjuk meg legelőször ezt a feladatot az egydimenziós esetben, tehát (figyelembevéve, hogy a rácsnak homogénnek kell lennie) abban az egyszerű esetben, ha a rács egy szabályos N-szög, amelyben a sokszög ugyanazon oldalán fekvő pontpárokat nevezzük „szomszédos"-nak. Ez esetben nyilvánvalóan $C=2$, $n(0)=n(N)=1$ és $n(k)=0$, ha $0<k<N$, tehát

(10. 13)
$$Z = (2 \cosh K)^N + (2 \sinh K)^N$$

és így

$$Z = 2 \sum_{l=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \binom{N}{2l} e^{(N-4l)K}$$

Tehát a rendszer energiájának lehetséges értékei az $N-4l$ számok $(l=0, 1, \ldots, [N/2])$ és ha az atomok spinjeit véletlenszerűen választjuk ± 1-nek, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel, akkor

$$P(\mathscr{E} = N-4l) = \frac{2\binom{N}{2l}}{2^N} \qquad \left(l = 0, 1, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right]\right).$$

Az átlagos energia ez esetben természetesen zérus (az eloszlás 0-ra való szimmetriája folytán).

Egy másik érdekes speciális eset a következő: Álljon a rendszer egy tetraéder 4 csúcsából és nevezzük szomszédosnak azokat a pontpárokat, amelyek ugyanazon él végpontjai. Ez esetben $C=3$ és a lehetséges zárt gráfok a következők:

1. a gráf, amelynek nincsenek élei,
2. a tetraéder egy lapján fekvő háromszög,
3. a tetraéder négy éléből álló négyszög.

Ilyen módon $n(0)=1$, $n(3)=4$, $n(4)=3$ és így

$$Z=16(\cosh K)^6(1+4(\tanh K)^3+3(\tanh K)^4),$$

tehát

$$Z=2e^{6K}+8+6e^{-2K},$$

vagyis az energia lehetséges értékei $-6\mathcal{J}$, 0, $+2\mathcal{J}$ és a hozzátartozó valószínűségek $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, az energia várható értéke 0.

Fizikai szempontból legfontosabb feladat volna egy térbeli kockarácsra megoldani az *Ising*-problémát. Ezt a feladatot azonban eddig nem sikerült senkinek megoldani. Jelentős eredmény volt, amikor 1944-ben *L.* ONSAGER [31] megoldotta a síkbeli négyzetrácsra az *Ising*-problémát. E problémára ma már több megoldás ismeretes. M. KAC és I. C. WARD [32] 1952-ben egy tisztán kombinatorikai megoldást adtak, amely azonban nem volt teljes. (E megoldás alapötlete B. L. VAN DER WAERDEN-től származik [43].) Megoldásukat S. SHERMAN [33] tette teljessé 1960-ban. A *Kac—Ward—Sherman*-féle megoldásnak egy új és áttekinthető variánsát C. A. HURST és H. S. GREEN [34] dolgozták ki. A *Hurst—Green*-féle megoldás az ún. PFAFFIÁN fogalmán alapszik. Az *Ising*-probléma és az ún. *dominóprobléma* kapcsolatát M. E. FISHER és P. W. KASTELEYN fedezték fel [35], [36]. E kapcsolat segítségével a kérdés visszavezethető a dominóproblémára, amint azt KASTELEYN [37] bebizonyította.

A következő fejezetben a kétdimenziós *Ising*-probléma megoldását ezen az úton fogjuk bemutatni. Ennek során KASTELEYN egy tételére egy új, egyszerűbb bizonyítást adunk.

11. §. A Pfaffián

Az ún. *Pfaffián* (l. pl. [38]) a determinánshoz hasonló fogalom: egy (párosrendű, antiszimmetrikus) mátrixhoz az alábbi módon hozzárendelt számot jelenti: Legyen $A=[a_{ij}]$ egy párosrendű, antiszimmetrikus mátrix, azaz legyen $a_{ji}=-a_{ij}$, és $a_{ii}=0$ $(1\leqq i,j\leqq 2N)$. Az A mátrix pfaffiánját, melyet $P(A)$-val jelölünk, a következőképpen definiáljuk:

$$P(A) = \sum (-1)^{I(p_1,\dots,p_N)} a_{p_1 p_2} a_{p_3 p_4} a_{p_{2N-1} p_{2N}}, \tag{11.1}$$

ahol az összegezés az $1, 2, \dots, 2N$ számok összes olyan $p_1, p_2, \dots, p_{2N}$ permutációira terjesztendő ki, amelyek az alábbi feltételeknek tesznek eleget:

$$p_{2i-1}<p_{2i} \qquad i=1,2,\dots,N \tag{11.2}$$

$$p_1<p_3<\dots<p_{2N-1},$$

és $I(p_1 \dots, p_{2N})$ a $p_1, p_2, \dots, p_{2N}$ permutáció inverzióinak számát jelenti. Például ha $N=1$ $P(A)=a_{12}$, ha $N=2$

$$P(A)=a_{12}a_{34}-a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23}$$

ha $N=3$

$$\begin{aligned}P(A)=&a_{12}(a_{34}a_{56}-a_{35}a_{46}+a_{36}a_{45})\\&-a_{13}(a_{24}a_{56}-a_{25}a_{46}+a_{26}a_{45})\\&+a_{14}(a_{23}a_{56}-a_{25}a_{36}+a_{26}a_{35})\\&-a_{15}(a_{23}a_{46}-a_{24}a_{36}+a_{26}a_{34})\\&+a_{16}(a_{23}a_{45}-a_{24}a_{35}+a_{25}a_{34}).\end{aligned}$$

Ha A egy $2N$-edrendű mátrix, $P(A)$ kifejtése $1\cdot 3\cdot 5 \ldots 2N-1 = (2N-1)!!$ tagból áll.

A pfaffiánt szokták az $\setminus a_{ij}|$ szimbólummal is jelölni, vagy úgy felírni, mint a determinánst, azzal az eltéréssel, hogy csak azokat az a_{ij} tagokat írják fel, melyekre $i \leqq j$ (mivel csak ezek fordulnak ténylegesen elő a pfaffiánban); például $N=2$-re

$$P(A)=\left|\begin{matrix}a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ & a_{23} & a_{24}\\ & & a_{34}\end{matrix}\right|.$$

A pfaffián fogalmát A. CAYLEY vezette be, a *Pfaff*-féle problémával kapcsolatban. A pfaffiánok kiszámítását a következő tétel könnyíti meg:

TÉTEL. *Ha $D(A)$ jelöli az A antiszimmetrikus mátrix determinánsát, akkor, ha A páratlan rendű, $D(A)=0$, míg ha A páros rendű, akkor*

$$D(A)=P^2(A),$$

ahol $P(A)$ az A mátrix pfaffiánja.

E tétel bizonyítása megtalálható pl. [39]-ben, ezért azt itt nem részletezzük. (BEKE MANÓ a pfaffiánt „Pfaff-féle alak"-nak nevezi; a pfaffián kifejezést rövidsége miatt tartjuk jobbnak.) Még csak azt jegyezzük meg, hogy a pfaffiánokat újabban a kvantum-térelméletben is felhasználják (lásd [40]).

12. §. A dominó-probléma

Vizsgáljunk egy téglalapot, amelynek oldalai az n és m pozitív egész számok. Ezt a téglalapot osszuk fel oldalaival párhuzamos egyenesekkel $n\cdot m$ egységnyi oldalú négyzetre. Egy ilyen négyzetrácsot a következőkben $n\times m$-es *általános sakktáblá*nak fogunk nevezni. Nevezzünk *dominó*nak egy téglalapot, amelynek élei 1 és 2 egység hosszúságúak. Egy $n\times m$-es sakktábla nyilván akkor és csak akkor fedhető le maradéktalanul egymást nem fedő dominókkal, ha $n\cdot m$ páros.

Ha ez a feltevés teljesül, akkor általában ez a lefedés sokféleképpen valósítható meg. Jelölje $\Delta(n, m)$ az $n\times m$-es sakktábla dominókkal való lefedéseinek számát. A dominóprobléma a $\Delta(n, m)$ függvény meghatározására vonatkozik. E fejezetben megmutatjuk, hogy $\Delta(n, m)$ antiszimmetrikus mátrixok pfaffiánjaival fejezhető ki. Valójában ennél többet bizonyítunk be. Jelölje $\Delta(n, m, r, s)$ az $n\times m$-es sakktábla azon lefedéseinek számát, amelyben r dominó helyezkedik el úgy, hogy hosszabbik oldala a sakktábla n hosszúságú oldalával párhuzamos, és s dominó úgy, hogy hosszabbik oldala a sakktábla m hosszúságú oldalával párhuzamos. Nyilván $s=\frac{nm}{2}-r$. A következőkben meg fogjuk határozni a $\Delta(n, m, r, s)$ számokat, pontosabban a

$$\Gamma(n, m, z_1, z_2) = \sum_{r+s=\frac{nm}{2}} \Delta(n, m, r, s) z_1^r z_2^s$$

(kettős) generátorfüggvényt; ebből speciális esetként nyerjük $\Delta(n, m)$-et, hiszen

$$\Delta(n, m) = \sum_{r+s=\frac{nm}{2}} \Delta(n, m, r, s) = \Gamma(n, m, 1, 1). \tag{12.1}$$

A $\Gamma(n, m, z_1, z_2)$ generátorfüggvény értékét mint egy antiszimmetrikus mátrix pfaffiánját fogjuk kifejezni. A sakktáblát úgy képzeljük elhelyezve, hogy vízszintes oldalának hossza n, a függőleges oldalának hossza m. Számozzuk meg az $n \times m$-es sakktábla „kockáit" oly módon, hogy a sakktábla legalsó sorában álló kockákat balról jobbra haladva rendre az $1, 2, \ldots, n$ számokkal számozzuk meg, a sakktábla alulról második sorában álló kockákat ugyancsak balról jobbra haladva az $n+1, \ldots, 2n$ számokkal számozzuk meg, s.í.t., végül a legfelső sor elemeit balról jobbra haladva az $(m-1)n+1, \ldots, mn$ számokkal számozzuk meg. Ezek után definiáljuk az (a_{ij}) nm-ed rendű mátrixot a következőképpen:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha az } i \text{ és } j \text{ sorszámú kockák a sakktáblán nem szomszédosak és ha } i=j, \\ z_1, & \text{ha } i<j \text{ és az } i \text{ és } j \text{ sorszámú kockák a sakktáblán szomszédosak és ugyanabban a sorban vannak (tehát ha } i=kn+l \text{ és } j=kn+l+1 \text{ ahol } 0 \leqq k \leqq m-1 \text{ és } 1 \leqq l \leqq n-1) \\ (-1)^i z_2, & \text{ha } i<j \text{ és az } i \text{ és } j \text{ sorszámú kockák a sakktáblán szomszédosak és ugyanabban az oszlopban vannak (tehát, ha } i=kn+l \; j=(k+1)n+l, \text{ ahol } 0 \leqq k \leqq m-2 \; 1 \leqq l \leqq n), \\ -a_{ji}, & \text{ha } j>i. \end{cases} \tag{12.2}$$

Az $A_{n,m}(z_1, z_2) = (a_{ij})$ nm-rendű mátrix nyilván antiszimmetrikus. Mivel nm feltevés szerint páros, n és m közül legalább az egyike páros. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy n páros. Mármost azt fogjuk bebizonyítani, hogy a (12. 1) alatt definiált generátorfüggvény egyenlő a (12. 2) által definiált mátrix pfaffiánjával, tehát

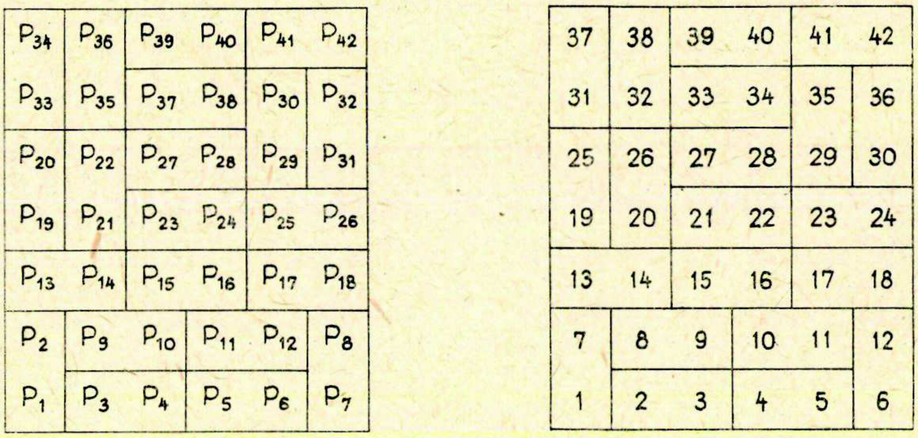
$$\Gamma(n, m, z_1, z_2) = P(A_{n,m}(z_1, z_2)). \tag{12.3}$$

E tétel KASTELEYNtől [37] származik.

Alábbiakban egy új, egyszerű bizonyítást adunk (12. 3)-ra.

(12. 3) *bizonyítása.* Legyen $N = \frac{nm}{2}$ és n legyen páros. Tekintsük az $n \times m$-es sakktábla egy tetszőleges olyan lefedését dominókkal, amelyben r dominó vízszintesen, és $s = N - r$ dominó függőlegesen helyezkedik el. Minden egyes dominó két szomszédos kockát fed le. A dominók által lefedett kocka-párok sorszámai legyenek a $(p_1, p_2), (p_3, p_4), \ldots, (p_{2N-1}, p_{2N})$ számpárok, ahol $p_{2i-1} < p_{2i}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ és $p_1 < p_3 < \ldots < p_{2N-1}$. Másszóval a p_i számokat úgy definiáljuk, hogy elindulunk a sakktábla bal alsó sarkából, végighaladunk a legalsó soron balról jobbra; az első dominó első kockájának, mellyel találkozunk, a sorszáma lesz p_1 (tehát mindig $p_1 = 1$) és ezen dominó másik kockájának sorszáma lesz p_2 (tehát $p_2 = 2$ vagy $p_2 = n+1$); a következő dominó kockáinak sorszámai lesznek

p_3 és p_4 (tehát ha $p_2=2$, akkor $p_3=3$, míg ha $p_2=n+1$, akkor $p_3=2$), s.í.t... Ha az első sor végére értünk, az alulról második, azután a harmadik, stb. soron haladunk végig, mindig balról jobbra. A 7. ábra egy 6×7-es sakktábla egy dominókkal való lefedésére vonatkozólag megmutatja a p_i számok értelmezését.

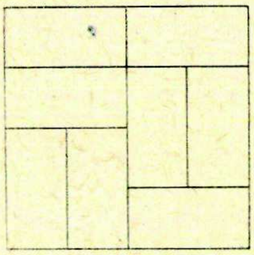


7. ábra

Így tehát az $n\times m$-es sakktábla minden egyes dominókkal való lefedéséhez egyértelműen hozzárendeltük a $P(A_{nm}(z_1, z_2))$ pfaffián kifejtésének egy tagját, ti. az

$$a_{p_1 p_2} a_{p_3 p_4} \ldots a_{p_{2N-1} p_{2N}} \tag{12.4}$$

tagot; megfordítva, nyilván minden ilyen kifejtési taghoz egyértelműen hozzátartozik az $n\times m$-es sakktábla egy dominókkal való lefedése. A 8. ábrán látható pl. a 4×4-es sakktáblának az $a_{15}a_{26}a_{34}a_{711}a_{812}a_{910}a_{1112}a_{1314}a_{1516}$ kifejtési taghoz rendelt dominókkal való lefedése:



8. ábra

(12. 2)-ből nyilvánvaló, hogy az $n\times m$-es sakktábla egy dominókkal való lefedéséhez tartozó (12. 4) kifejtési tag értéke $\pm z_1^r, z_2^s$, ahol r jelenti a lefedés vízszintes helyzetű dominóinak számát és $s=N-r$ a függőleges állású dominóinak a számát. Ahhoz, hogy (12. 3)-at bebizonyítsuk, csak azt kell kimutatnunk, hogy a (12. 4) alatti szorzatokat a pfaffián definíciója szerinti előjellel ellátva minden tag pozitív előjelű lesz, azaz

$$(-1)^{I(p_1, \ldots, p_{2N})} a_{p_1 p_2} a_{p_3 p_4} \ldots a_{p_{2N-1} p_{2N}} = z_1^r z_2^s . \tag{12.5}$$

Mivel

$$a_{p_1 p_2} \ldots a_{p_{2N-1} p_{2N}} = (-1)^{\sum\limits_{p_{2i}-p_{2i-1}=n} p_{2i-1}} z_1^r z_2^s \tag{12.6}$$

tehát csak azt kell kimutatnunk, hogy

$$(-1)^{I(p_1, \ldots, p_{2N})} = (-1)^{\sum\limits_{p_{2i}-p_{2i-1}=n} p_{2i-1}} \tag{12.7}$$

Másszóval azt kell kimutatni, hogy egy dominólefedéshez tartozó $p_1, \ldots, p_{2N}$ permutáció inverzióinak számának paritása megegyezik a függőlegesen álló dominók alsó kockájához tartozó p_{2i-1} számok összegének paritásával. Mivel n feltevés szerint páros, a sakktábla balról számított első, harmadik, ..., $n-1$-edik oszlopában vannak az összes páratlan sorszámú kockák. Így tehát $\sum_{p_{2i}-p_{2i-1}=n} p_{2i-1}$ paritása megegyezik a balról számítva páratlan oszlopindexű oszlopokban (nevezzük ezeket röviden páratlan oszlopoknak) elhelyezkedő dominók számával. E számot jelölhetjük α-val; ekkor tehát $\alpha \equiv \sum_{p_{2i}-p_{2i-1}=n} p_{2i-1} \bmod 2$. Másrészt az inverziók számának paritásának meghatározásánál szorítkozhatunk a függőleges állású dominókhoz tartozó p_i számoknak a náluk kisebb számokkal való inverzióinak összeszámlálására; ugyanis tekintsünk egy vízszintes állású dominót; ennek két kockája szükségképpen két konzekutív számmal van megszámozva és így e két szám az őket megelőző, náluk nagyobb számokkal ugyanannyi inverziót alkot, és így együtt az inverziók összegéhez páros számú inverzióval járulnak hozzá, ami az inverziószám paritását nem befolyásolja. Ami a függőleges állású dominókat illeti, ezeknek megfelelő számpárok $(p, p+n)$ alakúak és a $p+n$-nél nagyobb számok a p_i sorozatban $p+n$-et nyilván nem előzhetik meg. Számolni tehát csak azokat az inverziókat kell, amelyeket egy függőlegesen álló dominó alsó kockájához rendelt szám alkot az őt a p_i sorozatban megelőző és nála nagyobb számokkal.

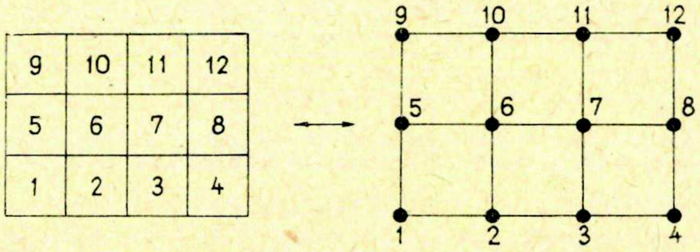
E számok nem lehetnek mások, mint a függőleges dominótól balra, vele egy magasságban elhelyezkedő függőleges dominók felső kockáihoz rendelt számok, valamint a függőleges dominótól jobbra, nála eggyel mélyebben álló dominók (amelyek felső kockája van tehát egy vonalban a szóban forgó dominó alsó kockájával), felső kockáihoz rendelt számok. Ezek számát kell tehát minden függőleges dominóra összeszámolni, és megvizsgálni, hogy hány olyan dominó van — jelöljük ezek számát β-val —, amelyekre e szám páratlan. Például a 7. ábrán a $p_{35}=32$ szám inverzióban van $p_{34}=37$-tel, továbbá $p_{30}=35$-tel és $p_{32}=36$-tal.

Be fogjuk bizonyítani, hogy $\alpha=\beta$. Mivel, mint láttuk $\beta \equiv I(p_1, \ldots, p_{2N}) \bmod 2$, ebből már (12. 7) következik. Nevezzük δ-dominónak az olyan függőleges állású dominót, amelynek alsó kockájának sorszáma páratlan sok, nála nagyobb számmal alkot inverziót a p_i permutációban. Azt állítjuk, hogy egy δ-dominó mindig páros oszlopindexű oszlopban (röviden: páros oszlopban) helyezkedik el. Ugyanis, ha d_1 jelöli a δ-val egy sorban, tőle balra álló, függőleges dominók számát és d_2 a δ-nál egy kockával lejjebb és tőle jobbra álló, függőleges dominók számát, úgy feltevés szerint d_1+d_2 páratlan, tehát d_1 és d_2 közül pontosan az egyik páratlan. Mármost ha δ alsó kockája a j-edik sorban van, akkor a j-edik és $j-1$-edik sor egy-egy kockáját lefogó függőleges dominók száma páros kell, hogy legyen, mert az alsó $j-1$ sor által alkotott téglalapban összesen páros sok kocka van és mivel a teljesen e téglalapban fekvő dominók egyenként 2 kockát, tehát összesen páros sok kockát fednek le, az ebből a téglalapból kinyúló dominók száma is páros kell, hogy legyen. Ebből már következik, hogy ha d_2 páros és d_1 páratlan, akkor δ-tól balra is páros sok olyan függőleges dominó áll, amely a $j-1$-edik és j-edik sor egy-egy kockáját fedi le, és mivel a j-edik sorban δ-tól balra álló vízszintes dominók együtt páros sok kockát fednek le a j-edik sorból, δ-tól balra páratlan sok oszlop van és így δ maga páros oszlopban van. Hasonlóképpen látható be az állítás, ha d_1 páros és d_2 páratlan, továbbá az is, hogy minden páros oszlopban álló függőleges dominó δ-dominó.

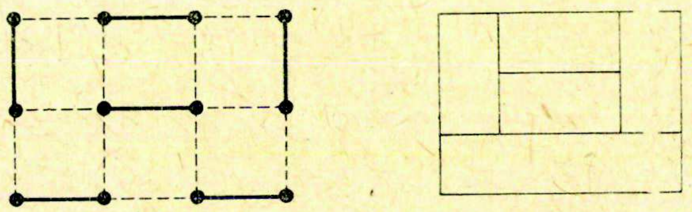
Nevezzük δ'-dominónak a páratlan oszlopban álló függőleges helyzetű dominókat. A mondottak szerint minden függőleges dominó vagy δ-dominó vagy δ'-dominó. Be fogjuk bizonyítani, hogy a δ és δ' dominók száma mindig ugyanakkora; ebből a kívánt állítás már következik. Ugyanis minden vízszintes dominó egy kockát fed le egy páros oszlopból és egyet egy páratlan oszlopból. Mivel a páros és a páratlan oszlopokban összesen ugyanannyi kocka van (tekintve, hogy az oszlopok száma, n, feltevés szerint páros), tehát a függőleges dominók együttvéve ugyanannyi kockát fednek le a páros oszlopokból, mint a páratlan oszlopokból, tehát ugyanannyi dominó van a páros oszlopokban, mint a páratlan oszlopokban. Ennélfogva a δ és δ' dominók száma ugyanakkora. Tehát ezzel (12. 7)-et és így (12. 3)-at bebizonyítottuk.

KASTELEYN másféle síkbeli rácsokra is megmutatta, hogy a rács dominóval való lefedéseinek száma kifejezhető alkalmasan választott mátrixok pfaffiánjai segítségével. Mi itt nem foglalkozunk azonban tovább e kérdéssel, hiszen nem célunk itt az *Ising*-modellek elméletének részletes ismertetése, hanem csak az, hogy megmutassuk, milyen típusú kombinatorikai problémák merülnek fel ennek kapcsán. Ezért csak arra szorítkozunk, hogy röviden vázoljuk a következő fejezetben az *Ising*-probléma összefüggését a dominó-problémával.

Mielőtt erre rátérnénk, megjegyezzük, hogy az általános dominóprobléma a gráfelmélet nyelvén a következőképpen fogalmazható meg. Legyen adva egy tetszőleges, páros számú szögpontból álló G gráf. A G gráf 1-fokú faktorának nevezzük a G gráf éleinek egy olyan E részhalmazát, hogy G bármely szögpontja az E-hez tartozó élek közül pontosan egyhez tartozik hozzá. A dominó-probléma egy megadott gráfra ekvivalens az illető gráf 1-rendű faktorai számának meghatározásával. A fentiekben tárgyalt, a sakktáblára vonatkozó dominó-probléma az említett gráfelméleti problémának úgy válik speciális esetévé, ha a G gráfot úgy konstruáljuk meg, hogy a sakktábla minden kockájának megfeleltetünk G-ben egy szögpontot és a szomszédos kockáknak megfelelő pontokat és csak azokat kötjük össze éllel. Például a 4×3-as sakktáblának a 9. ábrán látható gráf felel meg, míg a 10. ábra e sakktábla egy dominókkal való lefedését és a hozzárendelt gráf meg-



9. ábra



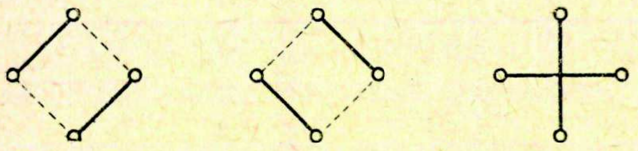
10. ábra

felelő 1-fokú faktorát ábrázolja (az 1-fokú faktor élei vastag vonallal vannak kihúzva, a többi él csak pontozva van).

Tetszőleges gráf esetére az 1-fokú faktor létezésének megállapítása sem könnyű kérdés. Egy hasznos szükséges és elégséges feltételt TUTTE adott meg [41]. TUTTE tétele szerint egy gráfnak akkor és csak akkor van elsőfokú faktora, ha a gráfból tetszőleges módon elhagyva r pontot ($r=0, 1, \ldots$), a megmaradó gráf összefüggő komponensei közül a páratlan számú pontból álló komponensek száma kisebb $r+1$-nél. Nemrégiben ERDŐS PÁLlal bebizonyítottuk hogy egy n számú pontból álló véletlen gráfnak, amennyiben elegendő számú éle van ahhoz, hogy majdnem biztosan összefüggő legyen, $n\to\infty$-re majdnem biztosan van elsőfokú faktora ([42]). Más szóval, ha találomra kiválasztunk egyet az összes n (számozott) szögpontú és $\frac{1}{2}n\log n+\omega(n)\cdot n$ élű gráfok közül és q_n jelöli annak valószínűségét, hogy e gráfnak van elsőfokú faktora, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q_n=1$, feltéve, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\omega(n) = +\infty$.

13. §. Az Ising-modell és a dominó-probléma kapcsolata

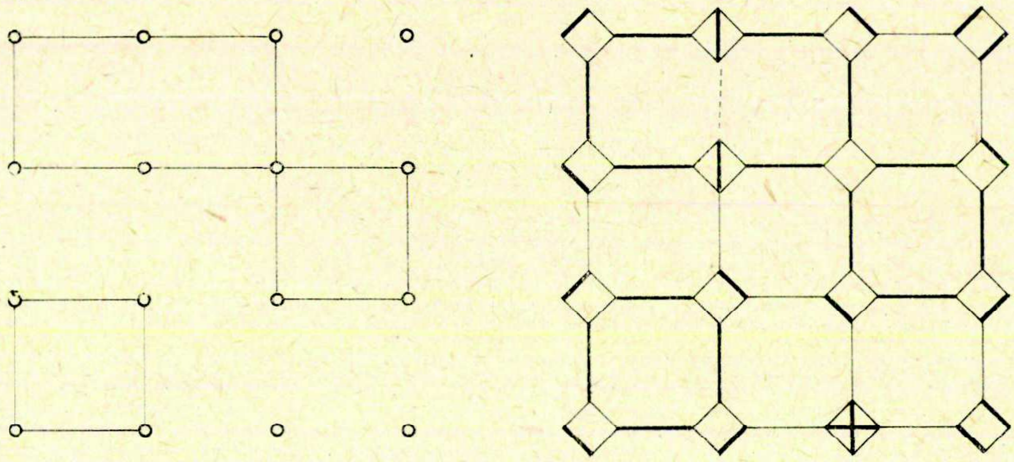
Láttuk, hogy az *Ising*-probléma megoldása visszavezethető egy rács rácspontjaiból alkotható azon zárt gráfok megszámlálására, amelyek előírt számú élt tartalmaznak és minden élük két szomszédos rácspontot köt össze. Mármost egy négyzetrács minden egyes rácspontja helyébe helyezzünk egy „négypólust”, vagyis egy négyzetet, amelynek csúcsai a rácspontba befutó négy élen helyezkednek el. E négyzetnek képzeljük el berajzolva a két átlóját is. A két átló metszéspontját nem tekintjük rácspontnak; másszóval a két átlót úgy képzeljük el, hogy azok nem metszik egymást; ez persze a síkban nem valósítható meg, csak ha az egyik átlóval kilépünk a térbe és az áthidalja a másikat. A rácspontok helyére rajzolt négyzet négy csúcsát nevezzük el északi, keleti, déli és nyugati pólusnak. Ilyen módon egy új rácsot kaptunk, amelyben minden pontban négy él találkozik. Az ábra, amelyet nyerünk, hasonlít a fürdőszobákban gyakran alkalmazott csempepadló mintájára, ezért azt röviden fürdőszoba-padló gráfnak nevezzük. Mármost az eredeti rács bármely zárt gráfjához, amelynek élei mind az eredeti rács szomszédos pontjait kötik össze, hozzárendelhető a fürdőszoba-padló gráf egy elsőfokú faktora, tehát e zárt gráfok számának meghatározása egy dominóproblémára vezethető vissza. Az elsőfokú faktort a következőképpen nyerjük. Ha a P és Q szomszédos pontok a rácsban össze vannak kötve egy éllel, akkor a P pontnak megfelelő négypólusnak és a Q pontnak megfelelő négypólusnak a szomszédos csúcsait összekötjük egy éllel; ha az eredeti rácsban egy rácspontból délre (északra) és keletre (nyugatra) vezet egy-egy él, összekötjük a rácspontnak megfelelő négypólus északi (déli) és nyugati (keleti) pólusát. Ha egy rácspontból északra és délre (ill. keletre és nyugatra) vezetett ki két él, a megfelelő négypólusnak a keleti és nyugati (ill. északi és déli) pólusait kötjük össze. Ha egy rácspontból négy él vezetett ki, a megfelelő négypólus pólusai között nem létesítünk összeköttetést. Végül, ha a rács egy pontja izolált volt, a megfelelő négypólusban két közös pont nélküli élt húzunk meg; ez persze háromféle módon lehetséges (l. 11. ábra).



11. ábra

Akárhogyan is hajtjuk ezt végre, a fürdőszoba-padló gráfnak egy elsőfokú faktorát nyerjük. (Az izolált pontok miatt fellépő többértelműséget egy ügyes fogással lehet ellensúlyozni: azáltal, hogy a faktoroknak előjelet tulajdonítunk, mégpedig úgy, hogy a 11. ábrán szereplő első két lehetőségnek pozitív, a harmadiknak negatív előjelet adunk; így az összeszámlálásnál helyreáll az egy-egyértelmű megfeleltetés.)

A 12. ábrán egy zárt rácspont-gráfnak megfelelő fürdőszoba-padló gráf egyik lehetséges elsőfokú faktorát mutatjuk be:



12. ábra

Az ismertetett megfeleltetés segítségével az *Ising*-problémában fellépő gráfleszámlálási feladatok visszavezethetők mátrixok pfaffiánjának a kiszámítására. Ez utóbbi feladat viszont determinánsok kiszámítására vezet.

A fellépő determinánsok explicit alakban kiszámíthatók; a további részletekbe itt nem megyünk bele, csak utalunk a már idézett munkákra, különösen [3]-ra és [4]-re.

Annak ellenére, hogy az *Ising*-problémakört és az azzal kapcsolatban felmerülő kombinatorikai problémákat csak vázlatosan ismertettük, reméljük, sikerült azért némi bepillantást nyújtani ebbe a fizikai alkalmazásai szempontjából fontos és a felhasznált matematikai módszerek eredetiségét tekintve is rendkívül érdekes kérdéskomplexumba.

Reméljük, hogy a felsorolt példákkal sikerült némi képet adni a kombinatorikus analízis néhány újabb problémaköréről és egyes módszereiről. E kép persze a legcsekélyebb mértékben sem tarthat igényt arra, hogy teljes legyen. E dolgozat III. részében e kép teljesebbé tétele érdekében a kombinatorika néhány más, szintén gyors fejlődésben lévő és az érdeklődés középpontjában álló irányát kívánjuk ismertetni.

IRODALOMJEGYZÉK*

[25] E. R. Berlekamp, *Invertible arrays, Convolutional codes and noise bursts* (sajtó alatt).
[26] H. B. Mann, *Analysis and design of experiments*, Dover, New York, 1949.
[27] E. N. Gilbert, Latin squares which contain no repeated digrams, *SIAM Review* **7** (1965) 189—198.

*Ez az irodalomjegyzék folytatása e dolgozat I. része (*MTA III. Oszt. Közl.* **16** (1966) 77—105) irodalomjegyzékének.

[28] R. C. Bose—S. S. Shrikande—E. T. Parker, Further results on the construction of mutually orthogonal latin squares and the falsity of Euler's conjecture, *Canadian J. of Math.* **12** (1960) 189—203.
[29] E. T. Parker, Orthogonal latin squares, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA,* **45** (1959) 859—862.
[30] G. F. Newell—E. W. Montroll, On the theory of the Ising-modell of ferromagnetism, *Review of Modern Physics* **25** (1963) 353—389.
[31] L. O. Onsager, Chrystal statistics, I. A two-dimensional model with an order-disorder transition, *Phys. Rev.* **65** (1944) 117—149.
[32] M. Kac—I. C. Ward, A combinaforial solution of the two-dimensional Ising-model, *Phys. Rev.* **88** (1952) 1332—1337.
[33] S. Sherman, Combinatorial aspects of the Ising-model for ferromagnetism I., *J. Math. Phys.* **1** (1960) 202—217.
[34] C. A. Hurst—H. S. Green, New solution of the Ising-problem for a rectangular lattice, *J. Chem. Phys.* **33** (1960) 1059—1062.
[35] M. E. Fisher, Statistical mechanics of dimers on a plane lattice, *Phys. Rev.* **124** (1961) 1664—1672.
[36] P. W. Kasteleyn, The statistics of dimers on a lattice, *Physica* **27** (1961) 1209—1225.
[37] P. W. Kasteleyn, Dimer statistics and place transitions, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 287—293.
[38] A. C. Aitken, *Determinants and matrices,* Oliver and Boyd, 1948, Edinburgh, p. 50.
[39] Beke Manó, *Determinánsok,* Athenaeum, Budapest, 1916, 135—138. o.
[40] E. R. Caianello, Theory of coupled quantized fields, *Nuovo Cimento,* **14** (1959) Supp. 177—191.
[41] W. T. Tutte, The factorization of linear graphs, *Journal of the London Math. Soc.* **22** (1947) 107—111.
[42] Erdős P.—Rényi A., On the existence of a factor of degree one of a connected random graph, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (sajtó alatt).
[43] B. L. van der Waerden, *Z. Physik* **118** (1941) 473.
[44] T. Muir, *A treatise on the theory of determinants,* 1928. Ch. XX.
[45] B. Gordon., Sequences in groups with distinct partial products, *Pacific. Journ. of Math.* **11** (1961) 1309—1313.
[46] C. St. I. A. Nash—Williams, Decomposition of finite graphs into forests, *Journal London Math. Soc.* **39** (1964) 12.
[47] L. W. Beineke, Decomposition of complete graphs into forests, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **9** A (1964) 589—593.

(Beérkezett: 1965. XI. 10.)

NEW METHODS AND RESULTS IN COMBINATORIAL ANALYSIS

by

Alfréd Rényi

Summary

One of the most characteristic features of the recent development of mathematics is a renaissance of combinatorics. The new development of combinatorics brought forward a great wealth of particular results but relatively few general methods. The main aim of this paper is to call the attention to some recent results in combinatorial analysis which seem to contain the germs of new general methods.

§ 1—4 deal with the partitions of finite sets, with special emphasis on the method of G. C. Rota, and on *Stirling's* numbers and a generalization of these numbers.

§ 5—6 deal with counting problems concerning (labelled) trees and with *Prüfer*'s method of counting. § 7 deals with the distribution of (labelled) trees according to their height above a given point; a short account of the recent results of G. Szekeres and the author (which will be published in detail elsewhere) is given. § 8 discusses a recent generalization by E. R. Berlekamp of a property of *Pascal*'s triangle. § 9 deals with Latin squares, especially perfect Latin squares. § 10—12 deal with the *Ising* modell of ferromagnetism, Pfaffians and the dimer-problem. The paper will be continued.