Levelek a valószínűségről*

1. levél

Paris, Faubourg Saint Michel
1654 október 28.

Pierre Fermat úrnak,

Toulouse

Uram,

Közös barátunk, Carcavi úr tegnap értesített, hogy Touloseba utazik és kérdezte, nem kívánok-e Önnek levelet küldeni ? Természetesen nem mulasztottam el a kedvező alkalmat, de csupán arra volt időm, hogy néhány sort írjak. Mára azonban kiderült, hogy Carcavi úr két nappal elhalasztotta utazását: így lehetőségem nyílt, hogy részletesen is írjak Önnek.

Most, hogy teljesen tisztázódtak azon kérdések, melyeket de Méré lovag vetett fel alig egy éve, amikor vele, Roannez herceggel és Milton úrral Poitou-ba utaztunk, meg kell, hogy mondjam, hogy a szóbanforgó problémák megoldásánál is jobban örülök annak, hogy az ezekről való levelezés megszerezte nekem az Ön barátságát. E barátságot mindennél többre becsülöm, mégpedig nemcsak azért, mert Önt tartom ma Európában a legelső geométernek, hanem mert leveleiből olyan embert ismertem meg, akinek barátságára királyok is büszkék lehetnének. Így hát a derék lovag kérdései — ha egyébként nem is lettek volna érdekesek — nekem felbecsülhetetlen szolgálatot tettek. Azonban éppen azért, mert az Ön barátsága olyan fontos nekem, szeretném megosztani Önnel minden gondolatomat: ezért érzem szükségét, hogy elmondjam, miért érdekeltek engem ezek a kérdések annyira.

Az ember szerintem arra született, hogy gondolkozzék — erre való képessége különbözteti meg az állatoktól, ebben áll emberi méltósága. Kettős végtelenség vesz minket körül: a világegyetem végtelen kiterjedése, amelyhez képest nemcsak magunk, de az egész Föld, sőt a Nap összes bolygóival együtt csak egy csepp a tengerben, és a világ végtelen bonyolultsága, hiszen minden egyes vízcsepp maga is egy külön kis univerzum. E kettős végtelenség között helyezkedünk el mi magunk, akik porszemek vagyunk a csillagokhoz képest, de óriások a vízcseppben nyüzsgő parányi élőlényekhez képest. Akár a csillagokra, akár saját lelkünkbe, akár a múltba, akár a jövőbe tekintünk azonban, sehol sem találunk biztos támpontra. Ha mindazt, amiről azt hisszük, hogy tudjuk, tüzetesebben megvizsgáljuk — figyelmünk gombostűjére tűzzük és logikánt mikroszkópja alá tesszük —, kiderül, hogy semmiben sem lehetünk valóban biztosak. Sovány vigasznak tartom azt, hogy mivel mindezen kérdésekkel eredménytelenül birkózom, ez azt bizonyítja, hogy én „vagyok''. Engem ugyanis nem a a kérdés izgat, hogy vagyok-e, hanem, hogy ki vagyok tulajdonképpen? Erre a kérdésre viszont nem tudnak válaszolni, és ezt a gyötrő bizonytalanságot bizony néha nehezen viselem. el Nem tudjuk, honnan jövünk, mivégre születtünk és hová megyünk. Volna hát számunkra bőven gondolkodni való. De vajon ezen gondolkodik-e az emberek többsége? Szó sincs róla: csak a háborúskodáson, a pénzen, az élvezeteken, a szórakozáson, a játékon jár az eszük. A játékost persze nagyonis megértem: hiszen a játék azáltal teszi boldoggá az embert, hogy a játékos elfededkezik minden gondjáról, bajáról. De vajon valóban jó-e ez neki? Hiszen ilymódon elfeledkezik önmagáról is, a játék mákonyként elkábítja és eltereli figyelmét a valódi kérdésekről. Persze az nem baj, ha valaki néha rövid időre belemerül a játék feledtető, frissítő fürdőjébe, de nem szabad, hogy ebben megrekedjen. Mármost a szerencsejátékok csodálatos törvényszerűségeiről való gondolkodást olyan eszköznek vélem, amely segíthet abban, hogy a játékost kiszabadítsa a játék bűvöletéből és visszavezesse a gondolkodás, a magáraeszmélés világába. Ebben látom a játék „méltányosságára'' vonatkozó matematikai kérdések vizsgálatának egyik — bár távolról sem a fő — hasznát.

A nyomasztó bizonytalanság, amelyről az imént beszéltem, részben onnan származik, hogy az emberek azt hiszik, hogy ha valamit nem tudnak biztosan — márpedig biztosan szinte semmit nem tudnak —, akkor nem tudnak semmit. Gondolatmenetem kiinduló pontja éppen az, hogy ez tévedés. A részleges tudás is tudás, a részleges bizonyosság is határozott értékkel bír, különösen, ha tudom azt, hogy e bizonyosság milyen fokú. „Hogyan, hát lehet a bizonyosság fokát mérni, számmal kifejezni?'' — kérdezheti valaki. Valóban lehet — válaszolom erre —, minden játékos ezt teszi. Amikor egy játékos egy kockát feldob, nem tudhatja, milyen számot fog dobni, de azért mégis tud valamit: azt, hogy mind a 6 számnak egyenlő esélye van. Ha a teljes bizonyosságot választjuk egységnek, a hatos dobásnak bizonyosságát (és ugyanígy a többi 5 szám dobásának bizonyosságát) $^1/_6$ fejezi ki. Ha egy kockát négyszer egymás után dobunk fel, akkor mint már de Méré lovag észrevette, előnyös arra fogadni — egyenlő tétek mellett — hogy legalább egyszer 6-ost

* Alábbiakban részleteket közlünk Rényi Alfréd ugyanezen címen az Akadémiai Kiadó kiadásában rövidesen megjelenő könyvéből. Ismeretes, hogy a valószínűségszámítás Pascal és Fermat levelezésével vette kezdetét. A ránk maradt levelek azonban csak két, a kockajátékra vonatkozó konkrét valószínűségszámítási feladattal foglalkoznak. Rényi Alfréd abból a hipotézisből indult ki, hogy Pascal és Fermat tudatában voltak annak, hogy a valószínűségszámítás jelentősége messze túlnő az ilyen feladatokon és foglalkoztak a tudományág elvi kérdéseivel is. Pascal fennmaradt munkáira támaszkodva próbálta meg rekonstruálni levelezésük feltételezett folytatását.

dobunk: ez szerintem azt jelenti, hogy azon esemény bizonyosságának, hogy a négy dobás során legalább egyszer 6-ost dobjunk, a foka $^1/_2$-nél nagyobb. Ha egy esemény bekövetkezésének és be nem következésének esélyei pontosan egyenlőek, mint például a pénzfeldobásnál a fej és írás esélyei, azt mondom, hogy az esemény bizonyosságának foka éppen $^1/_2$, és ugyanennyi az esemény be nem következése bizonyosságának foka. Persze az, hogy a bizonyos esemény bizonyossági fokát 1-nek választom, tulajdonképpen önkényes: lehetne ehelyett más számot is választani, pl. 100-at, és akkor a véletlentől függő események bizonyossági fokát százalékban kapnánk meg. Lehetne esetenként más-más számot választani; ha például a kockadobásnál a teljes bizonyosságnak a 6 számot feleltetnénk meg, az egyes számok bizonyossági foka 1-nek adódnék. Legtermészetesebbnek azonban azt érzem, hogy a teljes bizonyosságnak az 1 számot feleltessük meg, és így minden véletlen esemény bizonyossági fokát azzal mérjük, hogy az hányadrésze a biztos esemény teljes bizonyosságának. A lehetetlen eseménynek a bizonyossági foka természetesen 0 lesz; ha tehát egy véletlen esemény bizonyossági foka pozitív szám, ez azt jelenti, hogy az illető esemény bekövetkezése lehetséges — habár ennek esélyei esetleg rendkívül csekélyek. Hadd jegyezzem meg rögtön, hogy a bizonyosság fokának külön elnevezést adtam: *valószínűség*nek nevezem. A szó megválasztásán sokat töprengtem és végül ezt találtam a legkifejezőbbnek. A mindennapi szóhasználattal ez, úgy érzem, teljes összhangban van. Persze a mindennapi beszédben csak azt szoktuk mondani valamiről, hogy „valószínű", vagy hogy „nem valószínű", illetve egy eseményről azt, hogy „valószínűbb", mint a másik. Én viszont abból az alapfeltevésből indulok ki, hogy minden olyan eseménynek, amelynek bekövetkezésében nem lehetünk biztosak, de nem is tekinthetjük azt kizártnak, másszóval minden olyan eseménynek, amely a véletlentől függően be is következhet meg nem is, a valószínűsége egy meghatározott — nulla és egy közé eső — számmal fejezhető ki. Azoknak az eseményeknek, amelyeket a mindennapi szóhasználat szerint valószínűnek nevezünk, a valószínűsége 1-hez (a teljes bizonyosság valószínűségéhez) van közel, míg azoknak az eseményeknek, amelyeket a mindennapi életben valószínűtlennek nevezünk, a valószínűsége nullához (a lehetetlen esemény „valószínűségé"-hez) van közel.

A lényeg — mint mondottam — az, hogy a részleges tudásnak is van értéke, de csak ha meg tudjuk mondani, hogy az milyen fokú; ha egy eseménynek ismerjük számszerűen a valószínűségét, akkor arról tudunk valami határozottat annak ellenére, hogy az tulajdonképpen bizonytalan. A részleges bizonyosságot tehát meg kell becsülni, csak éppen túlbecsülni nem szabad és nem szabad a teljes bizonysággal összetéveszteni. Montaigne — akinek Esszéi minden más könyvnél kedvesebbek számomra, habár magamban gyakran vitatkozom vele — ezt úgy fejezte ki, hogy „Meggyülöltetik velem a valószínű dolgokat azok, akik ezeket bizonyosnak állítják". Egyébként Montaigne a szívemből beszél. Sokszor előfordult, hogy barátaim meg akartak valamiről győzni, amivel én — ha nem is maradéktalanul — de nagyjából és egészéből, bizonyos fenntartásokkal egyetértettem; ők azonban azt erőltették, hogy mindenben és minden fenntartás nélkül az ő álláspontjukat fogadjam el. A vita eredménye mindig az lett, hogy álláspontjaink még jobban eltávolodtak egymástól, mert még arról is, amiről eleinte azt hittem, hogy egyetértünk, kiderült, hogy másképpen értjük, és úgy váltunk el, mint akiknek szinte mindenben ellentétes az álláspontjuk. Azt hiszem, Montaigne-nak is ilyen élményei lehettek, mert szükségszerűen ez történik mindenkivel, akinél szavak és tettek egyet jelentenek — quibus vivere est cogitare —, ha ilyen helyzetbe kerül. De megint elkalandoztam, hiszen Montaigne-ra csak azért hivatkoztam, hogy ezzel is megmutassam, hogy a valószínűségek számszerű mérésének gondolata, ha új is, de logikus folytatása régóta jól ismert gondolatoknak.

Bizonyára észrevette, hogy a bizonyosság fokának mérésével kapcsolatban én itt hallgatólagosan egy feltevéssel éltem, ugyanis feltettem, hogy a teljes bizonyosság korlátlanul osztható, ugyanúgy, mint a vonal vagy a tér, vagy a számok.

Persze a szerencsejátékoknál csak olyan valószínűségek fordulnak elő, amelyek egész számok hányadosaiként fejezhetők ki, hiszen e játékoknál mindig meg lehet számolni, hogy a játéknak hány különböző, egyformán lehetséges, egymást kizáró kimenetele lehet és bármely, a játék eredményére vonatkozó valószínűsége egyenlő az esemény bekövetkezésére nézve kedvező kimenetelek számának és az összes kimenetelek számának hányadosával. Például, ha egy kockát feldobunk, az összes kimenetelek száma 6, hiszen az eredmény az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok bármelyike lehet és ezek nyilván egyformán lehetségesek. Tehát annak a valószínűsége, hogy a dobott szám 6-os ,$^1/_6$-dal egyenlő, hiszen ha nem 6-ost dobunk, akkor az 1,2,3,4,és 5 számok egyikét dobjuk. A 6-os dobásának és ellentétének valószínűségeinek összege tehát 1. Ez persze nemcsak ebben a példában van így, hanem akármilyen eseményre igaz, hogy az esemény és ellentéte valószínűségeinek összege eggyel egyenlő, hiszen a bizonyosság valószínűsége 1 és ez oszlik meg az esemény és annak ellentéte között. Általában igaz, hogy ha egy esemény több egymást kizáró módon jöhet létre, valószínűsége megoszlik ezen módokon való létrejöveseinek valószínűségei között — pontosan ugyanúgy, mint ahogy, ha egy bizonyos mennyiségű folyadékot több edénybe töltünk szét, az egyes edényekben levő folyadékmennyiségek köbtartalmainak összege kiadja az egész folyadékmennyiség köbtartalmát. Más szavakkal, ha több — ugyanazon játék kimenetelére vonatkozó — egymást kizáró eseményt vizsgálunk, annak valószínűsége, hogy ezen események közül valamelyik (tehát az első, vagy a második, s. i.t.) bekövetkezzék, egyenlő lesz ezen események valószínűségeinek összegével. Ezt a szabályt a valószínűségek összeadási tételének neveztem el.

E teljesen magától értetődő tétel mellett még egy másik általános, valamivel mélyebben fekvő tételt is találtam: a valószínűségek szorzási tételét. Ez a következőképpen szól: Ha egy játékot kétszer játszom és azt kérdezem, mi a valószínűsége annak, hogy egy bizonyos esemény bekövetkezzék az első játszmánál és egy bizonyos másik esemény (amely lehet esetleg azonos az elsővel) bekövetkezzék a második játszmánál, a válasz az, hogy a két esemény valószínűségének szorzatát kell venni. Például, ha a kockát kétszer dobom fel, annak a valószínűsége, hogy sem az első, sem a második alkalommal ne dobjak hatost: $5/6 . 5/6 = 25/36$. Ugyanis a két dobás eredménye 36 különböző, az 1, 2,. . . . ,6 számokból álló számpár lehet, és ezen számpárok közül 25 olyan van, amely nem tartalmazza a hatost. Hasonlóképpen, annak a valószínűsége, hogy 4 dobás közül egyszer se dobjunk hatost $25/36 . 25/36 = 625/1296$, hiszen ez azt jelenti, hogy sem az első két dobás, sem a második két dobás során egyszer sem dobunk hatost. Ennélfogva az ellentétes eseménynek, vagyis, hogy legalább egyszer hatost dobunk, a valószínűsége $1-625/1296 = 671/1296$; így visszajutottunk de Méré lovag első feladatának ismerős megoldásához.

Ezzel el is mondtam a véletlen matematikájának két alaptételét. Azt kérdezhetné Ön, hogy ezek a meggondolások valóban a matematikához tartoznak-e, vagy valamely — matematikai meggondolásokat is felhasználó — más tudományba. Szerintem a matematika egy új ágáról van szó, melyet joggal nevezhetünk a véletlen matematikájának (mint az Akadémiához írt levelemben írtam), de ugyanilyen joggal nevezhetjük *valószínűségszámítás*nak is; e második elnevezés talán még kifejezőbb is, mint az előző.

Nevezzük hát el a tudománynak ezt az új ágát, amelynek célja, hogy a véletlen, bizonytalan dolgokról biztos tudást nyújtson, valószínűségszámításnak. Arra a kérdésre, hogy a valószínűségszámítás valóban a matematika egy ága-e, a válasz persze attól függ, mit értünk matematikán. Ha valaki a matematikán csak annak hagyományos ágait — a geometriát, az aritmetikát és algebrát — érti, akkor persze ebbe a szűkkeblű meghatározásba nem fér bele semmilyen új fejezet. Én azonban e tekintetben Descartes pártján állok, aki azt mondotta, hogy a matematikához kell számítani minden olyan vizsgálatot, amely a rend és a mérték kutatására irányul, függetlenül attól, mi a tárgya, minek a rendjét és mértékét keresi.

Amikor e kérdésekről gondolkoztam, többször is elővettem az Ön leveleit a kockajátékról és igyekeztem a sorok között olvasva kitalálni le nem írt gondolatait; magamban állandóan Önnel vitáztam és sok minden, amit itt leírtam, válasz olyan kérdésekre, amelyeket ezen elképzelt beszélgetések során Ön tett fel nekem. Boldoggá tenne, ha kiderülne, hogy — amint hiszem — ez nem puszta képzelődés részemről, hanem — ha nyersen és hiányosan is — valójában az Ön gondolatait vetette papírra

az Ön legőszintébb és leghűségesebb

híve és tisztelője

Blaise Pascal

2. levél

Paris, 1654. november 6.

Pierre Fermat úrnak,

Orlèans

Uram,

levél még nekem nem okozott olyan örömet, mint az Öné, amelyet Carcavi úrral küldött nekem. Bár levele tulajdonképpen hónapokra elég töprengeni valót nyújt, mégis azonnal válaszolok, tudva, hogy éppen e sietség miatt válaszom nem lesz minden tekintetben teljes.

Megpróbálok tehát kérdéseire válaszolni. Nem akarok azonban Ön előtt a valóságnál jobb színben feltűnni és Önt becsapni, ezért megmondom őszintén, hogy kérdéseire csak azért tudok egyáltalán ilyen gyorsan válaszolni — hogy helyesen vagy helytelenül, azt Ön döntse el —, mert e kérdések kivétel nélkül felmerültek bár bennem is, és így nem értek engem készületlenül. Sőt, amikor előző levelemet lepecsételtem, világosan láttam, hogy e kérdésekre már abban ki kellett volna térnem, sőt, ezek egyikével — második kérdésével — kellett volna kezdenem első levelemet. Én általában úgy vagyok az írással, hogy amikor a végére érek, akkor jövök rá, mivel kellett volna kezdenem. Azonban éppen azért, mert ehhez hozzászoktam és ilymódon, amikor valamilyen írás végére pontot teszek, soha nem vagyok megelégedve az elejével, nem változtattam rajta, hanem elküldtem Önnek úgy, ahogy volt, tudva, hogy ha átírtam volna, a végén akkor sem lettem volna vele megelégedve.

Első kérdésére a válasz igen egyszerű és meggyőződésem, hogy azt Ön is jól ismeri, csak engem akart próbára tenni, mennyire alaposan gondoltam át, amit írtam. Kérdése ahhoz kapcsolódik, hogy — mint írtam — a szerencsejátékoknál egy esemény valószínűségét úgy számíthatjuk ki, hogy a játék egyformán lehetséges és egymást kölcsönösen kizáró kimenetelei közül megszámoljuk azokat, amelyek a szóbanforgó esemény bekövetkezését vonják maguk után, tehát amelyek az eseményre nézve *kedvezőek*, és ezt a számot elosztjuk a játék *összes* egyformán lehetséges kimenetelei számával (tehát az eseményre nézve kedvező és kedvezőtlen esetek számának összegével). Helyesen mutat Ön rá, hogy „egyformán lehetséges" kimenetel helyett „egyformán valószínű" kimenetelekről is beszélhetünk, a kettő ugyanazt jelenti. Mármost az Ön kérdése az, hogy itt nem circulus vitiosus-ról van-e szó, hiszen látszólag a valószínűség definíciójához felhasználjuk a valószínűségek egyenlőségét, vagyis a valószínűséget a valószínűséggel, azaz önmagával definiáltuk, márpedig egy forgalom meghatározásánál nem szabad magát a fogalmat felhasználni, hiszen ez olyan, mintha önmagunkat a saját hajunknál fogva próbálnánk felemelni.

E kérdésre természetesen azt válaszolom, hogy itt nem erről van szó, abban, amit írtam, semmilyen logikai hiba sincs, hiszen itt nem a valószínűségnek mint fogalomnak a definíciójáról, csak a valószínűségek kiszámítására szolgáló szabályról, a valószínűség számértékének meghatározásáról van szó, konkrét egyszerű esetekben. Én feltételeztem, hogy minden véletlen eseményhez hozzárendelhető egy meghatározott 0 és 1 közé eső szám, melyet az esemény valószínűségének neveztem és amely az esemény bekövetkezésére vonatkozó nem-teljes bizonyosság fokát fejezi ki. Mármost azt, hogy két esemény valószínűsége egyenlő-e, el lehet dönteni anélkül, hogy ezek valószínűségének számértékét ismerném. Az, hogy egy kocka szabályos, azt jelenti, hogy ha az oldalai nem volnának megszámozva, nem is lehetne őket megkülönböztetni, és ha — mialatt kimegyek a szobából — valaki átszámozza az oldalakat, akkor visszatérve ezt észre sem fogom venni. Így tehát nyilvánvaló, hogy a kocka ugyanakkora valószínűséggel eshet minden egyes oldalára. Ugyanarról van itt szó, mint amikor két távolságról úgy látom be, hogy egyenlő hosszúak, hogy egymásra helyezem őket és megállapítom, hogy végpontjaik pontosan egybeesnek; így el lehet dönteni, hogy két távolság egyenlő-e, anélkül, hogy megnézném a hosszúságukat. Hasonlóképpen kétkarú mérleggel súlyok nélkül is el lehet dönteni, hogy két tárgy egyforma súlyú-e.

Rátérek most második kérdésére, melyre a válasz már távolról sem ilyen egyszerű. Ön ugyanis azt kérdezi, hogyan lehet egy hamis — cinkelt, vagy ólmozott — kocka esetében (melynek súlypontja nem esik a kocka mértani középpontjába) kiszámítani annak a valószínűségét, hogy e hamis kockával egy meghatározott számot, pl. hatost dobjunk. A kérdés első pillanatra ártatlannak látszik, valójában azonban nagyon súlyos kérdés, mert egészen alapvető problémára vet fényt, olyan problémára, amellyel tulajdonképpen már első levelemben foglalkoznom kellett volna. Persze, ha Ön barátomnak, de Méré lovagnak tenné fel e kérdést, azt hiszem, ő ezt azzal hárítaná el, hogy ő csak úriemberekkel szokott kockázni, olyan társaságban, ahol nem szokás hamis kockával játszani, és ha kiderülne egy kockáról, hogy hamis, azt azonnal kidobnák — azzal együtt, aki hozta. Erre azonban Ön megkérdezhetné, miből vennék észre, hogy a kocka hamis. A lovag erre nemigen válaszolhatna mást, mint azt, hogy aki a hamis kockával játszik, az többször dobna hatost, mint ahogy egy szabályos kockánál ez várható, hiszen éppen ezt akarják elérni azok, akik hamis kockát készítenek. Erre Ön megkérdezné — remélem, megbocsát nekem azért, hogy egy képzeletbeli párbeszédet írok Önnel, mint főszereplővel —, szóval megkérdezné — nyilván nem is kérdezhetne mást —, hogy szabályos kocka esetében mit várna a lovag. Erre ő nyilván azt válaszolná, hogy azt várja, hogy szabályos kockával való hosszú ideig tartó játék során körülbelül ugyanannyiszor dob az ember hatost, mint bármely más számot, tehát a dobások számának körülbelül az $1/_6$-odában dob hatost.

Ezzel azonban a lovag, annak ellenére, hogy nem is törekedett erre, máris válaszolt volna az Ön kérdésére. Ha ugyanis a hamis kocka az összes dobások számának körülbelül x-részében esik úgy, hogy a hatossal jelölt oldala van felül, ahol x valamilyen $1/_6$-nál nagyobb szám, akkor annak a valószínűsége, hogy e kockával hatost dobjunk, nyilván éppen x-szel egyenlő. Erre megint Ön tehetne fel egy újabb nehéz kérdést. Azt kérdezhetné, hogy ha egy hamis kockával valaki 600-szor dob, és ennek során a 6-os 150-szer jött ki, akkor biztosak lehetünk-e abban, hogy e kockával a 6-os dobásának valószínűsége pontosan $\frac{150}{600} = \frac{1}{4}$? A lovag erre azt válaszolná (feltéve persze, hogy olvasta előző levelemet és az abban bevezetett kifejezéseket használja), hogy ez elsietett következtetés volna, hiszen ha a kocka szabályos, és így a 6-os dobásának valószínűsége pontosan $1/_6$ volna, 600 dobásból általában nem pontosan 100-szor jönne ki 6-os, csak körülbelül 100-szor és így a hamis kocka esetében sem állíthatjuk, hogy a 6-os dobásának valószínűsége pontosan $1/_4$, csak azt, hogy közel van $1/_4$-hez. Erre Ön azt kérdezhetné, hogy ha így csak közelítőleg lehet meghatározni a 6-os dobás valószínűségét a hamis kockával, akkor hogyan lehet mégis pontosan meghatározni azt. Erre a lovag — mint gyakorlott játékos — nyilván azt válaszolná, hogy olyan módszert ugyan nem ismer, amellyel teljes pontossággal meg lehetne határozni a 6-os dobásának valószínűségét a hamis kockával, de ha Önt a kapott közelítő érték nem elégíti ki — annak ellenére, hogy ez a kísérlet szinte kétséget kizáróan igazolja, hogy a kocka hamis, és így leghelyesebb azt rögtön tűzbe vetni —, módjában állna még megbízhatóbb, még jobb közelítést kapni a szóbanforgó valószínűségre azáltal, hogy egy újabb — az előzőnél hosszabb — mondjuk 1200 dobásból álló dobássorozatot végez és kiszámítja, hogy az összes dobások hányadrészében jött ki a hatos. Ha például 1200 dobás során a 6-os 288-szor jönne ki, úgy a szóbanforgó valószínűségre a $\frac{288}{1200} = 0{,}24$ megbízhatóbb közelítő értéket kapná.

Nem folytatom tovább e képzelt párbeszédet, mert azt hiszem, ennél sokkal többet de Méré lovagtól úgysem igen tudhatna meg — és mindezt Ön úgyis tudja. Megpróbálom inkább saját szavaimmal megválaszolni az Ön kérdését. A rövidség kedvéért állapodjunk meg abban, hogy ha bizonyos számú, azonos körülmények között végrahajtott kísérlet mindegyikét megfigyeljük abból a szempontból, hogy egy A esemény mely kísérleteknél következett be és melyeknél nem, nevezzük azon kísérletek számát, melyeknél az A esemény bekövetkezett, az A esemény *gyakoriságá*nak a szóbanforgó kísérletsorozatban, míg az A esemény gyakoriságának és az összes megfigyelt kísérletek számának hányadosát nevezzük az A esemény *relatív gyakoriságá*nak. Mármost mindenki, akinek elegendő tapasztalata van a szerencsejátékokban, tudja, hogy egy esemény relatív gyakorisága egy sok játszmából álló játszmasorozatban általában közel lesz egy meghatározott számhoz, mégpedig éppen ahhoz az értékhez, amelyet az illető esemény valószínűségének neveztünk és általában annál közelebb lesz ehhez, minél nagyobb a játszmák száma. A 6-os dobásának relatív gyakorisága például a kocka több százszor való feldobása esetén igen közel lesz a 6-os dobás valószínűségéhez, tehát, ha a kocka szabályos, $^1/_6$-hoz, ha azonban, nem szabályos, akkor általában valamely más számhoz. Hamis kocka esetében a 6-os dobásának valószínűségét csak tapasztalati úton lehet több-kevesebb pontossággal meghatározni. Elvileg e módon tetszőleges pontossággal meg lehetne határozni a valószínűséget, gyakorlatilag persze nem lehet e pontosságot tetszőlegesen fokozni, hiszen ez rengeteg időt igényelne — sőt, közben a kocka el is kopna. Azt hiszem azonban, hogy Önt nem is az érdekli valójában, hogy egy hamis kockánál mi a 6-os dobás valószínűségének pontos értéke, hanem kérdésének valódi tartalma az, hogyan lehet egy olyan véletlentől függő esemény valószínűségét meghatározni, amelynél nem lehet visszavezetni a kérdést arra, hogy a szóbanforgó kísérletnek hány egyforma valószínűségű, egymást kizáró kimenetele lehetséges. Nemrégiben olvastam valahol, hogy bár a régi rómaiak ismerték a kockajátékot is és ez a gazdagok között eléggé el is teredt, a katonák nem szabályosra csiszolt fa- vagy csontkockákkal — tessera-val —, hanem a kecske vagy a juh térdkalácsának egy darabjával, az ún. talus-szal vagy taxillus-szal kockáztak. E csontocskákat a régi görögök is ismerték és asztragalosz-nek nevezték. E csontocskák esetében az egyes lehetséges dobásfajták valószínűségeit már csak tapasztalati úton, a relatív gyakoriság megfigyelése útján lehet közelítőleg meghatározni.

Míg tehát egy véletlen esemény valószínűsége egy meghatározott számérték (bár esetleg mi nem ismerjük pontosan az értékét), amely nem függ a véletlentől, ugyanezen véletlen esemény gyakorisága a véletlentől függő, bizonytalan érték, amelynek pontos értékét nem lehet előre látni, csak a megfigyelések elvégzése után lehet megállapítani. Utólag persze pontosan ismerjük a relatív gyakoriság értékét, de nem szabad elfeledkeznünk arról, hogy ez az érték más is lehetett volna, és ha megismételjük a kísérletet, számítanunk kell arra, hogy valóban más értéket kapunk. Ha a valószínűséget ismerjük — például szimmetria meggondolások alapján, esetleg az összeadási és szorzási vagy más szabályokat is felhasználva kiszámítottuk —, akkor előre láthatjuk több-kevesebb pontossággal, hogy a relatív gyakoriság mekkora lesz, míg ha a valószínűséget nem ismerjük, annak értékére a relatív gyakoriság megfigyelése útján következtethetünk több-kevesebb pontossággal. A kétféle következtetés azonban gyökeresen különböző jellegű.

Az első következtetés olyan jellegű, mint amikor ismerjük két fém fajsúlyát és ennek alapján előre látjuk, hogy a kétféle fémből készült egyenlő térfogatú testeket egy mérleg két serpenyőjébe téve, melyik oldalra fog billenni a mérleg, míg a második következtetés olyan jellegű, mint amikor egy ismeretlen fajsúlyú anyag fajsúlyát határozzuk meg olymódon, hogy ezen anyagból készült testek súlyát és térfogatát lemérve vizsgáljuk e két szám hányadosát. Megjegyzem, ha e hányadost több, az illető anyagból készült tárgyra nézve meghatározzuk, ezen értékek sem lesznek egymással pontosan egyenlők, csak közel lesznek egymáshoz, hiszen semmilyen mérés sem tökéletesen pontos.

A valószínűség és a relatív gyakoriság tehát úgy viszonylik egymáshoz, mint a fajsúly valódi és mért értéke. A relatív gyakoriság megfigyelését úgy foghatjuk fel, mint a valószínűség megmérését olyan mérési eljárással, amely természeténél fogva nem teljesen pontos, de annál pontosabb, minél nagyobb számú megfigyelést végzünk.

A mondottakat úgy is ki lehet fejezni, hogy egy esemény tényleges megvalósulásainak száma (közelítőleg) úgy aránylik az összes megvalósulási lehetőség számához, ahogy az esemény valószínűsége egyhez, tehát a teljes bizonyosság valószínűségéhez. Tulajdonképpen bámulatos ez a megegyezés az ész és a tények, a lehetőség és a megvalósulás között. A kétfajta következtetést felváltva is alkalmazhatjuk: a gyakoriságok megfigyeléséből következtethetünk a valószínűségekre, és a valószínűségekről így nyert ismeretek alapján következtethetünk a jövőben végbemenő események gyakoriságára. Így segítheti elő a megfigyelés és a gondolkodás, egymást kiegészítve és támogatva, a világ megismerését. Nem ringatom magam azonban abban a tévhitben, hogy ezt én ismertem fel elsőnek; meggyőződésem, hogy ezt már Platon is tudta. Nemrégiben elővettem ugyanis a Timaiost és abban a következő meglepő mondatot találtam: „ahogyan aránylik a keletkezéshez a lét, viszonylik a hiedelemhez az igazság". Abban a meggyőződésemben, hogy e rejtélyesen hangzó kijelentéssel Platon ugyanazt a gondolatot kívánta kifejezni, mint amiről az előbb szó volt, különösen megerősít, hogy közvetlenül e mondat előtt Timaios azokról a dolgokról beszél, amelyek nem bizonyosak, csak valószínűek. Amikor a napokban a Timaios-ban e mondatra rábukkantam, úgy éreztem magam, mint azok, akik a föld mélyéből egy gyönyörű görög torzót ástak ki, és miután azt megtisztították a reáragadt földtől, a márvány újból eredeti fényében ragyog.

Szeretném, ha levelemet mielőbb megkapná, és látná, hogy a kérdéseivel elvetett mag nemcsak, hogy kikelt, hanem ilyen rövid idő alatt már gyümölcsöt is hozott. Remélem, e gyümölcsöt — bár még nem tökéletesen érett — mégis élvezhetőnek fogja találni. Mivel azonban tartok attól, hogy e gyümölcs kissé fanyar, küldök egy kosár almát is, amely kertemben termett. Tudom, hogy ezek az almák sem különbek, mint azok, amelyek Toulouseben teremnek, de talán e szerény ajándék is hozzájárul ahhoz, hogy meggyőzzem Önt, hogy nincs Önnek őszintébb híve, és lelkesebb tisztelője, mint

Blaise Pascal

3. levél

Paris, 1954 november 8
hajnalban

Pierre Fermat úrnak

Orlèans

Uram,

az éjjel különös álmom volt, amelyből verejtékezve, szívdobogással ébredtem. Hogy eltereljem gondolataimat, elhatároztam, hogy megpróbálom megválaszolni harmadik kérdését, azt, hogy a valószínűségek szorzási szabálya milyen feltételek mellett érvényes.

Ön rámutatott arra, hogy ha egy kártyacsomagból kétszer egymásután húzok egy-egy lapot, a szorzási szabály érvényes abban az esetben, ha az elsőnek kihúzott lapot a második húzás előtt visszatesszük a kártyacsomagba és azt újból jól megkeverjük, de nem érvényes, ha nem tesszük vissza. Például, ha a kártyacsomag 16 kártyából áll: a pikk, kőr, treff és káró színek mindegyikéből az ászt, királyt, dámát és bubot tartalmazza, akkor annak a valószínűsége, hogy elsőzörre királyt huzzunk $^1/_4$, annak a valószinűsége, hogy másodszorra királyt húzzunk: 1/4 — mégpedig akár visszatesszük az elsőnek kihúzott lapot, akár nem —, azonban, ha az először kihúzott lapot nem tesszük vissza, annak a valószínűsége, hogy mind a kétszer királyt húzzunk, valójában nem $1/4 \cdot 1/4 = 1/16$, hanem csak 1/20, hiszen két királyt 12-féleképpen húzhatunk, míg az összes lehetőségek száma 240. Valóban, úgy tűnik, mintha az ellentmondana az első levelemben felállított szorzási szabálynak, azonban ez az ellentmondás csak látszólagos: ha közelebbről megvizsgáljuk a példát, kiderül, hogy a szorzási szabály itt is érvényes. Ha ugyanis elsőzörre királyt húzunk és azt nem tesszük vissza a második húzás előtt a kártyacsomagba, akkor a második húzásnál már csak 15 lap között választhatunk és ezek közt már csak 3 király van, tehát annak a valószínűsége, hogy másodszorra királyt húzzunk azon feltétel mellett, hogy elsőzörre királyt huztunk, nem 1/4, hanem csak $3/15=1/5$, mivel $1/4 \cdot 1/5 = 1/20$, tehát a szorzási szabály itt is érvényes. Azon feltevés mellett, hogy elsőzörre nem királyt, hanem valami mást húztunk (és a kihúzott lapot nem tesszük vissza), annak a valószínűsége, hogy másodszorra királyt húzunk: 4/15, vagyis 1/4-nél nagyobb, így annak a valószínűségére, hogy elsőzörre nem királyt, másodszorra azonban királyt húzunk, a szorzási szabály helyes alkalmazásával $3/4 \cdot 4/15 = 1/5$-nek adódik; mivel $1/20 + 1/5 = 1/4$, tehát annak valószínűsége, hogy másodszorra királyt húzunk (tekintet nélkül az első húzás eredményére) ugyanúgy 1/4 akkor is, ha az először kihúzott lapot nem tesszük vissza, mint amikor visszatesszük. Ez azonban csak abban az esetben igaz, hogy nem nézzük meg az elsőzörre kihúzott lapot; ha ugyanis megnézzük és azt látjuk, hogy az elsőzörre kihúzott lap király, akkor e feltétel mellett csak 1/5 (vagyis 1/4-nél kisebb) a valószínűsége, hogy másodszorra királyt húzzunk, míg azon feltétel mellett, hogy az először kihúzott lap nem király, annak a valószínűsége, hogy másodszorra királyt húzzunk, 4/15 (vagyis 1/4-nél nagyobb). Azt kérdezheti erre Ön, hogyan függhet a valószínűség attól, hogy megnéztem-e az elsőzörre kihúzott lapot, vagy sem? A kártya nem tudhatja, hogy én megnéztem-e az első lapot! Más szóval, hogyan befolyásolhatja az én tudásom a húzás esélyét, hiszen ez utóbbi csak a kártyacsomag összetételétől függ. Valóban így van, de ha megnézem az elsőzörre kihúzott lapot, ezáltal éppen az derül ki, hogy a 16 lap közül melyik hiányzik a megmaradt 15 közül és ennek a lapnak a tényleges hiánya befolyásolja a szóbanforgó valószínűséget, mert ettől függ, hogy a megmaradt 15 lap között 4 vagy csak 3 király van-e. Tulajdonképpen félrevezető arról beszélni, hogy megnézzük a kihúzott lapot, hiszen nem az számít, hogy én tudom-e, hogy az melyik lap, csak az, hogy valójában király-e vagy nem. Ha azonban semmit sem mondunk a kihúzott lapról, annak valószínűségének kiszámításánál, hogy másodszorra királyt húzunk, figyelembe kell venni mind a két lehetőséget: azt, hogy elsőzörre királyt húztunk és azt is, hogy nem királyt húztunk, és e lehetőségek valószínűségeivel kell súlyozni az 1/5 és 4/15 feltételes valószínűségeket; valóban, $1/4 \cdot 1/5 + 3/4 \cdot 4/15 = 1/4$.

E példa jól mutatja, hogy ezen — csak látszólag egyszerű kérdések vizsgálata nagy körültekintést igényel, mert szinte minden lépésnél buktatók várják az embert. Erről máskor majd részletesebben szeretnék írni Önnek. Visszatérve a szorzási szabály kérdésére, ennek szabatos és általános fogalmazása tehát úgy szól, hogy annak a valószínűségét, hogy mind az A, mind pedig a B esemény bekövetkezzék, úgy kapjuk meg, ha az A esemény valószínűségét megszorozzuk a B esemény valószínűségével, de utóbbi valószínűséget azon feltevés mellett kell kiszámítani, hogy az A esemény bekövetkezett; ez utóbbi valószínűséget nevezzük el a B esemény az A feltétel melletti feltételes valószínűségének.

Úgy tűnik, mintha itt új fogalmat vezettem volna be: a *feltételes valószínűség* fogalmát. Valójában ez nem teljesen új fogalom, hiszen minden esemény valószínűsége függ azoktól a feltételektől, amelyek mellett az esemény bekövetkezését ill. be nem következését vizsgáljuk. Amikor azt mondjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy egy kockát feldobva 6-ost dobunk: 1/6, hallgatólagosan feltesszük, hogy a kocka szabályos. Amikor azt mondjuk, hogy 1/4 annak a valószínűsége, hogy az említett kártyacsomagból királyt húzzunk, feltesszük, hogy a kártyacsomag 16 lapból áll, ezek között 4 király van és a kártyák alaposan össze vannak keverve. Ha a feltételek megváltoznak, általában megváltozik a valószínűség is. Valójában tehát minden valószínűség feltételes, ha azonban a feltételek ismeretesek és nem változnak, nem szükséges ezeket mindig megemlíteni; ha azonban a feltételek megváltoznak, akkor ezt figyelembe kell venni. Úgy érzem, hogy a „feltételes valószínűség" kifejezés tulajdonképpen pleonazmus; olyan, mintha „halandó ember"-ről beszélnénk, annak ellenére, hogy minden ember halandó. A félreértések elkerülése végett azonban mégis célszerű feltételes valószínűségekről beszélni olyankor, amikor a feltételek nem egyszersmindenkorra adottak, hanem esetről esetre változhatnak.

Előfordulhat, hogy egy B esemény valószínűsége azon feltevés mellett, hogy az A esemény bekövetkezett, ugyanakkora, mint a feltétel nélkül. Ha ez a helyzet, indokoltnak látszik az A és B eseményeket *függetlennek* nevezni, hiszen ez esetben a B esemény bekövetkezésének valószínűsége nem függ attól, hogy az A esemény bekövetkezett-e, vagy nem, illetve attól sem, hogy ezt egyáltalán figyelembe vesszük-e. Ha az A és B események függetlenek, akkor tehát a szorzási szabály a feltételes valószínűség fogalmának felhasználása nélkül is komondható. Ilyen esetekben minden további megjegyzés nélkül állíthatjuk, hogy annak valószínűsége, hogy mind az A, mind pedig a B esemény bekövetkezzék, egyenlő ezen események valószínűségeinek szorzatával. Ez a helyzet például, ha az A és B események két különböző kockával való dobásokra vonatkoznak. Ez esetben az A és B események függetlenségének az az oka, hogy a két kocka egymásra semilyen befolyást nem gyakorolhat. Ha a két kocka egy fonállal össze volna kötve, akkor a két dobás eredménye nem volna független. Két esemény azonban nemcsak akkor lehet független, ha nem is tudjuk elképzelni, hogyan befolyásolhatná az egyik bekövetkezése a másik esélyeit. Jelentse például A azt az eseményt, hogy az említett kártyacsomagból egy lapot húzva, az a lap treff színű, B pedig azt az eseményt, hogy a kihúzott lap király. Ez esetben a két esemény ugyanarra a húzásra vonatkozik, mégis függetlenek, hiszen a 16 lap közt 4 király van, a 4 treff színű lap közt egy király, a többi 12 lap között pedig 3 király, tehát a B esemény valószínűsége akkor is 1/4, ha az A esemény bekövetkezett, akkor is ha nem következett be, és akkor is, ha az A eseményt egyáltalán nem is vesszük tekintetbe.

Amikor a valószínűségekről gondolkodni kezdtem, minden olyan egyszerűnek és világosnak tűnt előttem; most kezdem csak látni, hogy tévedtem. Valahányszor azt hiszem, hogy megragadtam az igazságot, az újra szertefoszlik kezemben. Szinte minden lépésnél újabb szakadékok leselkednek az emberre!

A véletlen fogalmát évszázadokon át babonás hit övezte és azt hiszem, ez tartotta vissza az embereket attól, hogy a véletlen jelenségeket megpróbálják tudományos vizsgálat tárgyává tenni.

Jólesett töprengéseimet is őszintén feltárni Ön előtt. Bízom benne, hogy aki olyan jól megérti gondolataimat, mint Ön, őszinteségemet barátságunk zálogaként fogja fogadni és azt olvassa ki e levélből is, hogy az Ön legőszintébb barátja és tisztelője

Blaise Pascal

4. levél

Paris, 1654 november 19, csütörtök

Pierre Fermat úrnak

Toulouse

Uram,

Orléansból november 12-én írt válaszában szerényen elhárítja azt a feltevésemet, hogy előre tudta volna a választ kérdéseire, melyeket előző levelében nekem feltett. Ne is vegye rossznéven, ha én kitartok meggyőződésem mellett, hogy válaszaim nem mondtak Önnek sok újat. Éppen mivel azt hiszem, hogy Ön saját kérdéseit már előbb megválaszolta önmagának; ezért örülök annyira, hogy az én válaszaimmal — mint írja — túlnyomórészt egyetért.

Mostani levelében feltett újabb kérdéseivel kapcsolatban azonban hajlok arra, hogy elhigyjem, hogy ezek valóban nem szónoki kérdések. E kérdések ugyanis annyira elválaszthatatlanok a filozófia legalapvetőbb problémáitól, hogy úgy hiszem, e kérdéseket minden kor újra meg újra fel fogja vetni. Ahogy az emberiség tudásban gyarapodik, egyre teljesebb választ lehet majd adni e kérdésekre, de soha válasz e kérdéseket végleg lezárni nem fogja. Öné azonban az érdem, hogy e kérdéseket elsőként fogalmazta meg ilyen páratlan világossággal. Ha, mondjuk 300 év múlva, feltámadnék, és azt látnám, hogy a matematikusok, a természet kutatói és a filozófusok még mindig vitatkoznak e kérdéseken, egyáltalában nem lepődnék meg. Azon sem csodálkoznék, ha e viták során sok homályos és zavaros nézet is szóhoz jutna. Éppen mivel a bizonytalanságról van szó, várható, hogy felületes elmék azt fogják hinni, hogy e téren kell törekedni a gondolkodás lehető legteljesebb tisztaságára. Nem lepne meg, hogy olyanok, akik a szabatos matematikai gondolkodástól amúgy is idegenkednek, azt hinnék, hogy — mivel a véletlen jelenségeket úgysem lehet teljes pontossággal előre látni, legfeljebb nagy vonalakban — e jelenségek matematikai vizsgálatánál megengedik maguknak a pongyolaságot, a csak félig átgondolt és csak negyedrészt megemésztett fogalmakkal való dobálódzást. Pedig ennek éppen az ellenkezője igaz. Minden háziasszony tudja, hogy a friss, puha kenyér felszeleteléséhez sokkal fontosabb, hogy a kés éles legyen, mint a szárazabb kenyér felvágásához. Lényegében itt is erről van szó. Minden tudományos vizsgálatra áll, hogy csak kristálytiszta érveléssel, óvatosan, lépésről-lépésre haladva és minden lépést ellenőrizve lehet az igazságot megközelíteni, de ez sehol sem annyira fontos, mint éppen a véletlen jelenségek vizsgálatánál, mert itt különösen könnyű megbotlani.

Nemrégiben Madame d'Aiguillon szalónjában, nagyobb társaságban hosszabb beszélgetést folytattam e kérdésekről egy régi barátommal, Damien Miton úrral, aki jelen volt már akkor is, amikor de Méré lovag feltette nekem kérdéseit a kockajátékról. Miton úr azóta is érdeklődik a maga módján e dolgok iránt, és gyakran faggat, hogy mennyire jutottam a valószínűségek kutatásában. Tudnia kell, hogy Miton úr, bár nem matematikus, igen művelt és finom elme, akinek érdeklődése az irodalom mellett, amelynek igen alapos ismerője és kiváló művelője, a tudomány kérdéseire is kiterjed, és esze úgy vág, mint a borotva. Gyakran vitatkozásra késztet engem az a tulajdonsága, hogy minden kérdésről teljesen határozott véleménye szokott lenni, még akkor is, ha először hall arról. Ez a magabiztossága engem egyenesen ingerel és gyakran próbálom bebizonyítani neki, hogy elhamarkodottan alkotott véleményt. Ha elmondom Önnek, hogy e vitáink során, ha már annyira sarokba szorítottam, hogy be kellene látnia, hogy tévedett, mivel szokta lezárni a vitát; ebből képet alkothat magának erről az emberről. Miton úr ilyenkor ugyanis azt szokta mondani, hogy belátja, hogy az övétől különböző, sőt azzal ellentétes vélemény is lehet legalább annyira indokolt, mint az övé és ő nem is akar engem meggyőzni az ő igazáról, készségesen elismeri, hogy nekem éppen úgy jogom van, hogy egyéni véleményt alkossak magamnak, mint őneki, de éppen ezért azt kéri, hogy én se próbáljam ráerőszakolni az én véleményemet. Kedvenc szavajárása Miton úrnak az, hogy „kinek a szőke, kinek a barna", — és ehhez hozzá szokta tenni, hogy őneki még e kérdésben sincsenek előítéletei. Ezzel a vita be is szokott fejeződni, illetve a beszélgetés a szépasszonyokra terelődik át; e téren persze eszembe sem jut Miton úr alapos ismereteit és ítéletei megalapozottságát kétségbevonni.

Ezzel, úgy hiszem, bemutattam Önnek Miton urat, erényeivel és korlátaival együtt.

Ezek előrebocsátása után ismertetem Önnel Miton úrral a valószínűségekről folytatott beszélgetésünket.

Beszélgetésünk elején Miton úr kérdésére, hogy meddig jutottam el a véletlen matematikai törvényeinek vizsgálatában, röviden elmondtam azt, amit Önnek előző leveleimben megírtam: a valószínűséget, mint a bizonyosság fokát definiáltam megadott körülmények mellett. Rámutattam, hogy egy esemény relatív gyakorisága az illető esemény valószínűsége, mint szilárd pont körül ingadozik a véletlen szeszélye szerint. Ehhez kapcsolódott Miton úr első megjegyzése.

Miton: Megértem az Ön lelkesedését, Pascal úr, afelett, hogy elsőnek fogalmazta meg ezt az érdekes tényt. Úgy érzem azonban, hogy e törvény érvényességi köre meglehetősen korlátozott: a sorshúzástól és a szerencsejátékoktól eltekintve — melyek engem is érdekelnek, bár távolról sem annyira, mint közös barátunkat, de Méré lovagot — nem is tudok elképzelni olyan helyzetet, ahol e tétel feltételei teljesülnének. Pascal úr, úgy hiszem, tudja, hogy gyakran szoktam járni lóversenyekre, nem azért, hogy pénzt nyerjek — erre szerencsére nem vagyok rászorulva —, hanem a jó társaság kedvéért. De ha már ott vagyok, érdeklődéssel kísérem a versenyt is, és így tapasztalatból tudom, hogy azt éppen úgy nem lehet előre megmondani, melyik ló fog nyerni, mint a kockadobás eredményét: ez is a véletlentől függ; a lóversenyeknél azonban Pascal úr törvénye nem alkalmazható, hiszen még ha meg is ismételnénk a lóversenyt többször egymás után, ugyanazokkal a lovakkal és lovasokkal (ami soha nem fordul elő), az már nem volna ugyanaz a verseny és az egyes lovak esélyei nem volnának ugyanazok.

Pascal: Egy törvény érvényességét nem érinti az, hogy bizonyos esetekben feltételei nem valósulnak meg és így nem alkalmazható. A tétel érvényességét csak az csorbítaná, ha olyan esetben sem teljesülne a tétel konklúziója, amikor a tétel feltételei teljesülnek. Abban azonban Önnek igaza van, hogy vannak olyan véletlen események, amelyek bekövetkezését csak egyetlen egyszer figyelhetjük meg, mert ugyanolyan körülmények között a megfigyelés nem ismételhető meg. Az ilyen véletlen eseményeket nevezhetjük *egyszeri* véletlen eseményeknek.

Milton: Ilyen egyszeri véletlen események esetében tehát a valószínűség tapasztalati úton, a relatív gyakoriság megfigyelése révén való közelítő meghatározására nincs lehetőség?

Pascal: Úgy van, hiszen csak egy megfigyelést végezhetünk és így a relatív gyakoriság értéke csak 1 vagy 0 lehet.

Miton: Mit jelent akkor egy ilyen egyszeri esemény esetében az, hogy a valószínűsége egy meghatározott szám, például 1/2?

Pascal: E kijelentésnek ugyanaz az értelme, mint a sokszor megfigyelhető események esetében. Például szokás, hogy a csirkemell egy bizonyos villa-alakú csontjának két szárát két gyermek addig húzza, amíg az egyik szár el nem törik. Közben mindketten egy-egy kívánságukra gondolnak; a babona azt tartja, hogy akinek a kezében levő szár nem törik el, annak a kívánsága teljesül. Mivel a szóbanforgó csontocska szimmetrikus, van értelme azt mondani, hogy mindkét gyermek 1/2 valószínűséggel fog nyerni, annak ellenére, hogy a csontocskát csak egyszer lehet eltörni.

Miton: E példában tulajdonképpen még az Ön törvényének érvényesüléséről is lehet beszélni, ugyanis nyilván, ha sok ilyen csont eltörését figyeljük meg, igaz lesz, hogy az eseteknek körülbelül a felében az a gyermek nyer, aki a baloldali ill. aki a jobboldali szárat fogja. A lóverseny esetében azonban nincs ilyen kiút a dilemmából. Egyébként egyetértek Önnel abban, hogy a lóverseny esetében is van értelme azt mondani, hogy a versenyző lovak közül az egyik egy bizonyos — mondjuk 1/2 — valószínűséggel fog győzni; valóban, a lóversenyen résztvevőknek általában elég határozott véleményük szokott lenni erről, és ennek megfelelően fogadnak a lóverseny kimenetelére. Azt tapasztaltam azonban, hogy a különböző emberek véleménye erősen el szokott térni egymástól, aszerint, hogy milyen információik vannak az egyes lovakról. E példa alapján nekem úgy tűnik, hogy általában egy esemény valószínűségét különböző emberek különbözőképpen ítélik meg, és semmi alapot nem látok arra, hogy eldöntsük, melyiknek van igaza. Az, hogy egy ló elsőnek ér célba, nem bizonyítja, hogy azoknak, akik e lóra fogadtak, igazuk volt, csak azt, hogy szerencséjük volt. A szerencsejátékok esetében persze a hozzáértők véleménye valóban megegyezik, de ez csak ilyen kivételes és mesterkélt esetekben van így. Ön azt mondta, hogy egy esemény valószínűségén az illető esemény bizonyossági fokát értjük. Szerintem ezt a definíciót úgy kell módosítani, hogy egy véletlen esemény valószínűsége általában minden ember számára más és más: mert csak azt adja meg, hogy ő milyen mértékben számít a szóbanforgó esemény bekövetkezésére, hogyan ítéli meg annak bizonyossági fokát. Az emberektől elvonatkoztatva tehát szerintem egy esemény valószínűségéről ugyanúgy nem lehet beszélni, mint egy vers, egy kép vagy egy asszony szépségéről: az ízlések különbözők és ugyanígy különbözőképpen ítélik meg az emberek egy véletlen esemény esélyeit is.

Pascal: Ebben nem értek Önnel egyet; szerintem egy esemény valószínűsége mindig egy, a mi véleményünktől független, meghatározott szám, amelynek értékét persze különböző emberek különbözőképpen becsülik meg. Azt elismerem, hogy a lóverseny esetében, ha valaki azt tanácsolja nekem, hogy egy bizonyos lóra fogadjak és ez a ló valóban befut, ez még nem jelenti, hogy a tanácsadóm jól ítélte meg a lóverseny várható kimenetelét. Ha azonban ennek a tanácsadónak a ,,tippjei'' hosszú időn keresztül az esetek nagyrészében — mondjuk 9/10-ében — beválnak, egy másik tanácsadó ,,tippjei'' azonban az eseteknek csak 1/10-ében válnak be, akkor nemde ebből Ön is azt a következtetést vonja le, hogy az első tanácsadóra érdemes hallgatni, a másodikra nem.

Miton: Természetesen.

Pascal: Mondhatjuk tehát ez esetben, hogy az első tanácsadó egyéni véleményei megbízhatóbbak, mint a másodiké?

Miton: Nyilvánvalóan.

Pascal: Most megfogtam Önt. Hiszen ez azt jelenti, hogy az első tanácsadó jobban képes megbecsülni a lóverseny eredményének *valódi* valószínűségét; tehát ez esetben is van értelme a szóbanforgó események valószínűségeinek valódi értékéről beszélni, annak ellenére, hogy azt pontosan senki sem ismeri, csak többé-kevésbé megbízhatóan tudja megbecsülni.

Miton: Elismerem, hogy ez ügyes válasz volt, bár Ön most tulajdonképpen egy egészen más esemény valószínűségéről beszél, mint én, tudniillik annak az eseménynek a valószínűségéről, hogy egy lóversenyszakértő milyen valószínűséggel ad helyes ,,tippet'', és itt már nem egy egyszeri eseményről van szó, hanem egy sokszor ismétlődő eseményről, amelynek valószínűségét a relatív gyakoriság megfigyelése útján valóban meg lehet állapítani. De hagyjuk a lóversenyt, hiszen nem a példa a fontos, hanem az elvi kérdés. Szeretném, ha megmagyarázná, mire alapozza azt, hogy általában van értelme egy esemény valószínűségéről beszélni, függetlenül az egyéntől, aki erre nézve véleményt alkot. Szerintem minden valószínűség szubjektív; ha Ön szerint ez nem így van, hanem van értelme objektív valószínűségről beszélni, akkor bizonyítsa is ezt be.

Pascal: Készséggel elismerem, hogy ezt nem tudom bebizonyítani, ez axioma, és Ön is tudja, hogy axiomákat nem lehet és nem is szükséges bizonyítani. Csak azt tudom Önnek megmutatni, hogy ez az axioma éppen olyan ésszerű, mint azok az axiomák, amelyek helyességét kétségbe vonni sem Önnek, sem másnak nem is jut eszébe. Talán meg fogja lepni, ha azt mondom, hogy a valószínűség objektivitásának axiomája egy mindenki által elfogadott axiomának természetes és szinte magától értetődő kiterjesztését képezi.

Miton: Milyen axiomára gondol?

Pascal: Az okság axiomájára: arra, hogy a természetben az összes, egy jelenséget befolyásoló tényezők együtt pontosan meghatározzák a jelenség lefolyását, és azonos okok mindig azonos következményekre vezetnek; ez egész világképünk alapja és minden egyes természeti törvény, amelyet a tudomány felfedez, újabb érv amellett, hogy ez az axioma helyes és szükséges. Aki azonban az okság elvét elfogadja, annak el kell fogadnia azt az axiomát is, hogy a véletlen események meghatározott — tőlünk független, vagyis ,,objektív'' — valószínűséggel bírnak, mert ez nem más, mint ugyanannak az alapelvnek egy átfogóbb és pontosabb megfogalmazása.

Miton: Valóban meglepő, amit mond és nem is értem. Nem tudná ezt érthetőbben megmagyarázni?

Pascal: A legnagyobb örömmel. Szerintem az okság elvének ez az általánosabb alakja a következőképpen fogalmazható meg: ha ismerjük mindazon körülményeket, amelyek egy jelenségre befolyással bírnak, akkor ezek egyértelműen meghatározzák a jelenség lefolyását; ha azonban a lényeges körülményeknek csak egy részét ismerjük, ezek a jelenség lefolyását illetően általában még több lehetőséget engednek meg, azonban egyértelműen meghatározzák ezen lehetőségek mindegyikének a valószínűségét. Azon, hogy egy esemény bekövetkezése a véletlentől függ, éppen azt értjük, hogy a figyelembe vett körülmények nem határozzák meg egyértelműen, hogy mi fog történni, megengedik azt is, hogy az esemény bekövetkezzék és azt is, hogy ne következzék be, azonban meghatározzák e két lehetőség valószínűségeit. Az, hogy mi e valószínűségeket bizonyos esetekben pontosan ismerjük, más esetekben csak közelítőleg, egyes esetekben pedig egyáltalán nem, a dolog lényegét ugyanúgy nem érinti, mint az okság elvét sem érinti, hogy bizonyos teljesen meghatározott jelenségek esetében ismerjük a pontos törvényt, mint például azt, hogy egy leejtett kő hogyan fog leesni, más jelenségek esetében azonban nem is ismerjük a pontos törvényt. –

Miton: Kezdem érteni az Ön filozófiáját, ez azonban nem jelenti, hogy el is fogadom azt. Ha jól értettem Önt, akkor az okság elve Ön szerint a valószínűségek objektivitása elvének határesete.

Pascal: Nagyon is jól megértett, sőt szerintem olyan ideális határeset, mely a valóságban tulajdonképpen sohasem valósul meg teljesen, csak közelítőleg. Egy jelenségre hatást gyakorló összes körülményeket teljes pontossággal ugyanis soha nem ismerhetjük és nem vehetjük tekintetbe. Ha sikerül számbavennünk egy jelenséget meghatározó főbb okokat, úgy a jelenség lefolyását nagy vonalakban előre láthatjuk, de nem láthatjuk őket előre minden parányi részletükben. Talán emlékszik még a levegő súlyára vonatkozó kísérleteimre. Sikerült megmutatnom, hogy magas hegyen – például a Puy de Dome csúcsán – alacsonyabb a higanyoszlop, mint a hegy lábánál, mert a hegy lábánál a levegő súlya nagyobb, hiszen onnan számítva a légoszlop magasabb. De a levegő súlya a föld ugyanazon pontján sem állandó, az időjárástól, a levegő nedvességtartalmától is függ, ez utóbbi pedig a véletlentől függ és azt előrelátni nem tudjuk. Így tehát nem állíthatjuk, hogy a levegő súlya itt Párizsban egy teljesen meghatározott érték, csak azt mondhatjuk meg, hogy milyen határok közé fog nagy valószínűséggel esni. E valószínűségeket azonban Párizs földrajzi helyzete, az évszak és az időjárás határozza meg; akármit is gondol Ön erről, attól a higany a Torricelli-féle kísérletnél egy századmilliméterт sem fog se fel, se lemenni. Vagy vizsgáljuk a csillaghullás példáját. Igaz, hogy augusztusban látni a legtöbb hullócsillagot. De ez nyilván akkor is így volt, amikor még ezt senki nem figyelte meg. Nem azért több augusztusban a hullócsillag, mert Önnek, meg nekem ez a véleményünk, hanem azért ez mindkettőnknek a véleménye, mert valóban gyakoribb e hónapban a csillaghullás, mint máskor. A holdon végbemenő véletlen eseményeknek is meghatározott valószínűsége van, annak ellenére, hogy e valószínűségekről senkinek közülünk nem lehet semmilyen egyéni véleménye, hiszen még azt sem tudjuk, hogy milyen eseményekről van szó.

Miton: Ne is folytassa, Uram, mert ebben teljesen egyetértünk. Elfogadom, hogy az élettelen természetre vonatkozó valószínűségek objektív érvényűek, ezt eddig sem vontam kétségbe. De engedje meg, hogy figyelmeztessem, hogy megint olyan területre terelte a vitát, ahol valóban szilárd talajra támaszkodhat; példái mind korlátlanul megismételhető kísérletekre, és ha nem is gyakorlatban, de legalább elvben akárhányszor megfigyelhető jelenségekre vonatkoznak, ahol a valószínűségek valódi értékére a relatív gyakoriságból lehet következtetni. Az én ellenvetéseim az egyszeri véletlen eseményekre vonatkoztak – mint például egy lóverseny kimenetele.

Ha Önnek ez örömet okoz, elfogadom, hogy az egyszeri véletlen eseményeknek is van tőlünk független objektív valószínűsége, habár annak pontos értékét nem ismerjük, sőt nem is ismerhetjük. Szerintem azonban a tudománynak nem feladata, hogy elvileg megismerhetetlen, a tapasztalat számára hozzáférhetetlen dolgokkal foglalkozzék, még ha ilyenek léteznek is, bár szerintem ilyen esetekben nagyon is kétséges, hogy egyáltalán mit is értsünk ezek „létezésén".

Pascal: Ugyanazt, mint Lucretius atomjainak a létezésén, amelyeket szintén nem láthatunk még nagyítóval sem, mégis segítségükkel tudjuk megmagyarázni mindazt, amit látunk magunk körül a világban. Mindkét esetben egy olyan tudományos hipotézisről van szó, amelyet közvetlenül nem, csak következményein keresztül tudunk ellenőrizni.

Miton: Pascal úr, Ön valóban ügyvédnek is kiváló volna; látom, az „argumentum ad hominem" módszerét is ügyesen kezeli. Úgy látom, még emlékszik arra a beszélgetésünkre, amelyben elmondtam, hogy a „De rerum natura" legkedvesebb olvasmányom – és nem csak azért, mert, mint ő, és én is nagyrabecsülöm Vénusz istennőt. Bár még mindig nem győzött meg teljesen, hasonlata az atomokkal kétségtelenül elgondolkoztató. Ön szerint tehát az egyszeri események valószínűségei is azon dolgok közé tartoznak, amelyekről a költő azt mondja, hogy

„Halld és ismerd el magad is, hogy vannak a dolgok
Közt olyanok bőven, melyeket nem láthat az ember.
Lám, a viharzó szél felkorbácsolja a tengert,...
Elsüllyeszt roppant gályákat, s felleget oszlat...
...
S ime: a szél is olyan, mit nem lát szemmel az ember."

Ön szerint tehát a szerencsétlen gályákat a láthatatlan szél és az ismeretlen valószínűség közös erővel süllyesztik el?

Pascal: Így is lehet mondani, és ezzel Lucretius is egyetértene, hiszen ő maga is úgy képzelte, hogy a világot az atomok véletlen összeverődése hozta létre.

Milon: Ön úgy beszél a véletlenről, mintha teljesen egyértelműen eldönthető volna, hogy egy esemény a véletlentől függ-e vagy sem. Nekem úgy tűnik, hogy ez sem dönthető el egyértelműen. Ami az egyiknek véletlen, a másiknak nem az. Szerintem még az is egyéni ítélettől függ, hogy egy esemény egyáltalán véletlenszerű-e.

Pascal: Abban egyetértek, hogy ugyanaz az esemény bizonyos esetekben véletlen eseménynek tekintendő, más esetekben pedig okozatilag teljes mértékben meghatározottnak, attól függően, hogy milyen körülmények között vizsgáljuk. Emlékezzék csak vissza arra, amit arról mondtam Önnek még beszélgetésünk elején, hogy minden valószínűség tulajdonképpen feltételes; az objektív feltételektől, amelyek mellett egy esemény bekövetkezését vizsgáljuk, függ, hogy az esemény egyáltalán véletlen jellegű-e, és ha igen, ezek az objektív feltételek határozzák meg az esemény valószínűségét is.

Miton: Ám legyen, nem vitatom ezt most tovább. Felfogásaink, úgy látszik, nem is annyira ellentétesek, mint eleinte gondoltam; legalább is a gyakorlati konzekvenciákat illetően az eltérés lényegtelen. Ezért úgy hiszem, ne is untassuk tovább vitánkkal a társaságot, hiszen akármeddig vitatkozunk is, mindketten azután is csak a saját fejünkkel fogunk gondolkozni és így szükségképpen némileg másképp fogjuk látni a dolgot. Úgy érzem, a vita során felfogásunk annyira közel került egymáshoz, amennyire ez egyáltalán lehetséges, így a további vita céltalan volna. Úgy látom, a szép hölgyek itt körünkben máris neheztelnek ránk azért, mert elhanyagoljuk őket, ezért — ha Ön is egyetért — fejezzük be mára a vitát.

Pascal: Ahogy Ön kívánja.

Eddig tartott a beszélgetésünk. Mivel úgy érzem, ebben benne van az a kevés, amit az Ön kérdéseiről egyáltalán mondani tudok, ezért nem is fűzök hozzá semmi kommentárt és csak azt kérem, hogy barátságunk érdekében írja meg egészen nyíltan és őszintén a véleményét erről a beszélgetésről, amelyet Miton úrral folytatott az Ön leghűségesebb és Önt mindenkinél többre becsülő híve és tisztelője,

Blaise Pascal

EGYESÜLETI ÉLET – HIREK

Új állami díjasunk

Örömmel jelentjük, hogy Gyulai Zoltán akadémikust, Társulatunk elnökét, kormányzatunk a szilárdtest fizika területén végzett több évtizedes alapvető munkásságáért az 1966. évi Állami-díj első fokozatával tüntette ki.

Gyulai Zoltán tudományos tevékenységét a fényelektromos jelenségek tanulmányozásával kezdte el. Különösen jelentősek a színezett alkalihalogenid kristályokon végzett vizsgálatai. Ezek a kvantumfizika fejlődésének kezdeti szakaszában az első kísérleti bizonyítékok közé tartoztak a kvantumszerűségnek szilárd anyagokban való érvényességével kapcsolatban. Az ismert röntgenezéssel történő színezés mellett új színezési eljárást dolgozott ki, amelyet additív színezésnek nevezünk Vizsgálatai során a színezett kristályok számos tulajdonságát tárta fel, és többek között tisztázta a természetben is előforduló kék és ibolya színű kősókristályok színcentrumainak természetét. A mai szilárdtest fizika alapján értékelve Gyulai eredményeit, elmondhatjuk, hogy azok mind a ponthibák tulajdonságainak megismerése, mind pedig az ionizáló sugárzások által szilárdtestekben kiváltott folyamatoknak feltárása szempontjából alapvetőek, és a szilárdtest fizika lényeges megállapításai közé tartoznak.

Vizsgálatai során nagy pontossággal mérte meg az alkalihalogenid kristályok egyes fizikai állandóit. Eredményeit átvették a fizikai állandókat tartalmazó gyűjteményes kiadványok, és mérési adatait az alkalihalogenid kristályokat előállító iparvállalatok ma is minőségellenőrzésre használják.

További vizsgálatai is szorosan kapcsolódnak a kristályhibák szerkezetének problematikájához. Ezek a kérdések a 20-as években még csak elméleti viták tárgyát képezték. Ekkor dolgozta ki Gyulai a kristályhibák realitásának vizsgálatára azokat a méréseket, amelyek során kitűnt, hogy a NaCl egykristályok elektromos vezetőképessége nyomás hatására ugrásszerűen megváltozik. A Gyulai—Hartly-féle nyomás-effektus révén nyert először kísérleti igazolást az a tény, hogy a reális kristályok hibahelyeket tartalmaznak. Ez a jelenség lett — amint arra F. Seitz a 40-es években több dolgozatban rámutatott — a disszociáció-elmélet egyik alapvető kísérleti igazolása.

Ezek után fordult figyelme egyrészt az extrém nagy nyomásnak alávetett alkalihalogenid kristályok képlékeny tulajdonságainak elektromos vezetőképesség-méréssel történő vizsgálata felé, másrészt a kristálynövekedés irányába. Eredményeit több nemzetközileg elismert és idézett dolgozat tartalmazza. Különös érdeklődést keltettek azok a vizsgálatok, amelyek a Kossel—Stranski-féle kristálynövekedési elmélet kísérleti alátámasztását tűzték ki célul.

Munkásságának új szakasza indult el az igen vékony és hosszú ún. tűkristályok előállításával. Feltételezte, hogy ezek kevesebb hibát tartalmaznak, mint más kristályok, és így várható, hogy szakítási szilárdságuk megközelíti az elméletileg számított értéket. Feltételezését sikerült igazolnia, és kísérletei nyomán világszerte számos laboratórium foglalkozik ma is tűkristályok előállításával és különböző irányú vizsgálatával.

Újabban az oldatból való kristálymag-képződést és növekedést tanulmányozta. Egyik érdekes felismerése, hogy mechanikai impulzusokkal lavinaszerű magképződés indítható el (Gyulai-féle lavina-effektus).

Munkásságának jelentősége nem mérhető le néhány konkrét eredmény felsorolásával még akkor sem, ha ezek az eredmények egy tudományterület fejlődédének jelentős állomásai. Munkásságával tudományos iskolát alapított, több évtizedes oktatói tevékenysége során pedig generációkat nevelt a természettudományos gondolkodásra. Külön ki kell emelni előadási kísérleteit, didaktikai tárgyú, ill. demonstrációs kísérletekkel foglalkozó dolgozatait, valamint kétkötetes Kísérleti fizika című tankönyvét.

Szeretettel kívánunk mindnyájan Gyulai Zoltán akadémikusnak sok erőt és szép sikereket további munkájához.