Rényi Alfréd

Levelek a valószínűségről

KORUNK TUDOMÁNYA

SZERKESZTI:
ÁKOS KÁROLY

LEKTORÁLTA:
MARX GYÖRGY

TARTALOM

ELŐSZÓ

Előszóként szolgáljon a következő levélváltás.

Chiméres, 1966. április 1.

Rényi Alfréd egyetemi tanárnak
Budapest

Uram!

Ön talán már el is felejtette azt a beszélgetést, amelyet 1962. június 9-én folytattunk a Clermont-Ferrandban, Pascal halálának 300. évfordulója alkalmából rendezett tudományos konferencia alatt. Engedje meg ezért, hogy röviden emlékeztessem beszélgetésünkre. Az említett napon a konferencia tagjai kirándulnak a Puy de Dome hegycsúcsra - oda ahol a Pascal által megtervezett, a légnyomásra vonatkozó kísérletet sógora, Périer 1648. szeptember 19-én végrehajtotta. Miközben a csúcson levő étterem teraszán kávéztunk, és elgyönyörködtünk a kilátásban, természetesen Pascalról beszélgettünk, mégpedig arról, hogy mivel gyakorolta a legnagyobb hatást a tudomány fejlődésére: aero- és hidrodinamikai vizsgálataival, az első számológép megkonstruálásával, az infinitezimális számításra vonatkozó kutatásaival, vagy a valószínűségszámítás létrehozásával?

Beszélgetés közben említettem Önnek azt a levelet, amelyet 1654-ben Pascal a Mersenne által alapított (és később Le Pailleur által vezetett) párizsi „Akadémiához" írt, és amelyben számos munkát sorol fel, mint olyat, amelyek már szinte készen vannak, és amelyeket az Akadémiának rövidesen be fog nyújtani.

Ezek között említi Pascal, egy tervezett munkáját, egy teljesen újszerű, eddig nem vizsgált témáról, a véletlen matematikájáról. Említettem, hogy abból a pár sorból, amelyben Pascal ennek tartalmát ismerteti, kitűnik, hogy teljes mértékben tudatában volt az általa kezdeményezett új tudományág - a valószínűségszámítás - alapvető elvi és gyakorlati jelentőségének. Nagy kár - mondottam én Önnek -, hogy Pascal e tervezett munkáját nem írta meg, különösen, mivel a valószínűségszámításra vonatkozó egyedüli ránk maradt írásai - Fermathoz írt levelei - igen szűkszavúak és kizárólag de Méré lovag feladatainak megoldására (és ezekkel kapcsolatos kombinatorikai problémák tárgyalására) szorítkoznak. Ha nem ismernénk Pascalnak a párizsi Akadémiához írt levelét, még abban sem lehetnénk biztosak, hogy Pascal tudatában volt-e annak, hogy ő és Fermat egy új tudományágnak az alapjait fektették le, és ezzel megindítottak egy olyan folyamatot, amely egész tudományos világszemléletünket forradalmasította. Ön erre azt válaszolta, hogy teljesen elképzelhetetlennek tartja, hogy Pascal a valószínűségszámításra vonatkozó gondolatait soha nem írta volna le, és felvetette, hogy érdemes lenne tovább folytatni a kutatást ezen elvesztett kézirat után. Ezzel az ötlettel kapcsolatban kifejtettem, hogy kevés ember hátrahagyott kézirataival foglalkoztak olyan alaposan, mint Pascal írásaival; megemlítettem, hogy én magam több évet töltöttem levéltári kutatásokkal újabb kéziratok után, számottevő eredmény nélkül. Ön saját véleményét továbbra is fenntartotta azzal, hogy hátha Pascal e munkáját az akkori szokás szerint levelek formájában írta meg, és talán Fermathoz írt és fennmaradt, a kocka játékra vonatkozó levelei nem voltak az egyetlenek, és esetleg e levelezést tovább folytatták. Ön még azt is hozzátette, hogy talán a kutatás eddig azért volt eredménytelen, mert a kéziratot Pascal hátrahagyott iratai között keresték, ahelyett, hogy Fermat hagyatékában kutattak volna az elveszett levelek után.

Ez a megjegyzése akkor elgondolkoztatott, hiszen ötlete valóban kézenfekvő volt. Egyébirányú elfoglaltságaim azonban megakadályoztak abban, hogy alaposabban foglalkozzam a kérdéssel és nem is gondoltam rá egészen 1966 elejéig, amikor egy személyes ügyből kifolyólag Toulouse-ba kellett utaznom. Az történt ugyanis, hogy nagybátyám, egy bogaras agglegény meghalt, reám hagyta vagyonát és Toulouse-i birtokát, azzal a feltétellel, hogy megírom az e birtokért 300 év előtt folytatott pereskedés történetét. Nagybátyám ezen utolsó kívánságának lelkiismeretesen akartam eleget tenni, nemcsak kegyeletből, hanem mert családunk története engem is nagyon érdekel, ezért ez év januárjában Toulouse-ba utaztam és kutatni kezdtem az ottani levéltárban az 1660-as évek bírósági aktái között. Mint már előbb említettem, életemből több évet szenteltem Pascal kéziratainak tanulmányozására, így kézírását - bátran mondhatom - jobban ismertem, mint a sajátomat. Nem csoda hát, hogy amikor - január 17-én este - az iratok lapozgatása közben egy aktacsomóban (amelyen egyébként többek között Fermat aláírása is szerepelt) kezembe került egy levél, azonnal felismertem, hogy az Pascal keze írása. Képzelheti, hogy tűzbe jöttem. Ki sem mozdultam a levéltárból másnap hajnalig, étlen-szomjan folytattam a keresgélést, amíg a másik három levelet is meg nem találtam. Mint később kinyomoztam, ezek a levelek Fermat halála után belekeveredtek a lakásán maradt hivatalos bírósági iratok közé, és így kerültek a levéltárba 1665. január 17-én, ahol pontosan 301 évig senki nem törődött velük.

Így hát teljesen véletlenül jutottam ezeknek a nagy tudományos és tudománytörténeti jelentőségű leveleknek a birtokába. Ezek felfedezése igazában nem az én érdemem, nekem csak szerencsém volt. Ön volt az aki a hipotézist felállította, hogy Pascal elveszett valószínűségszámítási munkáját Fermathoz írt levelek formájában írta meg, és így ez után Fermat hátramaradt iratai között kellene kutatni. Ezért azt javasolom, hogy e leveleket Ön bocsássa a nyilvánosság elé.

Mellékelem a levelek általam legépelt és gondosan ellenőrzött szövegét. Kénytelen vagyok azonban arra kérni, hogy mindazt a munkát, ami a sajtó alá rendezéshez ezen túl szükséges, Ön nélkülem végezze el.

Úgy gondolom, csodálkozni fog e kérésemen, azonban, ha megmondom, miért kérem erre, remélem, meg fog érteni. Találtam ugyanis a bírósági papírok között néhány Fermat keze írásával írt lapot, amelyek számelméleti tárgyúak. Ezeken a lapokon szöveg alig van, főleg képletekkel vannak teleírva, de nyilvánvaló, hogy a számítások a nagy-Fermat-tétellel kapcsolatosak. Most éjjel-nappal ezen feljegyzések megfejtésén dolgozom: remélem, hogy vagy megtalálom Fermat bizonyítását, vagy meg tudom mutatni, hogy ő a sejtését valójában nem tudta bebizonyítani, illetve a bizonyítása hibás volt és erre utolsó éveiben ő maga is rájött. Azt hiszem, megérti, hogy e kérdés annyira izgat, hogy amíg ezt el nem döntöttem, nem vagyok képes semmi mással foglalkozni. Amikor a Pascal-leveleket megtaláltam, arra gondoltam, hogy egy részletes tanulmány kíséretében teszem azokat közzé. De mielőtt ehhez hozzákezdtem volna, kezembe kerültek Fermat fent említett feljegyzései és azóta folyton ezekkel foglalkozom. Ha e papírok titkát megfejtettem, remélem, hozzájutok, hogy megírjam a tervezett tanulmányt a Pascal-levelekről. Úgy érzem azonban, nem tehetem meg, hogy e levelek közzétételét addig halogassam, ezért kérem Önt, gondoskodjék azok mielőbbi megjelentetéséről.

Kérésem teljesítéséért fogadja előre is hálás köszönetemet, és engedje meg, kedves barátom, hogy felhasználjam az alkalmat, hogy őszinte nagyrabecsülésemről biztosítsam Önt. Igaz Híve

Henri Trouverien
az Université de Contebleu
matematika-történet professzora

Budapest, 1966. április 10.

Henri Trouverien professzor!
Chiméres

Uram!

Április 1-i kedves levelét és a Pascal-leveleket köszönettel megkaptam. Kérését természetesen a legnagyobb örömmel teljesítem. Kérem szíves hozzájárulását ahhoz, hogy Pascal leveleivel együtt az Ön hozzám írt levelét is közzétegyem, abból a célból, hogy a tudományos közvélemény előtt világossá váljék, hogy e leveleket Ön fedezte fel, és az is, hogy hogyan bukkant rájuk. Távol áll tőlem, hogy Önt el akarjam vonni a Fermat-feljegyzések megfejtésének munkájától, amelyhez magam és kollégáim nevében is sok sikert kívánok, és amelynek eredményét mi is a legnagyobb érdeklődéssel várjuk. Azonban egy kérdést mégis fel kell tennem Önnek: mit gondol, van-e remény arra, hogy Fermat Pascal levelére írt válaszait meg lehessen találni?

Őszinte tisztelettel
Rényi Alfréd

Chimeres, 1966. május 3.

Rényi Alfréd professzor
Budapest

Uram!

Köszönöm április 10-i levelét. Igazán nagy öröm számomra, hogy magára vállalta a Pascal-levelek közzétételét, és ezzel mentesített engem a kötelesség alól, és lehetővé tette, hogy minden erőmet a Fermat-jegyzetek megfejtésére koncentrálhassam. E feladat sajnos nehezebb, mint gondoltam: Fermat teljesen szokatlan jelöléseket használ, amelyek megértésében még csak az első lépéseknél tartok. Természetesen semmi kifogásom nincs az ellen, hogy előző levelemet (és ha jónak látja, jelen levelemet is) közölje a Pascal levelekkel együtt. Ami Fermat válaszait illeti, a leghalványabb reményt sem látom arra, hogy azok megkerüljenek. Pascal halála után nővére, Gilberte Périer vette gondozásba hátrahagyott írásait, és míg minden egyes Pascal által írt feljegyzést gondosan megőrzött (sőt, lemásolt), sajnos, a Pascalhoz írt leveleket megsemmisítette. Így hát Fermat válaszleveleinek tartalmára csak Pascal viszontválaszaiból következtethetünk.

Igaz barátsággal
Henri Trouverien

PASCAL LEVELEI FERMATHOZ

1. LEVÉL

Párizs, Faubourg Saint-Michel
1654. október 28.

Pierre Fermat úrnak,
Toulouse

Uram!

Közös barátunk, Carcavi úr tegnap értesített, hogy Toulouse-ba utazik és kérdezte, nem kívánok-e Önnek levelet küldeni? Természetesen nem mulasztottam el a kedvező alkalmat, de csupán arra volt időm, hogy néhány sort írjak.[1] Mára azonban kiderült, hogy Carcavi úr két nappal elhalasztotta utazását: így lehetőségem nyílt, hogy részletesen is írjak Önnek.

Most, hogy teljesen tisztázódtak azon kérdések, melyeket de Méré lovag vetett fel alig egy éve, amikor vele, Roannez herceggel és Miton úrral Poitou-ba utaztunk, meg kell mondanom: a szóban forgó problémák megoldásánál is jobban örülök annak, hogy a rólunk való levelezés megszerezte nekem az Ön barátságát. E barátságot mindennél többre becsülöm, mégpedig nemcsak azért, mert Önt tartom ma Európában a legelső geométernek, hanem mert leveleiből olyan embert ismertem meg, akinek barátságára királyok is büszkék lehetnének. Így hát a derék lovag kérdései - ha egyébként nem is lettek volna érdekesek - nekem felbecsülhetetlen szolgálatot tettek. Azonban éppen azért, mert az Ön barátsága olyan fontos nekem, szeretném megosztani Önnel minden gondolatomat: ezért érzem szükségét, hogy elmondjam, miért érdekeltek engem ezek a kérdések annyira és miért tartottam e kérdéseket - két okból is - a matematikusok figyelmére méltónak, és honnan vettem magamnak a bátorságot ahhoz, hogy e kérdések megoldására mintegy versenyre hívjam ki Önt, vállalva, hogy ezzel elvonom Önt azoktól a vizsgálataitól, amelyeket egyébként nálam jobban senki sem csodált. Ámbár e tekintetben - mint mondottam - az én lelkiismeretem tiszta, úgy éreztem, magyarázattal tartozom Önnek, különösen mivel eddigi leveleinkben e kérdések jelentőségéről egyáltalán nem esett szó. Ezek a meggondolások vezettek arra, hogy e levelet megírjam.

Volt azonban egy másik okom is. Úgy hiszem, eljutott Önhöz a párizsi Akadémiához néhány hete írt levelem;[3] nem csodálkoznék, ha netán fellengzősnek találná benne a következő mondatot, amellyel egy tervezett - de még meg nem írt - munkám tárgyát jellemeztem: „Ily módon, összekapcsolva a matematikai bizonyítások szabatosságát a véletlen bizonytalanságával, és ezeket a látszólag homlokegyenest ellenkező dolgokat egymással kibékítve, e tan joggal tarthat igényt a következő, mindkét ellentétes alkotóelem nevét kölcsönvevő, valóban meghökkentő elnevezésre: a véletlen matematikája"[4] E sorokat közvetlenül az után írtam, hogy azok a gondolatok, amelyeket most megpróbálok összefoglalni, kialakultak bennem. Újraolvasva saját szavaimat, ezek felidézik bennem azt az ujjongást, amelyet éreztem, midőn e mondatot leírtam: ujjongás afelett, hogy a matematika egy új - és merem remélni, nagy jövőjű - fejezete van megszületőben. Nem lepne meg, ha valaki azzal vádolna, hogy ebben az ujjongásban része van annak a büszkeségnek, hogy nekem magamnak is részem lehetett az új tudomány létrejöttében. Bár az ilyen fajta büszkeség azon emberi gyöngeségek közé tartozik, melyektől én sem vagyok mentes - ha állandóan harcolok is ellene -, sietek leszögezni, hogy az Ön részét ezen új tudományok létrehozásában a sajátomnál jelentősebbnek érzem. Biztos vagyok abban, hogy mindazt, amit e levélben írok, Ön úgy fogja olvasni, mint a saját - talán eddig ki nem mondott és le nem írt, de már régóta kialakult - gondolatainak tökéletlen megfogalmazását. De ha a megfogalmazás nem is kiforrott, szolgáljon mentségemre, hogy e gondolatok kifejezésére még a megfelelő szavak sem álltak rendelkezésemre, és azokat is magamnak kellett e célra megalkotnom, illetve a mindennapi nyelvből kölcsönvennem és új, szabatos tartalommal felruháznom.

Ezek után, úgy hiszem, megérti, miért éreztem egyenesen ellenállhatatlan kényszert, hogy gondolataimat Önnel közöljem. Úgy hiszem azonban, hogy amikor idáig érkezik levelemben, biztosan azt gondolja: „miért e sok előzetes magyarázkodás?” Szeretném, ha megértené lelkiállapotomat: Ön az első, akivel e gondolataimat közlöm, és - bár több megértésre senkinél sem számíthatok - mégsem vagyok teljesen mentes a szorongástól, sikerül-e magamat megértetnem. Ezért húzom-halasztom, hogy belekezdjek, mint az, aki a foghúzástól fél, és hogy húzza az időt, feleslegesen hosszadalmasan magyarázza az orvosnak, mikor kezdődött fogfájása. De hát valóban elég ebből, térjünk a tárgyra.

Az ember szerintem arra született, hogy gondolkozzék - erre való képessége különbözteti meg az állatoktól, ebben áll emberi méltósága.[5] Kettős végtelenség vesz minket körül: a világegyetem végtelen kiterjedése, amelyhez képest nemcsak magunk, de az egész Föld, sőt a Nap összes bolygóival együtt csak egy csepp a tengerben, és a világ végtelen bonyolultsága, hiszen minden egyes vízcsepp maga is egy külön kis univerzum. E kettős végtelenség között helyezkedünk el mi magunk, akik porszemek vagyunk a csillagokhoz képest, de óriások a vízcseppben nyüzsgő parányi élőlényekhez képest.[6] Akár a csillagokra, akár saját lelkünkbe, akár a múltba, akár a jövőbe tekintünk, sehol sem találunk biztos támpontra. Ha mindazt, amiről azt hisszük, hogy tudjuk, tüzetesebben megvizsgáljuk - figyelmünk gombostűjére tűzzük és logikánk mikroszkópja alá tesszük -, kiderül, hogy semmiben sem lehetünk valóban biztosak. Sovány vigasznak tartom, hogy mivel mindezen kérdésekkel eredménytelenül birkózom, ez azt bizonyítja, hogy én „vagyok”. Engem ugyanis nem az a kérdés izgat, hogy vagyok-e, hanem, hogy ki vagyok tulajdonképpen? Erre a kérdésre viszont nem tudok válaszolni, és ezt a gyötrő bizonytalanságot olykor nehezen viselem el. Nem tudjuk, honnan jövünk, mi végre születtünk, és hová megyünk. Volna hát számunkra bőven gondolkodni való. De vajon ezen gondolkodik-e az emberek többsége? Szó sincs róla: csak a háborúskodáson, a pénzen, az élvezeteken, a szórakozáson, a játékon jár az eszük. A játékost persze nagyon is megértem, hiszen a játék azáltal teszi boldoggá az embert, hogy a játékos elfeledkezik minden gondjáról-bajáról. De vajon valóban jó-e ez neki? Hiszen ily módon elfeledkezik önmagáról is, a játék mákonyként elkábítja és eltereli a figyelmét a valódi kérdésekről.[7] Persze az nem baj, ha valaki néha rövid időre belemerül a játék feledtető, frissítő fürdőjébe, de nem szabad, hogy megrekedjen benne. Mármost a szerencsejátékok csodálatos törvényszerűségeiről való gondolkodást olyan eszköznek vélem, amely segíthet abban, hogy a játékost kiszabadítsa a játék bűvöletéből és visszavezesse a gondolkodás, a magára eszmélés világába. Ebben látom a játék „méltányosságára” vonatkozó matematikai kérdések vizsgálatának egyik - bár távolról sem a fő - hasznát. Mielőtt e kérdések valódi jelentőségére rátérnék, el kell mondanom, hogy de Méré lovagra valóban jó hatással voltak e vizsgálatok. Nemrégiben újból találkoztam vele, és egészen meglepődtem, mennyire megváltozott egy év alatt. Tavaly ilyenkor még arra volt legbüszkébb, hogy semmi sem érdekli igazán, mindent udvarias, de kissé hűvös érdeklődéssel meghallgatott ugyan, de szégyellte volna bevallani, hogy valami igazán érdekli és leköti, arra volt büszke, hogy nem rabja semmilyen szenvedélynek, így tudományos érdeklődésnek sem, és nem is volt az (kivéve a játékot). Ezzel szemben most azzal lepett meg, milyen alapos tudásra tett szert ilyen rövid idő alatt a matematikában és milyen komolyan, alaposan, és nem is eredmény nélkül foglalkozik különböző problémákkal. Ne értse félre, nem áltatom magamat azzal, hogy ez a változás az én művem, hiszen ennek csírája megvolt már benne, mielőtt megismerkedtünk. Mi sem tanúsítja ezt jobban, mint az, hogy a kocka játékra vonatkozó feladatokat ő magától vetette fel, sőt a könnyebbik feladatra egy - meglehetősen körülményes - megoldást talált.[8] A második feladatot azonban, amelyet Ön és én annyira különböző, de ugyanarra az eredményre vezető módon oldottunk meg (talán emlékszik még e feletti örömömben írtam Önnek, hogy az igazság ugyanaz Toulouse-ban mint Párizsban),[9] ő nem tudta megoldani. Azt hiszem, éppen ez okozhatta benne a változást, bántotta büszkeségét, hogy erre nem volt képes, különösen, miután megértette mindkettőnk megoldását és úgy érezte, hogy ha komolyabban foglalkozik a kérdéssel, erre ő is rájöhetett volna. Önnek nem kell persze magyaráznom, hogy utólag a legtöbb felfedezésről ezt hiszi az ember, ha azt valóban megértette, úgyhogy ebben én csak annak a biztos jelét látom, hogy a lovag megértette a mi megoldásainkat és ennek nagyon örülök. De megint elkalandoztam a tárgytól, hiszen én nem de Méré lovag megváltozásáról akarok Önnek írni - azt hiszem, ez kevéssé érdekli, mivel nem ismeri őt - hanem a „véletlen matematikájáról".

A nyomasztó bizonytalanság, amelyről az imént beszéltem, részben onnan származik, hogy az emberek azt hiszik, hogy ha valamit nem tudnak biztosan - már pedig biztosan szinte semmit nem tudnak - akkor nem tudnak semmit. Gondolatmenetem kiinduló pontja éppen az, hogy ez tévedés. A részleges tudás is tudás és a részleges bizonyosság is értékes lehet, különösen, ha tudom azt, hogy e bizonyosság milyen fokú. „Hogyan, hát lehet a bizonyosság fokát mérni, számmal kifejezni?" - kérdezheti valaki. Valóban lehet - válaszolom erre -, minden játékos ezt teszi. Amikor egy játékos egy kockát feldob, nem tudhatja, milyen számot fog dobni, de azért mégis tud valamit: azt hogy mind a 6 számnak egyenlő esélye van. Ha a teljes bizonyosságot választjuk egységnek, a hatos dobásának bizonyosságát (és ugyanígy a többi 5 szám dobásának bizonyosságát) 1/6 fejezi ki. Ha egy kockát négyszer egymás után dobunk fel, akkor, mint már de Méré lovag észrevette, előnyös arra fogadni - egyenlő tételek mellett - hogy legalább egyszer 6-ost dobunk: ez szerintem azt jelenti, hogy azon esemény bizonyosságának, hogy a négy dobás során legalább egyszer 6-ost dobjunk, a foka 1/2-nél nagyobb. Ha egy esemény bekövetkezésének és be nem következésének esélyei pontosan egyenlőek, mint például a pénzfeldobásnál a fej és írás esélyei, azt mondom, hogy az esemény bizonyosságának foka éppen 1/2, és ugyanennyi az esemény be nem következése bizonyossági foka. Persze az, hogy a biztos esemény bizonyossági fokát 1-nek választom, tulajdonképpen önkényes: lehetne ehelyett más számot is választani, pl.: 100-at, és akkor a véletlentől függő események bizonyossági fokát százalékban kapnánk meg. Lehetne esetenként más-más számot választani; ha például a kockadobásnál a teljes bizonyosságnak a 6 számot feleltetnénk meg, az egyes számok bizonyossági foka 1-nek adódnék. Legtermészetesebbnek azonban azt érzem, hogy a teljes bizonyosságnak az 1 számot feleltessük meg, és így minden véletlen esemény bizonyossági fokát azzal mérjük, hogy az hányadrésze a biztos esemény teljes bizonyosságának. A lehetetlen esemény bizonyossági foka természetesen 0 lesz; ha tehát egy véletlen esemény biztonsági foka pozitív szám, ez azt jelenti, hogy az illető esemény bekövetkezése lehetséges - habár ennek esélyei esetleg rendkívül csekélyek. Hadd jegyezem meg rögtön, hogy a bizonyosság fokának külön elnevezést adtam: valószínűségnek nevezem. A szó megválasztásán sokat töprengtem és végül ezt találtam a legkifejezőbbnek. A mindennapi szóhasználattal ez, úgy érzem, teljes összhangban van. Persze a mindennapi beszédben csak azt szoktuk mondani valamiről, hogy „valószínű", vagy, hogy „nem valószínű", illetve egy eseményről azt, hogy „valószínűbb", mint a másik. Én viszont abból az alapfeltevésből indulok ki, hogy minden olyan eseménynek, amelyek bekövetkezésében nem lehetünk biztosak, de nem is tekinthetjük azt kizártnak, más szóval minden olyan eseménynek, amely a véletlentől függően be is következhet meg nem is, a valószínűsége egy meghatározott - nulla és egy közé eső - számmal fejezhető ki. Azoknak az eseményeknek, amelyeket a mindennapi szóhasználat szerint valószínűnek nevezzük, a valószínűsége 1-hez (a teljes bizonyosság valószínűségéhez) van közel. Míg azoknak az eseményeknek, amelyeket a mindennapi életben valószínűtlennek nevezünk, a valószínűsége 0-hoz (lehetetlen esemény „valószínűségéhez") van közel. A szó megválasztásában kissé zavart, hogy a kazuisztikában a „valószínű" jelzőt más értelemben használják. A hitre vonatkozó kérdések esetében bizonyosnak nevezik az olyan megállapításokat, amelyek a Szentírásban, pápai bullákban vagy zsinatok határozataiban találhatók, „valószínűnek" viszont az olyan megállapításokat nevezik amelyek az egyház valamely doktorának könyvében találhatók meg. Ha tehát ugyanabban a kérdésben különböző doktorok egymásnak ellentmondó módon foglaltak állást, ezen ellentmondó megállapítások mindegyikét „valószínűnek" nevezik.[10] Szerintem azonban ez a különös szóhasználat nem ok arra, hogy kerüljem a „valószínűség" szó használatát, hiszen nem hiszem, hogy a jezsuitákon kívül ez bárkinél is félreértésre adhat okot. Az elnevezések megválasztásának kérdésében egyébként Descartes-ot követem, aki azt mondja Reguliában,[11] hogy „valahányszor egy új szakkifejezést akarok bevezetni, kiválasztom a rendelkezésre álló szavak közül a nekem legalkalmasabbnak tűnőt és azt a továbbiakban az általam lerögzített értelemben használom". A következőkben mindenesetre mindig a „valószínűség" elnevezést fogom használni a bizonyosság fokát kifejező számra.

A lényeg - mint mondottam - az, hogy a részleges tudásnak is van értéke, de csak ha meg tudjuk mondani, hogy az milyen fokú; ha számszerűen ismerjük egy esemény valószínűségét, akkor valami határozottat tudunk róla, jóllehet az tulajdonképpen bizonytalan. A részleges bizonyosságot tehát meg kell becsülni, csak éppen túlbecsülni nem szabad és nem szabad a teljes bizonyossággal összetéveszteni. Montaigne - akinek Esszéi minden más könyvnél kedvesebbek számomra, habár magamban gyakran vitatkozom vele - ezt úgy fejezte ki, hogy „Meggyűlöltetik velem a valószínű dolgokat azok, akik ezeket bizonyosnak állítják".[12] Egyébként Montaigne a szívemből beszél. Sokszor előfordul, hogy barátaim meg akartak valamiről győzni, amivel én - ha nem is maradéktalanul - de nagyjában és egészében, bizonyos fenntartásokkal egyetértettem; ők azonban azt erőltették, hogy mindenben és minden fenntartás nélkül az ő álláspontjukat fogadjam el. A vita eredménye mindig az lett, hogy álláspontjaink még jobban eltávolodtak egymástól, mert még arról is, amiről eleinte azt hittem, hogy egyetértünk, kiderült, hogy másképpen értjük, és úgy váltunk el, mint akiknek szinte mindenben ellentétes az álláspontjuk. Azt hiszem, Montaigne-nak is ilyen élményei lehettek, mert szükségszerűen ez történik mindenkivel, akinek szavak és tettek egyet jelentenek - quibus vivere est cogitare[13] -, ha ilyen helyzetbe kerül. De megint elkalandoztam, hiszen Montaigne-ra csak azért hivatkoztam, hogy ezzel is megmutassam, hogy a valószínűségek számszerű mérésének gondolata, ha új is, de logikus folytatása régóta jól ismert gondolatoknak.

Bizonyára észrevette, hogy a bizonyosság fokának mérésével kapcsolatban én itt hallgatólagosan egy feltevéssel éltem, ugyanis feltettem, hogy a teljes bizonyosság korlátlanul osztható, ugyanúgy, mint a vonal, vagy a tér, vagy a számok. Ezzel kapcsolatban érdemes megvizsgálni, hogy valóban bármely 0 és 1 közé eső szám lehet-e valószínűsége egy véletlentől függő eseménynek. Igen egyszerű példával meg tudom mutatni, hogy ez valóban így van.

Barátaim általában mosolyognak azon a szokásomon, - amellyel Párizsban egyedül állok, pedig én ezt a legtermészetesebb dolognak érzem -, hogy állandóan órát hordok a zsebemben és azt éjjel az ágyam mellé teszem, hogy ha az éjszaka folyamán felébredek (ami gyakran előfordul), tudjam, hány óra van. Mármost kérdezem, mi a valószínűsége annak, hogy amikor ránézek az órámra, a nagymutató pl. 15 és 20 perc közé mutasson? Mivel a nagymutató egyenletesen mozog, tehát minden 60 percből 5 percet - vagyis minden óra 12-ed részét - tölti ilyen helyzetben, így a keresett valószínűség $\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$. Úgy is számolhattam volna, hogy a szóban forgó helyzetben lesz a nagymutató, ha iránya egy bizonyos 30°-os szögbe esik, és így a valószínűség

$\frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{12}$. Ha viszont olyan körívet jelölök ki az órán, amelyhez tartozó szög a teljes 360°-os szögnek x-edrésze, akkor éppen x lesz annak a valószínűsége, hogy amikor felébredek és órámra nézek, a nagymutató éppen az említett körív egy pontjára mutasson. E példában x nyilván minden 0 és 1 közé eső értéket felvehet.

Persze a szerencsejátékoknál csak olyan valószínűségek fordulnak elő, amelyek egész számok hányadosaiként fejezhetők ki, hiszen a játékoknál mindig meg lehet számolni, hogy a játéknak hány különböző, egyformán lehetséges, egymást kizáró kimenetele lehet és bármely, a játék eredményére vonatkozó esemény valószínűsége egyenlő az esemény bekövetkezésére nézve kedvező kimentelek számának és az összes kimenetelek számának hányadosával. Például, ha egy kockát feldobunk, az összes kimenetelek száma 6, hiszen az eredmény az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számok bármelyike lehet és ezek nyilván egyformán lehetségesek. Tehát annak a valószínűsége, hogy a dobott szám 6-os, 1/6-al egyenlő, míg annak a valószínűsége, hogy ne hatos legyen, 5/6-al egyenlő, hiszen ha nem 6-ost dobunk, akkor az 1, 2, 3, 4 és 5 számok egyikét dobjuk. A 6-os dobás és ellentéte valószínűségének összege tehát 1. Ez persze nemcsak ebben a példában van így, hanem akármilyen eseményre igaz, hogy az esemény és ellentéte valószínűségeinek összege eggyel egyenlő, hiszen a bizonyosság valószínűsége 1 és ez oszlik meg az esemény és ellentéte között. Általában igaz, hogy ha egy esemény több egymást kizáró módon jöhet létre, valószínűsége megoszlik ezen módokon való létrejöveseinek valószínűségei között - pontosan ugyanúgy, mint ahogy, ha egy bizonyos mennyiségű folyadékot több edénybe töltünk szét, az egyes edényekben levő folyadékmennyiség köbtartalmainak összege kiadja az egész folyadékmennyiség köbtartalmát. Más szavakkal, ha több - ugyanazon játék kimenetelére vonatkozó - egymást kizáró eseményt vizsgálunk, annak valószínűsége, hogy ezen események közül valamelyik (tehát az első, vagy második, s.i.t.) bekövetkezzék, egyenlő lesz ezen események valószínűségeinek összegével. Ezt a szabályt a valószínűségek összeadási tételének neveztem el.

E teljesen magától értetődő tétel mellett még egy másik általános, valamivel mélyebben fekvő tételt is találtam: a valószínűségek szorzási tételét. Ez a következőképpen szól: Ha egy játékot kétszer játszom és azt kérdezem, mi a valószínűsége annak, hogy egy bizonyos esemény bekövetkezzék az első játszmánál és egy bizonyos másik esemény (amely lehet esetleg azonos az elsővel) bekövetkezzék a második játszmánál, a válasz az, hogy a két esemény valószínűségének szorzatát kell venni. Például, ha a kockát kétszer dobom fel, annak a valószínűsége, hogy sem az első, sem a második alkalommal ne dobjak hatost: 5/6·5/6=25/36. Ugyanis a két dobás eredménye 36 különböző, az 1, 2, ..., 6 számokból álló számpár lehet, és ezen számpárok közül 25 olyan van, amely nem tartalmazza a hatost. Hasonlóképpen, annak a valószínűsége, hogy 4 dobás közül egyszer se dobjunk hatost: 25/36·25/36=625/1296, hiszen ez azt jelenti, hogy sem az első két dobás, sem a második két dobás során egyszer sem dobunk hatost. Ennélfogva az ellentétes eseménynek, vagyis, hogy legalább egyszer hatost dobunk, a valószínűsége: 1 - 625/1296 = 671/1296; így visszajutottunk de Méré lovag feladatának ismerős megoldásához.

Ezzel el is mondtam a véletlen matematikájának két alaptételét. Azt kérdezhetné Ön, hogy ezek a meggondolások valóban a matematikához tartoznak-e, vagy valamely - matematikai meggondolásokat is felhasználó - más tudományhoz. Szerintem a matematika egy új ágáról van szó, melyet joggal nevezhetünk a véletlen matematikájának (mint azt az Akadémiához írt levelemben írtam), de ugyanilyen joggal nevezhetjük valószínűségszámításnak is; e második elnevezés talán még kifejezőbb is, mint az előző.

Nevezzük hát el tudománynak ezt az új ágát, amelynek célja, hogy a véletlen, bizonytalan dolgokról biztos tudást nyújtson, valószínűségszámításnak. Arra a kérdésre, hogy a valószínűségszámítás valóban a matematika egy ága-e, a válasz persze attól függ, mit értünk matematikán. Ha valaki a matematikán csak annak hagyományos ágait - a geometriát, az aritmetikát és algebrát -, érti, akkor persze ebbe a szűkkeblű meghatározásba nem fér bele semmilyen új fejezet. Én azonban e tekintetben Descartes pártján állok, aki azt mondotta,[14] hogy a matematikához kell számítani minden olyan vizsgálatot, amely a rend és a mérték kutatására irányul, függetlenül attól, mi a tárgya, minek a rendjét és mértékét keresi.

Most, hogy mindezt leírtam, egyszerre érzek megkönnyebbülést - hogy túlestem a megfogalmazás nehézségén - és aggódást - hogy valóban sikerült-e érthetően kifejeznem, ami bennem forrong. Kérem, ne hagyjon sokáig ebben a bizonytalan lelkiállapotban, hanem írja meg, hogyan vélekedik „valószínűségszámítás” névre elkeresztelt újszülöttről. Ha gondolatmenetemben bármilyen hiányt, pontatlanságot vagy ellentmondást lát, kérem, írja meg tartózkodás és kímélet nélkül - biztos lehet benne, hogy Öntől a legszigorúbb bírálatot is hálásan fogom fogadni.

Sok fontos kérdést, amelyekről pedig már sokat gondolkoztam, itt nem is érintettem. Ha válaszából azt látom, hogy Ön szerint is helyes úton járok, igyekezni fogok többi gondolataimat is rendbeszedni és Önnek megírni. Persze lehet, hogy gondolataim megfogalmazásának fáradságától meg fog kímélni azáltal, hogy azokat válaszában olyan világos formában látom viszont, ahogy én nem is volnék képes kifejezni. Ugyanis bármilyen hosszúra nyúlt is e levél, nem fejezhetem be anélkül, hogy el ne mondanám: amikor e kérdésekről gondolkoztam, többször is elővettem az Ön leveleit a kocka játékról és igyekeztem a sorok között olvasva kitalálni le nem írt gondolatait; magamban állandóan Önnel vitáztam és sok minden, amit itt leírtam, válasz olyan kérdésekre, amelyeket ezen elképzelt beszélgetések során Ön tett fel nekem. Boldog lennék, ha kiderülne, hogy - amint hiszem - ez nem puszta képzelődés részemről, hanem - ha nyersen és hiányosan is - valójában az Ön gondolatait vetette papírra

az Ön legőszintébb és leghűségesebb

híve és tisztelője
Blaise Pascal

2. LEVÉL

Paris, 1654. november 6.

Pierre Fermat úrnak,
Orléans

Uram,

levél még nem okozott olyan örömet, mint az Öné, amelyet Carcavi úrral küldött nekem. Alig vártam Carcavi úr visszaérkezését, hogy kifaggassam, hogyan fogadta Ön október 28-i levelemet. Csak arra számítottam, ígéretet hoz Öntől, hogy rövidesen válaszol nekem: az, hogy a választ is elhozta, meghaladta várakozásaimat. Ezért - bár levele tulajdonképpen hónapokra elég töprengeni való nyújt - mégis azonnal válaszolok, noha tudom, hogy éppen e sietség miatt válaszom nem lesz minden tekintetben teljes. Úgy hallottam, hogy egyes sakkozók homokórával játszanak, úgyhogy gondolkodási idejük korlátozva van. Úgy érzem, levelezésünk ilyen sakkjátszmához hasonlít és én örömmel veszek ebben részt, azt sem bánva, hogy nem kétséges: ebből a versenyből csak Ön kerülhet ki győztesen.

Megpróbálok tehát kérdéseire válaszolni. Nem akarok azonban Ön előtt a valóságnál jobb színben feltűnni, ezért megmondom őszintén, hogy kérdéseire csak azért tudok egyáltalán ilyen gyorsan válaszolni - hogy helyesen vagy helytelenül, azt Ön döntse el -, mert e kérdések kivétel nélkül felmerültek már bennem is és így nem értek engem készületlenül. Sőt, amikor előző levelemet lepecsételtem, világosan láttam, hogy e kérdésekre - különösen második kérdésére - már abban ki kellett volna térnem. Én általában úgy vagyok az írással, hogy amikor a végére érek, akkor jövök rá, mivel kellett volna kezdenem. De éppen azért, mert ehhez hozzászoktam - és ily módon, amikor valamilyen írás végére pontot teszek, soha nem vagyok megelégedve az elejével -, nem változtattam rajta, hanem elküldtem Önnek úgy, ahogy volt, tudva, hogy ha átírtam volna, a végén akkor sem lettem volna vele megelégedve.

Első kérdésére a válasz igen egyszerű és meggyőződésem, hogy azt Ön is jól ismeri, csak engem akart próbára tenni, mennyire alaposan gondoltam át, amit írtam. Kérdése ahhoz kapcsolódik, hogy - mint írtam - a szerencsejátékoknál egy esemény valószínűségét úgy számíthatjuk ki, hogy a játék egyformán lehetséges és egymást kölcsönösen kizáró kimenetelei közül megszámoljuk azokat, amelyek a szóban forgó esemény bekövetkezését vonják maguk után, tehát amelyek az eseményre nézve *kedvezőek,* és ezt a számot elosztjuk a játék összes egyformán lehetséges kimenetelei számával (tehát az eseményre nézve kedvező és kedvezőtlen esetek számának összegével). Helyesen mutat Ön rá, hogy „egyformán lehetséges” kimenetelek helyett „egyformán valószínű” kimenetelekről is beszélhetünk, a kettő ugyanazt jelenti. Mármost az Ön kérdése az, hogy itt nem circulus vitiosus-ról van-e szó, hiszen látszólag a valószínűség definíciójához felhasználjuk a valószínűségek egyenlőségét, vagyis a valószínűséget a valószínűséggel, azaz önmagával definiáltuk, márpedig egy fogalom meghatározásánál nem szabad magát a fogalmat felhasználni, hiszen ez olyan, mintha önmagunkat a saját hajunknál fogva próbálnánk felemelni.

E kérdésre természetesen azt válaszolom, hogy itt nem erről van szó, abban amit írtam, semmilyen logikai hiba sincs, hiszen itt nem a valószínűségnek mint fogalomnak a definíciójáról, csak a valószínűségek kiszámítására szolgáló szabályról, a valószínűség számértékének meghatározásáról van szó, konkrét egyszerű esetekben. Én feltételeztem, hogy minden véletlen eseményhez hozzárendelhető egy meghatározott 0 és 1 közé eső szám, melyet az esemény valószínűségének neveztem és amely az esemény bekövetkezésére vonatkozó nem teljes bizonyosság fokát fejezi ki. Mármost azt, hogy két esemény valószínűsége egyenlő-e, el lehet dönteni anélkül, hogy ezek valószínűségének számértékét ismerném. Az, hogy egy kocka szabályos, azt jelenti, hogy ha az oldalai nem volnának megszámozva, nem is lehetne őket megkülönböztetni, és ha - mialatt kimegyek a szobából - valaki átszámozza az oldalakat, visszatérve ezt észre sem fogom venni. Így tehát nyilvánvaló, hogy a kocka ugyanakkora valószínűséggel eshet minden egyes oldalára. Ugyanarról van itt szó, mint amikor két távolságról úgy látom be, hogy egyenlő hosszú, hogy egymásra helyezem őket és megállapítom, hogy végpontjaik pontosan egybeesnek; így el lehet dönteni, hogy két távolság egyenlő-e, anélkül, hogy megmérném a hosszúságukat. Hasonlóképpen kétkarú mérleggel súlyok nélkül is el lehet dönteni, hogy két tárgy egyforma súlyú-e.

Rátérek most második kérdésére, melyre a válasz már távolról sem ilyen egyszerű. Ön ugyanis azt kérdezi, hogyan lehet egy hamis - ólmozott - kocka esetében (melynek súlypontja nem esik a kocka mértani középpontjába) kiszámítani annak a valószínűségét, hogy e hamis kockával egy meghatározott számot, pl. hatost dobjunk. A kérdés első pillanatra ártatlannak látszik, valójában azonban nagyon súlyos kérdés, mert egészen alapvető problémára vet fényt, olyan problémára, amellyel tulajdonképpen már első levelemben kellett volna foglalkoznom. Persze, ha Ön barátomnak, de Méré lovagnak tenné fel a kérdést, azt hiszem, ő ezt azzal hárítaná el, hogy ő csak úriemberekkel szokott kockázni, olyan társaságban, ahol nem szokás hamis kockával játszani, és ha kiderülne egy kockáról, hogy hamis, azt azonnal kidobnák - azzal együtt, aki hozta. Joggal kérdezhetné Ön, miből vennék észre, hogy a kocka hamis. A lovag nemigen felelhetne mást, mint azt, hogy aki a hamis kockával játszik, az többször dobna hatost, mint ahogy egy szabályos kockánál várható, hiszen éppen ezt akarják elérni azok, akik hamis kockát készítenek. Ha Ön azt firtatná a továbbiakban - remélem, megbocsát nekem azért, hogy egy képzeletbeli párbeszédet írok Önnel mint főszereplővel - szóval megkérdezné - nyilván nem is kérdezhetne mást -, hogy szabályos kocka esetében mit várna a lovag, a válasz csak az lehetne; azt várja, hogy szabályos kockával való hosszú ideig tartó játék során körülbelül ugyanannyiszor dob az ember hatost, mint bármely más számot, tehát a dobások számának körülbelül az 1/6-ában dob hatost.

Ezzel azonban a lovag, bár nem is törekedett erre, máris felelt volna az Ön kérdésére. Ha ugyanis a hamis kocka az összes dobások számának körülbelül x-edrészében esik úgy, hogy a hatossal jelölt oldala van felül, ahol x valamilyen 1/6-nál nagyobb szám, akkor annak valószínűsége, hogy e kockával hatost dobjunk, nyilván éppen x-szel egyenlő. Erre Ön megint feltehetne egy fogas kérdést. És pedig azt, hogy ha egy hamis kockával valaki 600-szor dob, és ennek során a 6-os 150-szer jött ki, akkor biztosak lehetünk-e abban, hogy e kockával a 6-os dobásának valószínűsége pontosan $\frac{150}{160} = \frac{1}{4}$? A lovag azt az ellenvetést tehetné (feltéve persze, hogy olvasta előző levelemet és az abban bevezetett kifejezést használja), hogy ez elsietett következtetés volna, hiszen ha a kocka szabályos és így a 6-os dobásának valószínűsége pontosan 1/6 volna, 600 dobásból általában nem pontosan 100-szor jönne ki a hatos, csak körülbelül 100-szor, így a hamis kocka esetében sem állíthatjuk, hogy a 6-os dobásának valószínűsége pontosan 1/4, csak azt, hogy közel van 1/4-hez. Erre Ön feltehetné, hogy ha így csak közelítőleg lehet meghatározni a 6-os dobás valószínűségét a hamis kockával, akkor hogyan lehet mégis pontosan meghatározni azt. Erre a lovag - mint gyakorlott játékos - nyilván azt válaszolná, hogy olyan módszert ugyan nem ismer, amellyel teljes pontossággal meg lehetne határozni a 6-os dobásának valószínűségét a hamis kockával, de ha Önt a kapott közelítő érték nem elégíti ki - bár ez a kísérlet szinte kétséget kizáróan igazolja, hogy a kocka hamis, így leghelyesebb azt rögtön tűzbe vetni -, módjában állna még megbízhatóbb, még jobb közelítést kapni a szóban forgó valószínűségre azáltal, hogy egy újabb - az előzőnél hosszabb - mondjuk 1200 dobásból álló dobássorozatot végez és kiszámítja, hogy az összes dobások hányadrészében jött ki a hatos. Ha például 1200 dobás során a 6-os 288-szor jönne ki, akkor a szóban forgó valószínűségre a $\frac{288}{1200} = 0{,}24$ megbízhatóbb közelítő értéket kapná.

Lehet, hogy ehhez még hozzátenné a lovag - mert, mint már múltkor írtam Önnek, újabban nagyon érdeklődik a filozófia iránt -, hogy míg szabályos kocka csak egyféle van, egy kocka végtelen sokféle módon lehet hamis, ugyanúgy, mint ahogy hazudni is végtelen sokféleképpen lehet.

Nem folytatom tovább e képzelt párbeszédet, mert azt hiszem, ennél sokkal többet de Méré lovagtól úgysem igen tudhatna meg - és mindezt Ön úgy is tudja. Megpróbálok inkább saját szavaimmal válaszolni az Ön kérdésére. A rövidség kedvéért állapodjunk meg abban, hogy ha bizonyos számú, azonos körülmények között végrehajtott kísérlet mindegyikét megfigyeljük abból a szempontból, hogy egy A esemény mely kísérleteknél következett be és melyeknél nem, nevezzük azon kísérletek számát, melyeknél az A esemény bekövetkezett, az A esemény gyakoriságának a szóban forgó kísérletsorozatban, míg az A esemény gyakoriságának és az összes megfigyelt kísérletek számának hányadosát az A esemény relatív gyakoriságának nevezzük. Mármost mindenki, akinek elegendő tapasztalata van a szerencsejátékokban, tudja, hogy egy esemény relatív gyakorisága egy sok játszmából álló játszmasorozatban általában közel lesz egy meghatározott számhoz, mégpedig éppen ahhoz az értékhez, amelyet az illető esemény valószínűségének neveztünk és általában annál közelebb lesz ehhez, minél nagyobb a játszmák száma. A 6-os dobásának relatív gyakorisága például kocka több százszor való feldobása esetén igen közel lesz a 6-os dobás valószínűségéhez, tehát ha a kocka szabályos 1/6-hoz, ha azonban nem szabályos, akkor általában valamely más számhoz. Hamis kocka esetében a 6-os dobásának valószínűségét csak tapasztalati úton lehet több-kevesebb pontossággal meghatározni. Elvileg e módon tetszőleges pontossággal meg lehetne határozni e valószínűséget, gyakorlatilag persze nem lehet e pontosságot tetszőlegesen fokozni, hiszen ez rengeteg időt igényelne - sőt, közben a kocka el is kopna. Azt hiszem azonban, hogy Önt nem is az érdekli valójában, hogy egy hamis kockánál mi a 6-os dobás valószínűségének pontos értéke, hanem kérdésének valódi tartalma az, hogyan lehet egy olyan véletlentől függő esemény valószínűségét meghatározni, amelynél nem lehet visszavezetni a kérdést arra, hogy a szóban forgó kísérletnek hány egyforma valószínűségű, egymást kizáró kimenetele lehetséges. A szabályos kocka esetében alkalmazott meggondolást *szimmetria-meggondolásnak* nevezhetjük, mivel a szabályos kocka szimmetriáján alapszik. Persze, a kristályok példája mutatja, hogy a szimmetria a természetben is gyakran előfordul, nemcsak az ember által mesterségesen előállított tárgyak esetében. Másrészt számos természeti jelenségnél nem tapasztalható pontos szimmetria. Ha a tengerparton sétál az ember és megvizsgálja a víz által lecsiszolt kavicsokat, nemigen talál közöttük olyant, amelynek alakja valamely szabályos mértani idom - például pontos gömb - volna. Az ember maga sem egészen szimmetrikus. Nemrégiben olvastam valahol, hogy bár a régi rómaiak ismerték a kocka játékot is és az a gazdagok között eléggé el is terjedt, a katonák nem szabályosra csiszolt fa- vagy csontkockákkal - tessera-val -, hanem a kecske vagy a juh térdkalácsának egy darabkájával, az ún. talus-szal vagy taxillus-szal kockáztak. E csontocskákat a régi görögök is ismerték és asztragalosz-nak nevezték. E csontocskák esetében az egyes lehetséges dobásfajták valószínűségeit már csak tapasztalati úton, a relatív gyakoriság megfigyelése útján lehet közelítőleg meghatározni.

A taxillusnak nevezett csontocskának 6 oldala van ugyan, de ezek közül kettő domború és így csak négy különböző oldalán képes megállni. A görögök és rómaiak általában négy taxillust dobtak fel egyszerre: a legértékesebb dobásnak az számított, ha a négy csontocska mindegyike más-más oldalával felfelé esett: az ilyen dobást Venus-nak nevezték. Nemrégiben szereztem két ilyen csontocskát és kísérleteket végeztem velük. Az egyiknél az egyes oldalak gyakoriságai 1000 dobás során 408, 396, 91 és 105 voltak. A másikkal már csak 100 dobást végeztem, azután valahogy elveszett a csontocska; a 100 dobás során a gyakoriság 38, 43, 11 és 8 voltak. Jelöljük a taxillus helyzetei közül a két valószínűbbet A-val és B-vel, a két kevésbé valószínűt C-vel és D-vel. Azt hiszem, nem tévedek nagyot, ha ezen megfigyelések alapján az egyszerűség kedvéért felteszem, hogy a taxillusnál az A és B helyzet valószínűsége 4/10, a C és D helyzeté 1/10. Ez esetben - mint Ön is könnyen kiszámíthatja - 4 taxillusszal való dobás esetén a Venus-figura dobásának valószínűsége $\frac{24}{625}$. Ugyanis a négy helyzet valószínűségeit az előző levelemben említett szorzási szabály értelmében össze kell szorozni, így $\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{16}{100000}=\frac{1}{625}$-öt kapunk, ez azonban még csak annak a valószínűsége, hogy a négy taxillust az 1, 2, 3, és 4 számokkal megszámozva az 1. taxillus az A helyzetben, a 2. a B helyzetben, a 3. a C helyzetben, a 4. pedig a D helyzetben álljon meg. Mivel azonban a négy taxillust 24-féleképpen lehet az 1, 2, 3 és 4 számokkal megszámozni, illetve az A, B, C, D betűket 24 sorrendben lehet leírni, tehát a Venus-esemény 24 különböző, egymást kizáró módon jöhet létre és így az összeadási szabály szerint a Venus-dobás valószínűsége $\frac{24}{625}$, vagyis valamivel kevesebb, mint $\frac{1}{25}$. Érthető, miért tartották a rómaiak olyan szerencsésnek azt, akinek Venus-t sikerült dobnia.

A taxillusok nem pontosan egyformák és így két különböző taxillus esetében lehet, hogy az A dobás valószínűsége nem pontosan ugyanaz, pl. az egyiknél 0,4, a másiknál 0,38, ha azonban egyetlen egy taxillust veszünk, ennél az A dobás valószínűsége a taxillus minden egyes feldobásánál pontosan ugyanaz. Ezzel szemben a gyakoriság maga is a véletlentől függ és így nem lehet pontosan előrelátni, hogy mekkora lesz az értéke, csak azt tudjuk, hogy közel lesz a valószínűséghez. Ha pl. egy taxillusszal, amelynél az A dobás valószínűsége 0,4, 100-szor dobunk, egyáltalában nem biztos, hogy pontosan 40-szer dobunk A-t, lehet ez a szám 39 vagy 41, 36 vagy 44 stb.: ha többször egymásután végzünk 100-100 dobást, általában más és más lesz az A dobás gyakorisága az egyes 100-az sorozatokban és így a relatív gyakoriság is sorozatról sorozatra véletlenszerűen változni fog, de általában csak kevéssel fog eltérni 0,4-től - az A dobás valószínűségétől. A valószínűség tehát az a szilárd pont, amely körül a relatív gyakoriság a véletlentől függő, előre nem látható és szabálytalan módon ingadozni fog, de a valószínűségtől szeszélyes változásai során legtöbbször csak kevéssel fog eltérni. Ha a megfigyelések számát növeljük, a gyakoriságnak a várt értéktől (vagyis a valószínűség és az összes megfigyelések számának szorzatától) való eltérései általában növekedni fognak, de relatív gyakoriságnak a valószínűségtől való eltérési általában kisebbek lesznek. Ha például a taxillusszal 400-szor dobunk, a C oldal dobásainak tényleges száma a várt értéktől, vagyis $400 \cdot 1/10 = 40$-től általában ritkán fog 12-nél többet eltérni, míg ha 1000 dobást végzünk, a C oldal gyakorisága a várt értéktől, azaz $1000 \cdot 1/10 = 100$-tól elég gyakran fog 12-nél többet eltérni, 20-nál többel azonban már csak ritkán; ez azt jelenti, hogy míg a relatív gyakoriság 400 dobás esetében általában 7/100 és 13/100 között lesz, 1000 dobás esetében már legtöbbször 8/100 és 12/100 között lesz, s.i.t.

Míg tehát egy véletlen esemény valószínűsége egy meghatározott számérték (bár esetleg mi nem ismerjük pontosan az értékét), amely nem függ a véletlentől, ugyanezen véletlen esemény gyakorisága a véletlentől függő, bizonytalan érték, amelynek pontos értékét nem lehet előre látni, csak a megfigyelések elvégzése után lehet megállapítani. Utólag persze pontosan ismerjük a relatív gyakoriság értékét, de nem szabad elfeledkeznünk arról, hogy ez az érték más is lehetett volna és ha megismételjük a kísérletet, számítanunk kell arra, hogy valóban más értéket kapunk. Ha a valószínűséget ismerjük - például szimmetria meggondolások alapján, esetleg az összeadási és szorzási vagy más szabályokat is felhasználva kiszámítottuk -, akkor előre láthatjuk több-kevesebb pontossággal, hogy a relatív gyakoriság mekkora lesz, míg ha a valószínűséget nem ismerjük, annak értékére a relatív gyakoriság megfigyelése útján következtethetünk több-kevesebb pontossággal. A kétféle következtetés azonban gyökeresen különböző jellegű.

Az első következtetés olyan jellegű, mint amikor ismerjük két fém fajsúlyát és ennek alapján előre látjuk, hogy a kétféle fémből készült egyenlő térfogatú testeket egy mérleg két serpenyőjébe téve, melyik oldalra fog billenni a mérleg, míg a második következtetés olyan jellegű, mint amikor egy ismeretlen fajsúlyú anyag fajsúlyát határozzuk meg olymódon, hogy ezen anyagból készült testek súlyát és térfogatát lemérve vizsgáljuk e két szám hányadosát. Megjegyzem, ha e hányadost több, az illető anyagból készült tárgyra nézve meghatározzuk, ezen értékek sem lesznek egymással pontosan egyenlőek, csak közel lesznek egymáshoz, hiszen semmilyen mérés sem tökéletesen pontos.

A valószínűség és a relatív gyakoriság tehát úgy viszonylik egymáshoz, mint a fajsúly valódi és mért értéke. A relatív gyakoriság megfigyelését úgy foghatjuk fel, mint a valószínűség megmérését olyan mérési eljárással, amely természeténél fogva nem teljesen pontos, de annál pontosabb, minél nagyobb számú megfigyelést végzünk.

Ezúton persze egy esemény valószínűségét tökéletesen pontosan sohasem állapíthatjuk meg. Montaigne egy helyütt azt írja,[15] hogy „a tényekből sohasem szerezhetünk teljes bizonyosságot, mert a tények sohasem egyformák". Montaigne állítását azzal egészíthetjük ki, hogy a tényekből még a részleges bizonyosság fokát sem állapíthatjuk meg teljes pontossággal. A gyakorlatban tehát a részleges bizonyosság fokát illetően is meg kell elégednünk a részleges tudással. Egy kicsit olyan ez, mintha Ön az én levelemnek csak egy töredékét kapná kézhez, mert a többit a levél vivője útközben elvesztette, de még e levéltöredék is csak pontatlanul volna olvasható, mivel a levélvivő vízbeesett és így a levél elázott. Remélem, e levelem nem jut erre a sorsra, azonban nagyjából így áll a dolog a régmúlt korokról rendelkezésünkre álló adatokat illetően. Ennek ellenére a történelemtudomány egy és mást még a források hiányos és bizonytalan volta ellenére is meg tud állapítani, de az elmúlt időkről kialakított képünk szükségképpen bizonyos mértékig csak hipotetikus jellegű lehet - habár ezt a történészek nem mindig ismerik be őszintén.

A mondottakat úgy is ki lehet fejezni, hogy egy esemény tényleges megvalósulásainak száma (közelítőleg) úgy aránylik az összes megvalósulási lehetőség számához, ahogy az esemény valószínűsége egyhez, tehát a teljes bizonyosság valószínűségéhez. Tulajdonképpen bámulatos ez a megegyezés a logika és a tények, lehetőség és a megvalósulás között! A két fajta következtetést felváltva is alkalmazhatjuk: a gyakoriságok megfigyeléséből következtethetünk a valószínűségekre és a valószínűségekről így nyert ismeretek alapján következtethetünk a jövőben végbemenő események gyakoriságára. Így segítheti elő a megfigyelés és a gondolkodás, egymást kiegészítve és támogatva, a világ megismerését! Nem ringatom magam azonban abban a tévhitben, hogy ezt én ismertem fel elsőnek; meggyőződésem, hogy ezt már Platón is tudta. Nemrégiben elővettem ugyanis a Timaiost és abban a következő meglepő mondatot találtam:[16] „ahogyan aránylik a keletkezéshez a lét, úgy viszonylik a hiedelemhez az igazság". Abban a meggyőződésemben, hogy e rejtélyesen hangzó kijelentéssel Platón ugyanazt a gondolatot kívánta kifejezni, mint amiről az előbb szó volt, különösen megerősít, hogy közvetlenül e mondat előtt Timaios azokról a dolgokról beszél, amelyek nem bizonyosak, csak valószínűek. A régi görög filozófusok között, úgy tűnik, voltak egyesek - azt hiszem, Carneadész ezek közé tartozott -, akik még tudták, hogy Platón mire gondolt, de azóta e kissé homályos mondat valódi értelme feledésbe merült. Amikor a napokban a Timaiosban e mondatra rábukkantam, úgy éreztem magam, mint azok, akik a föld mélyéből egy gyönyörű torzót ástak ki, és miután azt megtisztították a reáragadt földtől, a márvány újból eredeti fényében ragyog.

Gyertyámból már csak parányi csonk maradt; ebből is látszik, hogy kissé hosszasan válaszoltam második kérdésére. Harmadik kérdésére a válasz, úgy érzem, sokkal egyszerűbb, bár ez a kérdése is mintegy fáklyaként világítja be a téma egyes, eddig homályban hagyott részeit. Remélem azonban, hogy megbocsátja nekem, ha e kérdésre a választ későbbre hagyom, mert holnap kora reggel találkozom egy megbízható úriemberrel, aki holnap indul Orléans-ba, ahol - mint Carcavi úrtól hallom - Ön most tartózkodik, és aki vállalta, hogy e levelet elviszi Önnek.

Szeretném, ha levelemet mielőbb megkapná, és látná, hogy a kérdéseivel elvetett mag nemcsak hogy kikelt, hanem ilyen rövid idő alatt már gyümölcsöt is hozott. Remélem, e gyümölcsöt - bár még nem tökéletesen érett - mégis élvezhetőnek fogja találni. Mivel azonban tartok attól, hogy e gyümölcs kissé fanyar, küldök egy kosár almát is, amely kertemben termett. Tudom, hogy ezek az almák sem különbek, mint azok, amelyek Toulouse-ban teremnek, de talán e szerény ajándék is hozzájárul ahhoz, hogy meggyőzzem Önt: nincs Önnek őszintébb híve és lelkesebb tisztelője, mint

Blaise Pascal

3. LEVÉL

Paris, 1654 november 8,
hajnalban

Pierre Fermat úrnak
Orléans

Uram!

Az éjjel különös álmom volt, amelyből verejtékezve, szívdobogással ébredtem. Hogy eltereljem gondolataimat, elhatároztam, hogy megpróbálok válaszolni harmadik kérdésére, arra, hogy a valószínűségek szorzási szabálya milyen feltételek mellett érvényes.

Ön rámutatott arra, hogyha egy kártyacsomagból kétszer egymásután húzok egy-egy lapot, a szorzási szabály érvényes abban az esetben, ha az elsőnek kihúzott lapot a második húzás előtt visszatesszük a kártyacsomagba és azt újból jól megkeverjük, de nem érvényes, ha nem tesszük vissza. Például, ha a kártyacsomag 16 kártyából áll: a pikk, kőr, treff és káró színek mindegyikéből az ászt, királyt, dámát és bubot tartalmazza, akkor annak a valószínűsége, hogy előszörre királyt húzzunk: 1/4, annak a valószínűsége hogy másodszorra királyt húzzunk: 1/4 - mégpedig akár visszatesszük az elsőnek kihúzott lapot, akár nem -, azonban, ha az először kihúzott lapot nem tesszük vissza, annak a valószínűsége, hogy mind a kétszer királyt húzzunk, valójában nem $1/4 \cdot 1/4 = 1/16$, hanem csak 1/20, hiszen két királyt 12-féleképpen húzhatunk míg az összes lehetőségek száma 240. Valóban, úgy tűnik, mintha ez ellentmondana az első levelemben felállított szorzási szabálynak, azonban ez az ellentmondás csak látszólagos - ha közelebbről megvizsgáljuk a példát, kiderül, hogy a szorzási szabály itt is érvényes. Ha ugyanis előszörre királyt húzunk és azt nem tesszük vissza a második húzás előtt a kártyacsomagba, akkor a másodiknál már csak 15 lap között választhatunk és ezek közt már csak 3 király van, tehát annak a valószínűsége, hogy másodszorra királyt húzzunk azon feltétel mellett, hogy először királyt húztunk, nem 1/4, hanem csak $3/15 = 1/5$, mivel $1/4 \cdot 1/5 = 1/20$, tehát a szorzási szabály itt is érvényes. Azon feltevés mellett, hogy előszörre nem királyt, hanem valami mást húztunk (és a kihúzott lapot nem tesszük vissza), annak a valószínűsége, hogy másodszorra királyt húzunk: 4/15, vagyis 1/4-nél nagyobb, így annak a valószínűségére, hogy előszörre nem királyt, másodszorra azonban királyt húzunk, a szorzási szabály helyes alkalmazásával $3/4 \cdot 4/15 = 1/5$-nek adódik; mivel $1/20 + 1/5 = 1/4$, tehát annak valószínűsége, hogy másodszorra királyt húzunk (tekintet nélkül az első húzás eredményére) ugyanúgy 1/4 akkor is, ha az először kihúzott lapot nem tesszük vissza, mint amikor visszatesszük. Ez azonban csak abban az esetben igaz, ha nem nézzük meg az először kihúzott lapot; ha ugyanis megnézzük és azt látjuk, hogy az előszörre kihúzott lap király, akkor e feltétel mellett csak 1/5 (vagyis 1/4-nél kisebb) a valószínűsége, hogy másodszorra királyt húzzunk, míg azon feltétel mellett, hogy az először kihúzott lap nem király, annak a valószínűsége, hogy másodszorra királyt húzzunk, 4/15 (vagyis 1/4-nél nagyobb). Azt kérdezheti erre Ön, hogyan függhet a valószínűség attól, hogy megnéztem-e az előszörre kihúzott lapot, vagy sem! A kártya nem tudhatja, hogy én megnéztem-e az első lapot! Más szóval, hogyan befolyásolhatja az én tudásom a húzás esélyét, hiszen ez utóbbi csak a kártyacsomag összetételétől függ. Valóban így van, de ha megnézem az előszörre kihúzott lapot, ezáltal éppen az derül ki, hogy a 16 lap közül melyik nincs a 15 között és ennek a lapnak a tényleges hiánya befolyásolja a szóban forgó valószínűséget, mert ettől függ, hogy a megmaradt 15 lap között 4 vagy csak 3 király van-e. Tulajdonképpen félrevezető arról beszélni, hogy megnézzük a kihúzott lapot, hiszen nem számít, hogy én tudom-e, hogy melyik lap, csak az, hogy az valójában király-e vagy nem. Ha azonban semmit sem mondunk a kihúzott lapról, azon esemény valószínűségének kiszámításánál, hogy másodszorra királyt húzunk, figyelemben kell venni mind a két lehetőséget: azt, hogy először királyt húztunk és azt is, hogy nem királyt húztunk, és e lehetőségek valószínűségeivel kell „súlyozni" az 1/5 és 4/15 feltételes valószínűségeket; valóban:

$1/4 \cdot 1/5 + 3/4 \cdot 4/15 = 1/4$.

E példa jól mutatja, hogy ezen - csak látszólag egyszerű - kérdések vizsgálata nagy körültekintést igényel, mert szinte minden lépésnél buktatók várják az embert. Erről máskor majd részletesebben szeretnék írni Önnek. Visszatérve a szorzási szabály kérdésére, ennek szabatos és általános fogalmazása tehát úgy szól, hogy annak a valószínűségét, hogy mind az **A**, mind pedig a **B** esemény bekövetkezzék, úgy kapjuk meg, ha az **A** esemény valószínűségét megszorozzuk a **B** esemény valószínűségével, de utóbbi valószínűséget azon feltevés mellett kell kiszámítani, hogy az **A** esemény bekövetkezett; ez utóbbi valószínűséget nevezzük el a **B** esemény az **A** feltétel melletti feltételes valószínűségének.

Úgy tűnik, mintha itt új fogalmat vezettem volna be: a *feltételes valószínűség* fogalmát. Valójában ez nem teljesen új fogalom, hiszen minden esemény valószínűsége függ azoktól a feltételektől, amelyek mellett az esemény bekövetkezését, ill. be nem következését vizsgáljuk. Amikor azt mondjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy egy kockát feldobva 6-ost dobunk: 1/6, hallgatólagosan feltesszük, hogy a kocka szabályos. Amikor azt mondjuk, hogy 1/4 annak a valószínűsége, hogy az említett kártyacsomagból királyt húzzunk, feltesszük, hogy a kártyacsomag 16 lapból áll, ezek között 4 király van és a kártyák alaposan össze vannak keverve. Ha a feltételek megváltoznak, általában megváltozik a valószínűség is. Valójában tehát minden valószínűség feltételes, ha azonban a feltételek ismeretesek és nem változnak, nem szükséges ezeket mindig megemlíteni; ha azonban a feltételek megváltoznak, akkor ezt figyelembe kell venni. Úgy érzem, hogy a „feltételes valószínűség" kifejezés tulajdonképpen pleonazmus; olyan, mintha „halandó ember"-ről beszélnénk, holott minden ember halandó. A félreértések elkerülése végett azonban mégis célszerű feltételes valószínűségekről beszélni olyankor, amikor a feltételek egyszer s mindenkorra adottak, hanem esetről-esetre változhatnak.

Előfordulhat, hogy egy **B** esemény valószínűsége azon feltétel mellett, hogy az **A** esemény bekövetkezett, ugyanakkora, mint e feltétel nélkül. Ha ez a helyzet, indokoltnak látszik az **A** és **B** eseményeket *függetlenek* nevezni, hiszen ez esetben a **B** esemény bekövetkezésének valószínűsége nem függ attól, hogy az **A** esemény bekövetkezett-e, vagy nem, illetve attól sem, hogy ezt egyáltalán figyelembe vesszük-e. Ha az **A** és **B** események függetlenek, akkor tehát a szorzási szabály a feltételes valószínűség fogalmának felhasználása nélkül is kimondható. Ilyen esetekben minden további megjegyzés nélkül állíthatjuk, hogy annak valószínűség, hogy mind az **A**, mind pedig a **B** esemény bekövetkezzék, egyenlő ezen események valószínűségeinek szorzatával. Ez a helyzet például, ha az **A** és **B** események két különböző kockával való dobásokra vonatkoznak. Ez esetben az **A** és **B** események függetlenségének az az oka, hogy a két kocka egymásra semmilyen befolyást nem gyakorolhat. Ha a két kocka egy fonállal össze volna kötve, akkor a két dobás eredménye volna független. Két esemény azonban nemcsak akkor lehet független, ha nem is tudjuk elképzelni, hogyan befolyásolhatná az egyik esemény bekövetkezése a másiknak az esélyeit. Jelentse például **A** azt az eseményt, hogy az említett kártyacsomagból egy lapot húzva, az a lap treff színű, **B** pedig azt az eseményt, hogy a kihúzott lap király. Ez esetben a két esemény ugyanarra a húzásra vonatkozik, mégis függetlenek, hiszen a 16 lap közt 4 király van, a 4 treff színű lap közt egy király, a többi 12 lap között pedig 3 király, tehát a **B** esemény valószínűsége akkor is 1/4, ha az **A** esemény bekövetkezett, akkor is, ha nem következett be, és akkor is, ha az **A** eseményt egyáltalán nem is vesszük tekintetbe.

November 8, este

Most, hogy újból átolvastam, amit hajnalban írtam, látom, hogy válaszom újabb kérdéseket vet fel. Elgondolkoztam ugyanis azon, mit is jelent tulajdonképpen az, hogy egy kártyacsomag „jól meg van keverve”? Ha megkérdeznék egy gyakorlott kártyást - például de Méré lovagot -, nyilván azt válaszolná, hogy ez azt jelenti, hogy valaki elég sokáig keverte anélkül, hogy csalni próbált volna, tehát a gyakorlott kártyások szokásos mozdulatait szabályosan alkalmazva, a kártyák sorrendjének kialakulását teljesen a véletlenre bízta és nem is próbálta azt befolyásolni. Erre én azt kérdezném, hogy ha nem tudom, hogy ki keverte meg a lapot, megnézve a lapok sorrendjét, vagy kiosztva a lapokat a játékosoknak és megnézve, ki milyen lapot kapott, meg lehet-e állapítani, hogy a kártyát jól megkeverték-e vagy sem? Első pillanatra nem is látszik, hogy ez milyen fogas kérdés; valóban, kíváncsi vagyok, mit válaszolna erre a lovag. Ha ugyanis azt válaszolja, hogy igen, akkor megkérdezhetem, hogy alapos keverésnél mi a valószínűsége annak, hogy 16 lap közül pl. éppen a kőr dáma, vagy bármelyik másik lap kerüljön legfelülre; erre nyilván azt kell válaszolnia, hogy alapos keverésnél minden lap ugyanakkora, tehát 1/16 valószínűséggel kerülhet legfelülre. Ha a kőr dáma van legfelül, mi a valószínűsége - kérdezném tovább -, hogy második helyre a pikk ász (vagy bármelyik másik lap a megmaradó 15 közül) kerüljön? Nyilván 1/15, válaszolná erre a lovag. Folytatva e meggondolást, arra az eredményre jutunk, hogy alapos keverésnél a 16 lap minden elképzelhető sorrendjének valószínűsége ugyanakkora. De akkor hogyan lehet a sorrend alapján eldönteni, hogy a csomag alaposan össze van-e keverve, hiszen bármilyen sorrendet találok is, az ugyanolyan valószínű, mint a többi elképzelhető sorrend? Ha viszont nem lehet eldönteni magából a lapból, hogy alaposan összekeverték-e, akkor van-e egyáltalán ennek a kijelentésnek bármilyen szabatos értelme? Azt mondhatná erre a lovag, hogy persze egyetlen egy keverés eredményéből még nem lehet megállapítani, hogy a keverő csalt-e, de ha jóval többször oszt önmagának jó lapot, mint az várható volna alapos keverés esetén, akkor biztosak lehetünk benne, hogy csalóval van dolgunk. Erre azonban én megkérdezném, hogy úgy gondolja-e, hogy ha valaki alaposan megkeveri a kártyát, akkor minden lehetséges sorrend körülbelül ugyanolyan gyakran fordul elő? Ha már most a gyanútlan lovag igennel válaszol, akkor megint csapdába esett, hiszen 16 lap lehetséges sorrendjeinek száma egyenlő az első 16 szám szorzatával, és e szám oly nagy, hogy ha egy kártyázó társaság éjjel-nappal megszakítás nélkül játszva percenként újra keveri is a lapokat, kereken 39 millió évig kellene játszaniok ahhoz, hogy minden sorrend előfordulhasson. Gyakorlatilag tehát ily módon a keverés megfelelő voltát nem lehet ellenőrizni. Nemrégiben kigondoltam egy egészen egyszerű gépet, amelynél a kártyák ferde lejtőn lecsúszva dobozba hullanának, majd egy óramű a dobozt felemelné és a kártyákat egy másik lejtőre csúsztatná és így tovább. E géppel talán percenként 10 keverést is el lehetne végezni, de még e gépnek is közel 4 millió évig kellene működnie, hogy az összes sorrendet előállítsa.

Amikor azonban kiszámítottam, hogy hányféle sorrendben lehet egy 52 lapból álló kártyát elrendezni, szinte beleszédültem.

Félretéve a keverés alapossága ellenőrzésének nehéz kérdését, tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll egy teljesen megbízható keverőgép (vagy egy gyakorlott és becsületes kártyás), amely (ill. aki) az összes lehetséges sorrendet egyenlő valószínűséggel hozza létre. A gép (ill. a kártyás) megkever egy 16 lapos kártyát és így létrejön egy sorrend - egy a több, mint húszezermilliárd közül. Gondolja csak meg, mit jelent ez tulajdonképpen: azt, hogy a szemünk előtt következik be egy olyan esemény, amelynek a valószínűsége kisebb, mint egy osztva húszezermilliárddal. Amíg ezt végig nem gondoltam, úgy véltem, hogy egy igen kicsiny - pl. egymilliomod - valószínűségű esemény bekövetkezését gyakorlatilag kizártnak lehet tekinteni. A kártyakeverés példája mutatja, hogy ezt a kijelentést óvatosabban kell megfogalmazni. Így hát fel kell tennünk a kérdést: milyen értelemben igaz mégis, hogy igen csekély valószínűségű események bekövetkezését szinte kizártnak, egyhez igen közeli valószínűségi események bekövetkezését gyakorlatilag biztosnak tekinthetjük? A kérdés, úgy hiszem, nem is olyan nehéz, mint amilyennek első pillanatra látszik. Hiszen ha előre leírok egy lehetséges sorrendet és ez után keverem meg a kártyát, valóban szinte kizárt dolog, hogy éppen ez a sorrend legyen a keverés eredménye - habár ez a sorrend sem valószínűtlenebb, mint az a másik, amely tényelegesen létre fog jönni a keverésnél.

Amikor a valószínűségekről gondolkodni kezdtem, minden olyan egyszerűnek és világosnak tűnt előttem; most kezdtem csak látni, hogy tévedtem. Valahányszor azt hiszem, hogy megragadtam az igazságot, az újra szertefoszlik kezemben. Szinte minden lépésnél újabb szakadékok leselkednek az emberre! Lehet, hogy álmom, mely az éjjel úgy felzaklatott, szintén ezt tükrözi. Azt álmodtam ugyanis, hogy egy barlangban vagyok és a sötétben tapogatódzva keresem a kiutat. Arrafelé igyekeztem, ahonnan úgy láttam, mintha fény szűrődnék be. Egy nagy szikla állta el utamat, de azt hosszas kísérletezés után megkerülve egy nyílást pillantottam meg, amely szemmel láthatóan kivezetett a barlangból; a nyíláson túl már a napfény ragyogott. Fölegyenesedtem és a nyílás felé indultam, de csak egyet léphettem, amikor úgy éreztem, mintha valaki vállon ragadott és visszalökött volna. Valószínűleg kiálló kődarabba ütköztem a vállammal - gondoltam magamban -, hiszen tudtam, hogy a barlangban rajtam kívül senki sincs. Felálltam és újból a kijárat felé akartam indulni, de most már óvatosabb voltam, a falba kapaszkodtam és a lábam elé is néztem, de hirtelen visszahőköltem: lábam előtt valami sötét lyuk tátongott. Ha nem lök vissza az előbb valami (vagy valaki?), menthetetlenül belezuhantam volna. Először nem is fogtam fel igazán, mitől menekültem meg; kíváncsiságból a lyukba dobtam egy követ és egyenletesen számolni kezdtem, hogy abból, mennyi idő múlva hallom a kő koppanását, megállapítsam, milyen mély a lyuk. Amikor már 5-nél tartottam a számolással és még mindig nem hallottam a kő koppanását, akkor fogtam csak fel a helyzetet; már reszketve számoltam tovább 10-ig, 20-ig, de koppanást nem hallottam egyáltalán. Hiába számoltam tovább fogvacogva - amíg fel nem ébredtem.

Azt hiszem, megérti, hogy ezután nem is próbáltam újból elaludni és hogy megszabaduljak az álom nyomasztó emlékétől, a hajnali szürkületben nekikezdtem ennek a levélnek.

Most már képes vagyok nyugodtan visszagondolni álmomra, de még mindig nem tudom, hogyan vélekedjek róla. Vajon pusztán a valószínűség kezem közül minduntalan kisikló és titokzatos fogalmával való birkózásom öltött látomásszerű képet álmomban (mint ahogy Lucretius írja: „És mi miatt elménket jobban megfeszítettük, Álmunkban szintén az jő legtöbbször előnkbe”),[17] vagy mást jelent ez az álom? Mi az a veszély, amely reám leselkedik és kié az a titokzatos kéz, amely visszatartott a pusztulástól? Egyáltalán honnan jönnek álmaink és kell-e nekik bármilyen jelentőséget tulajdonítanunk? Józan eszem azt mondja, hogy álomban pihenő agyam keveri öntudatlanul a képeket, mint a kártyás a lapokat - így e képek bármely sorrendje létrejöhet véletlenszerűen és ebben ugyanúgy nem érdemes semmiféle okot vagy titkos jelet keresni, mint a kockadobás eredményében. A véletlen fogalmát évszázadokon át babonás hit övezte és azt hiszem, ez tartotta vissza az embereket attól, hogy a véletlen jelenségeket megpróbálják tudományos vizsgálat tárgyává tenni. A véletlent illetően úgy hiszem, sikerült magamat kivonni a babonás borzongás bénító béklyója alól; ami azonban álmomat illeti, nem tudok teljesen szabadulni attól a - semmilyen logikus érvvel alá nem támasztható - érzéstől, hogy ez az álom mégis csak jelent valamit.

Bocsásson meg, hogy most már álmaim leírásával is terhelem. Kissé szégyellem is magamat ezért, mégis jólesett álmomon való töprengéseimet is őszintén feltárni Ön előtt. Bízom benne, hogy aki olyan jól megérti gondolataimat, mint Ön, meg fogja érteni - ha fejcsóválva is - mostani felzaklatott lelkiállapotomat. Míg talán mást, akivel nem fűz össze ilyen szoros lelki rokonság, ez elriasztana, azt remélem, hogy Ön őszinteségemet barátságunk zálogaként fogja fogadni és azt olvassa ki e levélből is hogy az Ön legőszintébb barátja és tisztelője

Blaise Pascal

4. LEVÉL

Paris, 1654 November 19, csütörtök

Pierre Fermat úrnak
Toulouse

Uram,

Orléansból november 12-én írt válaszában szerényen elhárítja azt a feltevésemet, hogy előre tudta volna a választ kérdéseire, melyeket előző levelében nekem feltett. Ne is vegye rossz néven, ha én kitartok meggyőződésem mellett, hogy válaszaim nem mondtak Önnek sok újat. Éppen mivel azt hiszem, hogy Ön saját kérdéseire már előbb válaszolt önmagának, ezért örülök annyira, hogy az én válaszaimmal - mint írja - túlnyomórészt egyetért.

Mostani levelében feltett újabb kérdéseivel kapcsolatban azonban hajlok arra, hogy elhigyjem; ezek valóban nem szónoki kérdések. E kérdések ugyanis annyira elválaszthatatlanok a filozófia legalapvető problémáitól, hogy úgy hiszem, e kérdéseket minden kor újra-meg-újra fel fogja vetni. Ahogy az emberiség tudásban gyarapodik, egyre teljesebb választ lehet majd adni e kérdésekre, de soha válasz e kérdéseket végleg lezárni nem fogja. Öné azonban az érdem, hogy e kérdéseket elsőként fogalmazta meg ilyen páratlan világossággal. Ha mondjuk 300 év múlva feltámadnék, és azt látnám, hogy a matematikusok, a természet kutatói és a filozófusok még mindig vitatkoznak e kérdéseken, egyáltalában nem lepődnék meg. Azon sem csodálkoznék, ha a viták során sok homályos és zavaros nézet is szóhoz jutna. Éppen mivel a bizonytalanságról van szó, várható, hogy felületes elmék azt fogják hinni, hogy e téren nem kell törekedni a gondolkodás lehető legteljesebb tisztaságára. Nem lepne meg, hogy olyanok, akik a szabatos matematikai gondolkodástól amúgy is idegenkednek, azt hinnék, hogy - mivel a véletlen jelenségeket úgysem lehet teljes pontossággal előrelátni, legfeljebb nagy vonalakban - e jelenségek matematikai vizsgálatánál megengedhetik maguknak a pongyolaságot, a csak félig átgondolt és csak negyedrészt megemésztett fogalmakkal való dobálózást. Pedig ennek éppen az ellenkezője igaz. Minden háziasszony tudja, hogy a friss, puha kenyér felszeleteléséhez sokkal fontosabb, hogy a kés éles legyen, mint a szárazabb kenyér felvágásához. Lényegében itt is erről van szó. Minden tudományos vizsgálatra áll, hogy csak élesre köszörült logikával, kristálytiszta érveléssel, óvatosan, lépésről-lépésre haladva és minden lépést ellenőrizve lehet az igazságot megközelíteni, de ez sehol sem annyira fontos, mint éppen a véletlen jelenségek vizsgálatánál.

A mondattak alapján, úgy hiszem, nem fog csodálkozni, ha nem vállalkozom arra, hogy kérdéseire minden tekintetben teljes és végleges választ próbáljak adni. Ennek ellenére sietek megírni kérdéseivel kapcsolatban mindazt, amit ezekről mondani tudok, már csak azért is, hogy lássa, mennyire foglalkoztat és betölti gondolataimat az, amit írt nekem. Annál is inkább megteszem ezt, mert e kérdések nem voltak számomra tökéletesen meglepőek. Ha nem is voltam képes azokat ilyen csattanósan és tömören megfogalmazni, e kérdések már egy ideje engem is foglalkoztatnak. Nemrégiben Mademe d'Aiguillon szalonjában, nagyobb társaságban hosszabb beszélgetést folytattam e kérdésekről egy régi barátommal, Damien Miton úrral, aki jelen volt már akkor is, amikor de Méré lovag feltette nekem kérdéseit a kocka játékról. Miton úr azóta is érdeklődik a maga módján e dolgok iránt, és gyakran faggat, hogy mennyire jutottam a valószínűségek kutatásában. Tudnia kell, hogy Miton úr, bár nem matematikus, igen művelt és finom elme, aki nemcsak az irodalom iránt érdeklődik, amelynek igen alapos ismerője és kiváló művelője, hanem a tudomány kérdései iránt is és esze úgy vág, mint a borotva. Gyakran vitatkozásra késztet engem az a tulajdonsága, hogy minden kérdésről teljesen határozott véleménye szokott lenni, még akkor is, ha először hall róla. Ez a magabiztossága engem egyenesen ingerel és gyakran próbálom bebizonyítani neki, hogy elhamarkodottan alkotott véleményt. Ha elmondom Önnek, hogy e vitáink során, ha már annyira sarokba szorítottam, hogy be kellene látnia tévedését, mivel szokta lezárni a vitát, ebből képet alkothat magának erről az emberről. Miton úr ilyenkor ugyanis azt szokta mondani, hogy belátja, hogy az övétől különböző, sőt azzal ellentétes vélemény is lehet legalább annyira indokolt, mint az övé és ő nem is akar engem meggyőzni az ő igazáról, készségesen elismeri, hogy nekem éppen úgy jogom van egyéni véleményhez mint őneki, de éppen ezért azt kéri, hogy én se próbáljam ráerőszakolni az én véleményemet. Kedvenc szavajárása Miton úrnak az, hogy „kinek a szőke, kinek a barna" - és ehhez hozzá szokta tenni, hogy őneki még e kérdésben sincsenek előítéletei. Ezzel a vita be is szokott fejeződni, illetve a beszélgetés a szépasszonyokra terelődik át; e téren persze eszembe sem jut Miton úr alapos ismereteit és ítéletei megalapozottságát kétségbevonni.

Ezzel, úgy hiszem, bemutattam Önnek Miton urat, erényeivel és korlátaival együtt. A történelmet áttanulmányozva kétségtelenül azt látjuk, hogy azok, akik - úgy, mint ő - azt vallják, hogy minden embernek egyaránt joga van arra, hogy mindenről egyéni véleményt alkosson magának és senkinek sincs joga arra, hogy mást ebben a szabadságában korlátozni próbáljon, ezek sokkal kevesebb bajt, szenvedést és szerencsétlenséget okoztak az emberiségnek, mint azok, akik saját - vélt vagy akár valódi - igazukat tűzzel-vassal, karddal és máglyával próbálták másokra reákényszeríteni. Az elmúlt száz év eseményei alapján különösen nem csodálkozom, hogy ma sokan úgy gondolkoznak, mint Miton úr. Ami a tudományt illeti, annak szerintem az egyéni véleményalkotás szabadsága valóban olyan, mint az éltető levegő, enélkül megfullad. Mindamellett nem értek egyet Miton úrral. A tudományban ugyanis a gondolkodás szabadsága nem terjedhet addig, hogy a tényeket ne vegyük figyelembe. Ha egy nézet ellentmond a tényeknek, vagy egyenesen értelmetlen, mert még önmagának is ellentmond és logikailag is hibás, akkor ilyen nézetet vallani egyszerűen ostobaság. Emellett, ha lemondanánk arról, hogy igyekezzünk tudományos kérdésekben a tényeken és logikán alapuló véleményünkről másokat is meggyőzni, megállna a tudomány fejlődése. Természetesen én csak az érvekkel való meggyőzésre gondolok és nem az ellenvélemények erőszakos elfojtására, a gondolat bebörtönzésére vagy meggyilkolására.

Ezek előrebocsátása után ismertetem Önnel Miton úrral a valószínűségekről folytatott beszélgetésünket, amelyet még aznap este lejegyeztem. Természetesen a beszélgetés nem szó szerint így hangzott el; amikor ugyanis megpróbáltam leírni, mit is mondtam, mondanivalómat sokkal kerekebben tudtam megfogalmazni, mint ahogy az hevenyészve, a vita hevében elhangzott, és nem tudtam ellenállni annak a kísértésnek, hogy szavaimat ebben a kiforrottabb alakban jegyezem fel. A méltányosság azt kívánta, hogy Miton úr szavait hasonlóképpen kicsiszoljam, és ezt meg is tettem. Beszélgetésünkről készített feljegyzésem tehát nem olyan hűséges, mint egy bírósági jegyzőkönyv, de azt hiszem, álláspontjaink lényegét mégis hívebben tükrözi, mint ha szó szerint írtam volna le, ami elhangzott.

Beszélgetésünk elején Miton úr kérdésére, hogy meddig jutottam el a véletlen matematikai törvényeinek vizsgálatában, röviden elmondtam azt, amit Önnek előző leveleiben megírtam: a valószínűséget, mint a bizonyosság fokát definiáltam. Hangsúlyoztam - mint Önnek írt előző levelemben -, hogy minden valószínűség tulajdonképpen feltételes, és a feltételek megváltozásával általában a valószínűség értéke is megváltozik. Rámutattam, hogy egy esemény relatív gyakorisága az illető esemény valószínűsége, mint szilárd pont körül ingadozik a véletlen szeszélye szerint. Hangsúlyoztam persze, hogy ez csak akkor érvényes, ha a szóban forgó esemény bekövetkezését, ill. be nem következését lényegében azonos körülmények között végrehajtott, és egymásra semmilyen kihatással nem bíró, egymástól független kísérletek sorozatában figyelhetjük meg. Példaképpen azt említettem, hogy a szóban forgó törvény érvényes, ha ismételten kihúzunk egy golyót egy piros és fehér golyókat megadott arányban tartalmazó urnából, úgy, hogy a kihúzott golyót minden húzás után visszatesszük az urnába és az urnát jól megrázzuk, amivel újból az előző húzás előttivel lényegében megegyező helyzetet állítunk helyre. Ehhez a példához kapcsolódott Miton úr első megjegyzése.

MITON: Megértem az Ön lelkesedését, Pascal úr, afelett, hogy elsőnek fogalmazta meg ezt az érdekes tényt. Úgy érzem azonban, hogy e törvény érvényességi köre meglehetősen korlátozott: a sorshúzástól és a szerencsejátékoktól eltekintve - melyek engem is érdekelnek, bár távolról sem annyira, mint közös barátunkat, de Méré lovagot - nem is tudok elképzelni olyan helyzetet, ahol e tétel feltételei teljesülnének. Pascal úr, úgy hiszem, tudja, hogy gyakran szoktam járni lóversenyekre,[18] nem azért, hogy pénzt nyerjek - erre szerencsére nem vagyok rászorulva -, hanem a jó társaság kedvéért. De ha már ott vagyok, érdeklődéssel kísérem a versenyt is, és így tapasztalatból tudom, hogy éppen úgy nem lehet előre megmondani, melyik ló fog nyerni, mint a kockadobás eredményét: ez is a véletlentől függ; a lóversenynél azonban Pascal úr törvénye nem alkalmazható, hiszen még ha meg is ismételnék a lóversenyt többször egymás után, ugyanazokkal a lovakkal és lovasokkal (ami soha nem fordul elő), az már nem volna ugyanaz a verseny és az egyes lovak esélyei nem volnának ugyanazok. Rengeteg múlik ugyanis a lovak és lovasaik kondícióján. Gyakran előfordul az is, hogy egy versenyen az egyik ló elesik és megrándítja a lábát vagy a lovas sérül meg: még ha meg is gyógyul a következő versenyig, az ilyesmi nem múlik el nyomtalanul.

PASCAL: Egy törvény érvényességét nem érinti az, hogy bizonyos esetekben feltételei nem valósulnak meg és így nem alkalmazható. A tétel érvényességét csak az csorbítaná, ha olyan esetben sem teljesülne a tétel konklúziója, amikor a tétel feltételei teljesülnek. Abban azonban Önnek igaza van, hogy vannak olyan véletlen események, amelyek bekövetkezését csak egyetlen egyszer figyelhetjük meg, mert ugyanolyan körülmények között a megfigyelés nem ismételhető meg. Az ilyen véletlen eseményeket nevezhetjük *egyszeri* véletlen eseménynek.

MITON: Ilyen egyszeri véletlen események esetében tehát a valószínűségnek tapasztalati úton, a relatív gyakoriság megfigyelése révén való közelítő meghatározására nincs lehetőség?

PASCAL: Úgy van, hiszen csak egy megfigyelést végezhetünk és így a relatív gyakoriság értéke csak 1 vagy 0 lehet.

MITON: Mit jelent akkor egy ilyen egyszeri esemény esetében az, hogy valószínűsége egy meghatározott szám, például 1/2?

PASCAL: E kijelentésnek ugyanaz az értelme, mint a sokszor megfigyelhető események esetében. Például szokás, hogy a csirke mellének egy bizonyos villa alakú csontjának két szárát két gyermek addig húzza, amíg az egyik szár el nem törik. Közben mindketten egy-egy kívánságunkra gondolnak; a babona azt tartja, hogy akinek a kezében levő szár nem törik el, annak a kívánsága teljesül. Mivel a szóban forgó csontocska szimmetrikus, van értelme azt mondani, hogy mindkét gyermek 1/2 valószínűséggel fog nyerni, annak ellenére, hogy a csontocskát csak egyszer lehet eltörni.

MITON: E példában tulajdonképpen még az Ön törvényének érvényesüléséről is lehet beszélni, ugyanis nyilvánvaló, ha sok ilyen csont eltörését figyeljük meg, igaz lesz, hogy az eseteknek körülbelül a felében az a gyermek nyer, aki a baloldali, ill. aki a jobboldali szárat fogja. A lóverseny esetében azonban nincs ilyen kiút a dilemmából. Egyébként egyetértek Önnel abban, hogy a lóverseny esetében is van értelme azt mondani: a versenyző lovak közül az egyik egy bizonyos - mondjuk 1/2 - valószínűséggel fog győzni; valóban, a lóversenyen résztvevőknek általában elég határozott véleményük szokott lenni erről, és ennek megfelelően fogadnak a lóverseny kimenetelére. Azt tapasztaltam azonban, hogy a különböző emberek véleménye erősen el szokott térni egymástól, aszerint, hogy milyen információik vannak az egyes lovakról. E példa alapján nekem úgy tűnik, hogy általában egy esemény valószínűségét különböző emberek különbözőképpen ítélik meg, és semmi alapot nem látok arra, hogy eldöntsük, melyiknek van igaza. Az, hogy egy ló elsőnek ér célba, nem bizonyítja, hogy azoknak, akik e lóra fogadtak, igazuk volt, csak azt, hogy szerencséjük volt. A szerencsejátékok esetében persze a hozzáértők véleménye valóban megegyezik, de ez csak ilyen kivételes és mesterkélt esetekben van így. Ön azt mondta, hogy egy esemény valószínűségén az illető esemény bizonyossági fokát értjük. Szerintem ezt a definíciót úgy kell módosítani, hogy egy véletlen esemény valószínűsége általában minden ember számára más és más: mert csak azt adja meg, hogy ő milyen mértékben számít a szóban forgó esemény bekövetkezésére, hogyan ítéli meg annak bizonyossági fokát. Az emberektől elvonatkoztatva tehát szerintem egy esemény valószínűségéről ugyanúgy nem lehet beszélni, mint egy vers, egy kép vagy egy asszony szépségéről: az ízlések különbözők és ugyanígy különbözőképpen ítélik meg az emberek egy véletlen esemény esélyeit is.

PASCAL: Ebben nem értek Önnel egyet; szerintem egy esemény valószínűsége mindig egy, a mi véleményünktől független, meghatározott szám, amelynek értékét persze különböző emberek különbözőképpen becsülik meg. Azt elismerem, hogy a lóverseny esetében, ha valaki azt tanácsolja nekem, hogy egy bizonyos lóra fogadjak és ez a ló valóban befut, ez még nem jelenti, hogy a tanácsadóm jól ítélte meg a lóverseny várható kimenetelét. Ha azonban ennek a tanácsadónak a „tippjei” hosszú időn keresztül az esetek nagy részében - mondjuk 9/10-ben - beválnak, egy másik tanácsadó „tippjei” pedig az eseteknek csak 1/10-ében válnak be, akkor nemde ebből Ön is azt a következtetést vonja le, hogy az első tanácsadóra érdemes hallgatni, a másodikra nem.

MITON: Természetesen.

PASCAL: Mondhatjuk tehát ez esetben, hogy az első tanácsadó egyéni véleményei megbízhatóbbak, mint a másodiké?

MITON: Nyilvánvalóan.

PASCAL: Most megfogtam Önt. Hiszen ez azt jelenti, hogy az első tanácsadó jobban képes megbecsülni a lóverseny eredményének valódi valószínűségét; tehát ez esetben is van értelme a szóban forgó események valószínűségeinek valódi értékéről beszélni, noha azt pontosan senki sem ismeri, csak többé-kevésbé megbízhatóan tudja megbecsülni.

MITON: Elismerem, hogy ez ügyes válasz volt, bár Ön most tulajdonképpen egy egészen más esemény valószínűségéről beszél, mint én, tudniillik annak az eseménynek a valószínűségéről, hogy egy lóverseny szakértő milyen valószínűséggel ad helyes „tippet”, és itt már nem egy egyszeri eseményről van szó, hanem egy sokszor ismétlődő eseményről, amelynek valószínűségét a relatív gyakoriság megfigyelése útján valóban meg lehet állapítani. De hagyjuk a lóversenyt, hiszen nem a példa a fontos, hanem az elvi kérdés. Szeretném, ha megmagyarázná, mire alapozza azt, hogy általában van értelme egy esemény valószínűségéről beszélni, függetlenül az egyéntől, aki erre nézve véleményt alkot. Szerintem minden valószínűség szubjektív; ha Ön szerint ez nem így van, hanem van értelme objektív valószínűségről beszélni, akkor bizonyítsa is ezt be.

PASCAL: Készséggel elismerem, hogy ezt nem tudom bebizonyítani, ez axióma, és Ön is tudja, hogy axiómákat nem lehet és nem is szükséges bizonyítani. Csak azt tudom Önnek megmutatni, hogy ez az axióma éppen olyan ésszerű, mint azok az axiómák, amelyek helyességét kétségbe vonni sem Önnek, sem másnak nem is jut eszébe, és hogy ezen axióma következményei összhangban vannak tapasztalatainkkal. Talán meg fogja lepni, ha azt mondom, hogy a valószínűség objektivitásának axiómája egy mindenki által elfogadott axiómának természetes és szinte magától értetődő kiterjesztése.

MITON: Milyen axiómára gondol?

PASCAL: Az okság axiómájára: arra, hogy a természetben az összes, egy jelenséget befolyásoló tényezők együtt pontosan meghatározzák a jelenség lefolyását, és azonos okok mindig azonos okozatra vezetnek. Ez sem lehet bebizonyítani, éppen, mert annyira alapvető. Miből is bizonyíthatnánk be? Gondolom azonban, hogy ennek ellenére Ön sem vonja kétségbe az okság elvét?

MITON: Valóban nem, bár soha nem gondoltam arra, hogy ez egy bizonyíthatatlan axióma.

PASCAL: Nem bizonyítható, de nem is szorul bizonyításra; ez egész tudományos világképünk alapja és minden egyes természeti törvény, amelyet a tudomány felfedez, újabb érv amellett, hogy ez az axióma helyes és szükséges. Aki azonban az okság elvét elfogadja, annak el kell fogadnia azt az axiómát is, hogy a véletlen események meghatározott - tőlünk független, vagyis „objektív" - valószínűséggel bírnak, mert ez nem más, mint ugyanannak az alapelvnek egy átfogóbb és pontosabb megfogalmazása.

MITON: Valóban meglepő, amit mond és nem is értem. Nem tudná ezt érthetőbben - esetleg egy példával - megmagyarázni?

PASCAL: A legnagyobb örömmel. Szerintem az okság elvének ez az általánosabb alakja a következőképpen fogalmazható meg: ha ismerjük mindazon körülményeket, amelyek egy jelenségre befolyással bírnak, akkor ezek egyértelműen meghatározzák a jelenség lefolyását; ha azonban a lényeges körülményeknek csak egy részét ismerjük, ezek a jelenség lefolyását illetően általában még több lehetőséget engednek meg, azonban egyértelműen meghatározzák ezen lehetőségek mindegyikének a valószínűségét. Azon, hogy egy esemény bekövetkezése a véletlentől függ, éppen azt értjük, hogy a figyelembevett körülmények nem határozzák meg egyértelműen, hogy mi fog történni, megengedik azt is, hogy az esemény bekövetkezzék és azt is, hogy ne következzék be, azonban meghatározzák e két lehetőség valószínűségeit. Az, hogy mi e valószínűségeket bizonyos esetekben pontosan ismerjük, más esetekben csak közelítőleg, egyes esetekben pedig egyáltalán nem, a dolog lényegét ugyanúgy nem érinti, mint az okság elvét sem érinti, hogy bizonyos teljesen meghatározott jelenségek esetében ismerjük a pontos törvényt, mint például azt, hogy egy leejtett kő hogyan fog leesni, más jelenségek esetében azonban nem ismerjük a pontos törvényt. - Ön egy példát kívánt. Vizsgáljuk meg például az inga járását, amelyről Galilei demonstrációiban oly sok érdekeset mond. Ha ismerjük az inga hosszát, és tudjuk, hogy mikor és milyen helyzetből indítottuk el az ingát, feltéve, hogy a súrlódás s a levegő ellenállása elhanyagolhatóan kicsi, pontosan ki tudjuk számítani, hogy egy bizonyos időpontban milyen helyzetben lesz az inga. Ha azonban az inga hosszát és azt, hogy milyen helyzetből indítottunk el, tudjuk ugyan, de nem tudjuk pontosan mikor történt ez, akkor persze nem tudjuk pontosan megmondani, hogy egy meghatározott időpontban milyen helyzetben lesz az ingánk, de azt meg tudjuk mondani, hogy pontosan 1/2 valószínűséggel lesz a legmélyebb helyzettől balra, ill. jobbra, és akárhogy is írok elő egy α szöget, ki lehetne számítani annak a valószínűségét, hogy az inga a függőleges helyzettől az α szögnél kevesebbel fog eltérni a megfigyelés időpontjában.

MITON: Kezdem érteni az Ön filozófiáját, ez azonban nem jelenti, hogy el is fogadom. Ha jól értettem Önt, akkor a teljes determináltság Ön szerint a valószínűségek objektivitása elvének határesete.

PASCAL: Nagyon is jól megértett, sőt szerintem olyan ideális határeset, amely a valóságban tulajdonképpen sohasem valósul meg teljesen, csak közelítőleg. Az egy jelenségre ható összes körülményeket teljes pontossággal ugyanis soha nem ismerhetjük és nem vehetjük tekintetbe. Az előző példában azt mondtam, hogy az inga mozgását pontosan meghatározhatjuk, ha eltekintünk a súrlódástól a felfüggesztési pontban és a levegő ellenállásától. Valójában azonban e körülményektől nem lehet teljesen eltekinteni, mert azok nem küszöbölhetők ki. Még ha az ingát bura alá helyeznénk is, amelyből a levegőt eltávolítjuk -, úgy, mint abban a kísérletben, melyet Torricellit követve magam is elvégeztem -, akkor sem küszöbölhetjük ki teljesen a súrlódást és az épület megrázkódásait, amelyben a kísérlet folyik, és egy sereg egyéb többé-kevésbé véletlen hatást. Általában ez a helyzet minden pontosnak vélt törvénynél. Ha sikerül számbavennünk az egy jelenséget meghatározó főbb okokat, akkor a jelenség lefolyását nagy vonalakban előre láthatjuk, de nem láthatjuk őket előre minden parányi részletükben. Talán emlékszik még a levegő súlyára vonatkozó kísérleteimre. Sikerült megmutatnom, hogy magas hegyen - például a Puy de Dome csúcsán - alacsonyabb a higanyoszlop, mint a hegy lábánál, mert a hegy lábánál a levegő súlya nagyobb, hiszen onnan számítva a légoszlop magasabb. De a levegő súlya a föld ugyanazon pontján sem állandó, az időjárástól, a levegő nedvességtartalmától is függ, e tényezők pedig előre nem látható módon állandóan változnak. Így tehát nem állíthatjuk, hogy a levegő súlya itt Párizsban egy teljesen meghatározott érték, csak azt mondhatjuk meg, hogy milyen határok közé fog nagy valószínűséggel esni. E valószínűségeket azonban Párizs földrajzi helyzete, az évszak és az időjárás határozza meg; akármit is gondol Ön erről, attól a higany a Torricelli-féle kísérletnél egy századmillimétert sem fog se fel, se lemenni. Vagy vizsgáljuk a csillaghullás példáját. Igaz, hogy augusztusban látni a legtöbb hullócsillagot. De ez nyilván akkor is így volt, amikor még ezt senki nem figyelte meg. Nem azért több augusztusban a hullócsillag, mert Önnek, meg nekem ez a véleményünk, hanem azért ez mindkettőnknek a véleménye, mert valóban gyakoribb e hónapban a csillaghullás, mint máskor. A holdon végbemenő véletlen eseményeknek is meghatározott valószínűsége van, jóllehet e valószínűségekről senkinek közülünk nem lehet semmilyen egyéni véleménye, hiszen még azt sem tudjuk, hogy milyen eseményekről van szó.

MITON: Ne is folytassa, Uram, mert ebben teljesen egyetértünk. Elfogadom, hogy az élettelen természetre vonatkozó valószínűségek objektív érvényűek, ezt eddig sem vontam kétségbe. De engedje meg, hogy figyelmeztessem: megint olyan területre terelte a vitát, ahol valóban szilárd talajra támaszkodhat; példái mind korlátlanul megismételhető kísérletekre, és ha nem is gyakorlatban, de legalább elvben akárhányszor megfigyelhető jelenségekre vonatkoznak, ahol a valószínűségek valódi értékére a relatív gyakoriságból lehet következtetni. Az én ellenvetéseim az egyszeri véletlen eseményekre vonatkoztak - mint például egy lóverseny kimenetele vagy egy hajótörés. Továbbra is kitartok amellett, hogy az ilyen események esetében a valószínűségi ítélet csak szubjektív lehet.

PASCAL: Arról, hogy egyszeri eseményeknek is van objektív valószínűsége, ugyanazért vagyok meggyőződve, mint arról, hogy oka van. Egyébként nem látok elvi különbséget - a valószínűségek objektív voltát illetően - az élettelen és az élő természetre vonatkozó véletlen események között. Éppen úgy, ahogy az okság törvénye az élő természetben is érvényesül, a véletlen események valószínűsége is ugyanúgy meghatározott és objektív az élő természetben is; legfeljebb az igaz, hogy az összefüggések még sokkal bonyolultabbak és még nehezebben áttekinthetők. Ennél fogva az élő természetben még kevésbé tudjuk pontosan előrelátni az eseményeket, mint az élettelen természetben; ebből azonban csak az következik, hogy e téren a valószínűségek vizsgálata, ha lehet, még fontosabb. Ha azonban akarja, vizsgáljuk meg közelebbről a hajótörés példáját. Kétségtelen, hogy az egyes kereskedőknek, üzletembereknek egyéni véleményük van arról, hogy mi a valószínűsége annak, hogy egy hajó sértetlenül megérkezik rendeltetési helyére. Úgy hallom, Angliában a kereskedők igyekeznek magukat biztosítani a hajóval küldött szállítmányok elvesztése ellen úgy, hogy bizonyos összeget fizetnek előre egy ezzel foglalkozó társaságnak, amely ennek fejében megtéríti a kereskedő kárát, ha a szállítmány elveszne akár hajótörés, akár kalóztámadás folytán, míg ha a szállítmány rendben megérkezik, a társaságé marad az előre lefizetett biztosítási díj. Kétségtelen, hogy a díj megállapításakor a kereskedő is és a társaság is megbecsüli a szállítmány elveszésének valószínűségét, és mindkét vélemény szubjektív jellegű, azonban szerintem ez esetben is van értelme a hajó szerencsés megérkezésének objektív valószínűségéről beszélni, csak őszintén be kell ismernünk, hogy e valószínűségek nem ismerjük. Bármilyen véleményünk is van nekünk a hajó szerencsés megérkezésének esélyéről, ez a hajó tényleges sorsát nem befolyásolja, arra csak az ismeretlen objektív valószínűségnek van kihatása, hiszen ez utóbbi nem más, mint az objektív körülmények kvinteszenciája. Mit szólna Ön, ha egy olyan esetben, amikor Ön azt gondolja, hogy egy bizonyos hajó nagy valószínűséggel elsüllyed és ez tényleg bekövetkezik, Önt a bíróság felelősségre vonná azért, hogy Ön okozta a katasztrófát? Nem azzal hárítaná el a vádat, hogy az Ön egyéni véleménye semmilyen kihatással nem lehetett az eseményekre? Ha én volnék a bíró, fel is menteném Önt a károkozás vádja alól, de ezzel egyben elmarasztalnám az Ön nézeteit a valószínűség szubjektív voltáról. Egyébként az, hogy a biztosító társaság általában nagyjából helyesen ítéli-e meg valószínűséget., kiderül abból, hogy jövedelmező-e számára a biztosítás. Ha a társaság helytelenül ítéli meg a valódi valószínűséget (amely esetről-esetre változhat), akkor rövid időn belül tönkremegy, vagy azért, mert több kártérítést kell fizetnie, mint amennyi biztosítási díjat beszed, vagy pedig azért, mert olyan magasan állapítja meg a biztosítási díjakat, hogy a kereskedők azt nem hajlandók megfizetni.

MITON: Pascal úr, Ön olyan, mint a macska: mindig a talpára esik. Már megint sikerült az egyszeri eseményekről átsiklania a gyakran megfigyelhető eseményekre, amelyeknél a relatív gyakoriság megfigyelése objektív becslést ad a valószínűségre.

PASCAL: Higgye el, uram, hogy ez nem az én szerény vitakészségemen múlik, amely nem is közelíti meg az Önét, hanem azon, hogy az én oldalamon van az igazság.

MITON: Ha Önnek ez örömet okoz, elfogadom, hogy az egyszeri véletlen eseményeknek is lehet tőlünk független objektív valószínűséget tulajdonítani, habár annak pontos értékét nem ismerjük, sőt nem is ismerhetjük. Szerintem azonban a tudománynak nem feladata, hogy elvileg megismerhetetlen, a tapasztalat számára hozzáférhetetlen dolgokkal foglalkozzék, még ha ilyenek léteznek is, bár ilyen esetekben nagyon is kétséges, hogy egyáltalán mit is értsünk ezek „létezésén”.

PASCAL: Ugyanazt, mint Lucretius atomjainak a létezésén, amelyeket szintén nem láthatunk még nagyítóval sem, mégis segítségükkel tudjuk megmagyarázni mindazt, amit látunk maguk körül a világban. Mindkét esetben egy olyan tudományos hipotézisről van szó, amelyet közvetlenül nem, csak következményein keresztül tudunk ellenőrizni.

MITON: Pascal úr, Ön valóban ügyvédnek is kiváló volna; látom, az „argumentum ad hominem" módszerét is ügyesen kezeli. Úgy látom, még emlékszik arra a beszélgetésünkre, amelyben elmondottam, hogy a „De rerum natura" legkedvesebb olvasmányom - és nem csak azért, mert, mint Lucretius, én is nagyrabecsülöm Vénusz istennőt. Bár még mindig nem győzött meg teljesen, hasonlata az atomokkal kétségtelenül elgondolkoztató. Ön szerint tehát az egyszeri események valószínűségei is azon dolgok közé tartoznak, amelyekről a költő azt mondja,[19] hogy:

„Halld és ismerd el magad is, hogy vannak a dolgok
Közt olyanok bőven, melyeket nem láthat az ember.
Lám, a viharzó szél felkorbácsolja a tengert,
Elsüllyeszt roppant gályákat, s felleget oszlat ...
S íme: a szél is olyan, mit nem lát szemmel az ember."

Ön szerint tehát a szerencsétlen gályákat a láthatatlan szél és az ismeretlen valószínűség közös erővel süllyesztik el?

PASCAL: Így is lehet mondani, és ezzel Lucretius is egyetértene, hiszen ő maga is úgy képzelte, hogy a világot az atomok véletlen összeverődése hozta létre. Bizonyára emlékszik a következő soraira:[20]

„Mert bizonyos, hogy az őselemek helyüket nem előre
Megfontoltan foglalták el a mostani rendben,
Sem ki nem alkudták, ki hogyan végezze a mozgást.
Ámde mivel hozzászoktak már ősi időktől
Hogy sokféle ütéstől erre meg arra mozognak
... Így történt, hogy olyan sok időn át szerte bolyogva,
S megpróbálva minden mozgást s egybeverődést,
Összekerültek olyan magvak, melyek összevegyülve
Gyakran nagy dolgoknak az első sejtjei lettek
Mint égnek, földnek, tengernek, s állati nemnek."

MITON: Hogyne emlékeznék; arra is emlékszem, hogy Lucretius az őselemek véletlen mozgását a porszemek táncához hasonlította, amit megfigyelhetünk, ha oldalról nézzük a szobába besütő napsugarat.[21] Gondolja, hogy a valószínűségszámítás felhasználható az ilyen véletlen jelenség vizsgálatára?

PASCAL: Meg vagyok győződve róla. Számomra nyilvánvaló, hogy a valószínűségszámítás lehetővé fogja tenni a természet olyan jelenségeinek matematikai eszközökkel való vizsgálatát, amelyek a matematika más módszereivel nem közelíthetők meg; a természetben végbemenő, a véletlentől függő eseményekre gondolok.

MITON: Ön úgy beszél a véletlenről, mintha teljesen egyértelműen eldönthető volna, hogy egy esemény a véletlentől függ-e vagy sem. Nekem úgy tűnik, hogy ez sem dönthető el egyértelműen. Ami az egyiknek véletlen, a másiknak nem az. Vegyük például az Ön példáját az ingával. Ha Ön nem tudja, hogy az ingát én mikor engedem el, akkor Ön számára a véletlentől függ az inga helyzete egy meghatározott időpontban. Ha viszont én engedem el az ingát, akkor én pontosan tudom, hogy ez mikor történt, tehát számomra az inga mozgása teljesen meghatározott és nem függ a véletlentől. Így tehát szerintem még az is egyéni ítélettől függ, hogy egy esemény egyáltalán véletlenszerű-e.

PASCAL: Abban egyetértek, hogy ugyanaz az esemény bizonyos esetekben véletlen eseménynek tekintendő, más esetekben pedig okozatilag teljes mértékben meghatározottnak, attól függően, hogy milyen körülmények között vizsgáljuk. Emlékezzék csak vissza arra, amit még beszélgetésünk elején mondtam Önnek arról, hogy minden valószínűség tulajdonképpen feltételes; az objektív feltételektől, amelyek mellett egy esemény bekövetkezését vizsgáljuk, függ, hogy az esemény egyáltalán véletlen jellegű-e, és ha igen, ezek az objektív feltételek határozzák meg az esemény valószínűségét is.

MITON: Ám legyen, nem vitatatom ezt most tovább; arról meggyőzött, hogy az Ön felfogása konzekvens és átgondolt és kétségtelenül lehet ilyen szemszögből is nézni a dolgokat. Én azonban mégis megmaradok a magam szubjektív valószínűségeinél, mivel ezeket ismerem, az Ön objektív valószínűségeivel pedig, még ha elfogadom is, hogy léteznek, nem tudok mit kezdeni, lévén, hogy nem ismerem őket. Egy kicsit úgy érzem magam, mintha először hosszasan dicsérne nekem valakit, akit én nem ismerek és miután meggyőzött arról, hogy kívánjam az illető úriember - vagy hölgy - társaságát, kiderült, hogy nem is áll módjában engem vele összehozni.

PASCAL: Engedje meg, hogy egy kicsit módosítsam a hasonlatot. Szerintem inkább arra hasonlít a helyzet, mintha én egy ókori görög szerzőt dicsérnék Önnek, akivel ugyan személyesen nem áll módomban összehozni, de akinek művei, ha nem is teljes egészükben, de túlnyomórészt fennmaradtak, és műveiből, ha legyőzi a nyelvi nehézségeket, és alaposan elmélyed bennük, a szerző is megismerheti, sőt azt is elég megbízhatóan kitalálhatja, hogy az elveszett részekben mi állhatott. Persze, ez nem könnyű feladat, de megéri a fáradságot.

MITON: Majd még gondolkodom ezeken a dolgokon. Még csak azt mondja meg, Pascal úr, az Ön által talált matematikai összefüggések, mint például az összeadás és szorzási szabály, csak az objektív valószínűségre érvényes, vagy a szubjektív valószínűségekre is?

PASCAL: A szubjektív valószínűségi ítéletek legtöbbször nem is számszerűek, csak kvalitatívak. De ha valakinek a szubjektív ítéletei mindig számszerűek volnának is, az említett szabályok ezekre csak akkor volnának érvényesek, ha az illető ítéletei egymással a legteljesebb összhangban volnának, koherens és ellentmondás nélkül rendszert alkotnának. Nem hiszem, hogy ilyen ember léteznék. Ezért, még ha Ön bizonyos kiinduláspontul szolgáló események valószínűségeire vonatkozólag szubjektív becslésből indul is ki, akkor is jobban teszi, ha minden olyan összetett eseménynek a valószínűségét, amely a kiindulási valószínűségekből matematikailag levezethető, nem érzései alapján becsüli meg, hanem matematikai meggondolással számítja ki. Ez esetben - feltéve, hogy a kiindulásul választott értékek nem mondanak ellent egymásnak - természetesen olyan rendszerét nyeri a valószínűségeknek, amelyben az általános szabályok maradéktalanul érvényesek, hiszen ez esetben egyéni rendszerében minden esemény valószínűségére azt az értéket nyeri, amely annak a valódi - objektív - valószínűsége volna, ha szubjektív ítélet alapján kiindulásként felvett valószínűségek a valódi értékkel megegyeznének. Előbb-utóbb általában az ember eljut ezúton egy olyan eseményhez, amelynek valószínűségét már tapasztalati úton lehet ellenőrzi; így azután a szubjektív ítélet alapján felvett kiindulási értéket, ha szükséges, korrigálni is lehet.

MITON: Tehát Ön is elismeri - habár csak a kiinduló értékekre szorítkozva - a szubjektív valószínűségi ítéletek nélkülözhetetlenségét?

PASCAL: Én másképpen fogom fel a kérdést. Amit Ön szubjektív valószínűségi ítéletnek nevez, azt én hipotézisnek fogom fel.

MITON: Azt hiszem, a különbség az elnevezésben van.

PASCAL: Nem egészen. Én e hipotetikus valószínűségeknek nem is tulajdonítok kezdetben meghatározott számértékeket, hanem betűvel - mondjuk x-szel, y-nal stb. - jelölöm őket; az x, y stb. ismeretlenek értékére azután közvetett megfigyelésekből próbálok következtetni.

MITON: Felfogásaink, úgy látszik, nem is annyira ellentétesek, mint eleinte gondoltam; legalábbis a gyakorlati konzekvenciákat illetően az eltérés lényegtelen. Ezért úgy hiszem, ne is untassuk tovább vitánkkal a társaságot, hiszen akármeddig vitatkozunk is, mindketten azután is csak a saját fejünkkel fogunk gondolkozni és így szükségképpen némileg másképp fogjuk látni a dolgot. Úgy érzem, a vita során felfogásunk annyira közel kerül egymáshoz, amennyire ez egyáltalán lehetséges, így a további vita céltalan volna. Úgy látom, a szép hölgyek itt körünkben máris neheztelnek ránk azért, mert elhanyagoljuk őket, ezért - ha Ön is egyetért - fejezzük be mára a vitát.

PASCAL: Ahogy Ön kívánja.

Eddig tartott a beszélgetésünk. Mivel úgy érzem, ebben benne van az a kevés, amit az Ön kérdéseiről egyáltalán mondani tudok, ezért nem is fűzök hozzá semmi kommentárt és csak azt kérem, hogy barátságunk érdekében írja meg egészen nyíltan és őszintén a véleményét erről a beszélgetésről, amelyet Miton úrral folytatott az Ön leghűségesebb és Önt mindenkinél többre becsülő híve és tisztelője,

Blaise Pascal

P.S.: a napokban könyveimet rendezve belelapoztam Marcus Aurelius meditációiba. Éppen ott nyitottam fel ahol arról ír, hogy két eset lehetséges: a világ vagy egy nagy véletlen összevisszaság, vagy pedig rend és törvény uralkodik benne; azonban bármelyik is igaz e két ellentétes lehetőség közül, a gondolkodó ember ugyanazt a következtetést kell, hogy levonja: úgy álljon szilárdan ott, ahová a sors vagy a véletlen helyezte, mint a szikla, amelyen megtörnek a tenger vad, sós hullámai. Bár már sokszor olvastam e sorokat, most először gondolkodtam el azon, hogy Marcus Aurelius tulajdonképpen miért is tekinti magától értetődőnek, hogy a világban vagy a véletlen uralkodik, vagy pedig rend és törvény? Miért hiszi, hogy e két lehetőség egymást kizárja? Én azt hiszem, hogy valójában e két állítás nem ellentétes, hanem mindkettő egyszerre igaz: a világban a véletlen uralkodik és éppen ezért van benne rend és törvény, ami a véletlenek tömegéből a valószínűségeknek megfelelően bontakozik ki. Ezért tartom a valószínűség fogalmának tisztázását annyira fontosnak, és ezért foglalkoztatnak e kérdések szüntelenül. Önnek persze nem kell, hogy ezt sokat magyarázzam, hiszen kezdettől fogva, amióta e kérdésekről levelezünk, ugyanúgy tudta, mint én, hogy itt sokkal többről van szó, mint a kocka játékról!

LEVÉL AZ OLVASÓHOZ

Kedves Olvasó!

E soraim célja, hogy közöljem Önnel - e kötet tartalmával összhangban levél formájában - azt, amire bizonyára már amúgy is rájött, hogy ti. Henry Trouverien professzor soha nem létezett és ennélfogva nem is talált semmit (amire a neve is utal) és hogy az e kötetben közölt Pascal-leveleket nem Pascal írta. Némi magyarázatra legfeljebb az szorulhatna, hogy miért fiktív Pascal-levelek formájában közöltem Önnek azt, amit a valószínűségszámítás elvi kérdéseiről közérthetően el akartam mondani. De tulajdonképpen e kérdés sem igényel választ. Hiszen vagy érdeklődéssel olvasta Ön e kötetet, és ez esetben e kérdést nem is teszi fel, vagy nem nyerték meg tetszését e levelek, ezen pedig a magyarázkodás sem segít. Így csupán annyit jegyzek meg, hogy az irodalmi forma választásában ugyanolyan meggondolások vezettek, mint dialógusaim[1] megírásában, csak kísérletképpen most másik műfajjal próbálkoztam[2] E műfaj szintén nagy múltra tekinthet vissza és ezt is az antik görög kultúra hozta létre; Platón korábban már szokásos irodalmi műfaj volt a fiktív levél, amelyet többek között filozófiai témák kifejtésére is gyakran használtak. A mai irodalomban is élt ez a műfaj; példaként megemlítem Thornton Wilder „Március idusa" című művét [11]. Azzal, hogy éppen Pascalt és Fermat-t választottam levelező társként, ugyanazt az elvet követtem mint dialógusaimban: a valószínűség fogalmának létrejötte időpontjába helyeztem a levélváltást, azért, hogy e fogalmat „in statu nascendi", a keletkezés frissességében mutathassam be. Ugyancsak közös vonása e leveleknek dialógusaimmal, hogy törekedtem a történeti hűségre, az anakronizmusok elkerülésére (amennyire ez lehetséges volt) és a kornak megfelelő stílusra. A nagyobb „hitelesség" érdekében beleszőttem a szövegbe számos gondolatot, aforizmát Pascal fennmaradt műveiből. Ezeket helyenként szó szerint, helyenként csekély módosítással vettem át. (A Jegyzetekben minden esetben utalok Pascal megfelelő művére.) A levelekben Pascal gyakran idéz másokat; ezen idézetek kivétel nélkül olyan művekből valók, amelyekről tudjuk azt, hogy Pascal ismerte; egyesek ezek közül legkedvesebb olvasmányai közé tartoztak, mint pl. Montaigne Esszé-i. (Az idézetek forrásait a Jegyzetekben megadtam.[3])

Összefoglalva: arra törekedtem, kedves Olvasóm, hogy elhitessem Önnel, hogy e leveleket Pascal is írhatta volna; de természetesen távol állt tőlem az a szándék, hogy Önt félrevezessem és elhitessem, hogy azokat valóban ő írta. Ami pedig a levelek tartalmát illeti, egyáltalán nem állítom, hogy Pascal mindazt valóban végiggondolta, ami e levelekben áll, csak azt, hogy ez elképzelhető és nem cáfolható meg történelmi érvekkel.

Azt kérdezheti Ön: miért nem „közöltem" Fermat válaszleveleit is? Ezt valóban megtehettem volna, de feleslegesnek éreztem, hiszen Pascal leveleiből Fermat válaszleveleinek tartalma (egy-két részlettől eltekintve) nagy pontossággal rekonstruálható. (Egyébként Trouverien professzor véleményem szerint igen meggyőzően magyarázza meg, hogy Fermat levelei miért nem maradtak fenn.)

Szíves türelméért köszönetet mondok

őszinte híve
Rényi Alfréd

[1] L. [10].

[2] A két rokon műfajt helyenkint kevertem; a levelekbe párbeszédrészleteket szőttem bele.

[3] A jegyzetek számozása [1, 2, 3,] stb., míg [1], [2], [3] stb. a könyv végén levő irodalomjegyzékben felsorolt munkákra való hivatkozást jelölnek.

FÜGGELÉKEK

ÉLETRAJZI ADATOK PASCALRÓL

Blaise Pascal 1623. június 19-én született Clermont-Ferrandban. Apja, Étienne Pascal, a törvényszék elnöke, széleskörű és alapos műveltséggel rendelkezett. Anyját, Antoinette Bégon-t Blaise már három éves korában elvesztette; ettől kezdve apja nevelte őt és két leánytestvérét, a három évvel idősebb Gilberte-t (aki később Étenne Perier felesége lett) és a két évvel fiatalabb Jacqueline-t (aki később zárdába vonult). Pascal sem iskolába, sem egyetemre nem járt, apja maga tanította őt mindenre. Pascal már egész fiatalon jelét adta rendkívüli tehetségének: tizenhat éves korában megírta „Essai pour les coniques” című, a kúpszeletekről szóló munkáját: e dolgozatában szerepel az a nevezetes tétele, hogy a kúpszeletbe írt hatszög átellenes oldalainak metszéspontjai egy egyenesen fekszenek. 1642-ben, tehát tizenkilenc éves korában Pascal feltalálta a számológépet. A következő évek során hét példányt készített e számológépből, melyek közül több fennmaradt: a Clermont-Ferrandban 1962-ben, Pascal halálának 300. évfordulója alkalmából rendezett számológép kiállításon az egyik ki volt állítva. Pascalt joggal tekinthetjük a kibernetika úttörőjének, mivel találmánya elvi jelentőségét felismerte. Ezt mutatják következő szavai: „A számológép sok olyanra képes, ami jobban megközelíti a gondolkodást, mint az, amire az állatok képesek ...”[22]

1646-ban Pascal különböző változatokban megismétli Torricelli kísérletét és annak teljes magyarázatát adja: igazolja a légnyomás függését a tengerszint feletti magasságtól, felfedezi a hidrosztatika alaptörvényét és a hidraulikus prés alapelvét.

Ahhoz, hogy megértsük, hogy e kísérlet miért váltott ki olyan nagy visszhangot és miért vezetett szenvedélyes hangú vitákra, tudnunk kell, hogy a Torricelli-féle kísérlet Arisztotelész azon tanítását cáfolta meg, hogy légüres tér nem lehetséges, mert a természet „irtózik az ürességtől”. Ilyen módon e kísérletek a skolasztika súlyos vereségét jelentették. Pascal tökéletesen tisztában volt Torricelli és a saját kísérletei forradalmi jelentőségével és éppen ezért végezte kísérleteit egészen páratlan gonddal és körültekintéssel. Pascal élesen bírálja azokat, akiket a tekintélyek tisztelete vakká tesz a tényekkel szemben. Egy a légüres térről tervezett, de meg nem írt tanulmányának fennmaradt egy előszó-tervezete, amely a következő szavakkal zárul: „S akármilyen becsben tartjuk is a régieket, az igazságot mindig nagyobb becsben kell tartanunk, bármilyen új is legyen az az igazság, hiszen valójában öregebb minden véleménynél. És nem ismerjük az igazság természetét, ha azt hisszük, hogy akkor született, amikor az emberek rátaláltak.”[23] Ha a tudományról volt szó, Pascal szilárdan a kísérleti módszer és az előítélet nélküli logikus gondolkodás oldalán állott. Ugyanakkor az volt a meggyőződése, hogy a vallás kérdéseiben az igazsághoz nem lehet pusztán gondolkodás útján eljutni, a hit segítségére is szükség van ehhez.[24]

Pascal gondolatvilágában a vallás 1646-tól kezdve nagy szerepet játszik: életrajzírói ez időpontra teszik „első megtérését”. Ekkor azonban a vallás még nem vált élete központi problémájává. Az 1652-1654 éveket életrajzírói mint Pascal „világi korszakát” tartják számon. 1653-ban Pascal előkelő és nagyvilági életet élő barátaival, Roannez herceggel, de Méré lovaggal és Mitonnal együtt Poitou-ba utazik. Valószínűleg ezen utazás alatt tette fel Pascalnak de Méré lovag azt a két, a szerencsejátékokra vonatkozó kérdést, amelyről Pascal 1654-ben Fermattal levélváltást folytatott. E levélváltással vette kezdetét a valószínűségszámítás.[25]

Pascal első levele Fermathoz 1654. július 29-ről van keltezve, a második 1654. augusztus 24-ről, míg a harmadik (néhány soros) levél 1654. október 27-ről. E levelek két, de Méré lovag által felvetett kérdéssel foglalkoznak. Az első kérdés a következő: hányszor kell két kockával dobni ahhoz, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer két hatost dobjunk, nagyobb legyen 1/2-nél? E feladatot maga de Méré lovag is megoldotta. A második - nehezebb - kérdés, amelyet de Méré lovag maga nem tudott megoldani, a következőképpen hangzik: Két játékos egy olyan játékot játszik, amelyben minden játszmában egyenlők az esélyeik, és a játék kezdetén mindegyik ugyanakkora tétet tesz fel azzal, hogy az nyeri el az egész összeget, aki először nyer *n* játszmát; ha mármost a játékosok abbahagyják valamilyen okból a játékot, mielőtt az eldőlt volna, pl. egy olyan helyzetben, amikor az első játékos már *a* játszmát, a másik *b* játszmát nyert, hogyan méltányos osztozkodniok a téten?

Alábbiakban közöljük Pascal első levelének néhány bevezető sorát, amelyből az olvasó képet kaphat e levelek tartalmáról és stílusáról egyaránt:

„Uram, rámtört a türelmetlenség, ugyanúgy, mint Önre, és bár még ágyban vagyok, nem tudom visszatartani magam attól, hogy tollat ragadjak és megírjam Önnek, hogy tegnap este megkaptam Carcavi úrtól az Ön levelét a méltányos osztozkodásról, amelyet annyira csodálok, hogy azt ki sem tudom fejezni. Nem akarom hosszúra fogni a szót: Ön tökéletesen helyesen oldotta meg a kocka játékra vonatkozó kérdést, és a méltányos osztozkodás problémáját egyaránt; ez számomra nagy öröm, mert ezután nem kételkedem többé abban, hogy igazam van, miután ilyen bámulatos módon megegyező eredményekre jutottunk.

Az Ön módszerét, amellyel a méltányos osztozkodás problémát megoldotta, még sokkal inkább csodálom, mint a kocka játékra vonatkozó kérdésre adott megoldását; ugyanis többekkel is beszéltem, akik a kocka játékra vonatkozó kérdést megoldották, így maga de Méré lovag is, aki nekem e kérdést feltette, valamint Roberval úr; azonban de Méré nem volt képes megtalálni a méltányos osztozkodásra vonatkozó kérdés helyes megoldását, sőt még hozzá sem tudott e kérdéshez fogni, úgyhogy én voltam eddig az egyetlen, aki a helyes arányt ismertem.

Az Ön módszere teljesen megbízható, és amikor e kérdésen gondolkodni kezdtem, én is először így indultam el; azonban mivel a különböző kombinációk megszámlálása igen fáradságos, később egy rövidebb és valójában egészen más egyszerűbb és elegánsabb módszert találtam, amelyről most röviden be szeretnék Önnek számolni, ugyanis szeretném ezentúl megosztani Önnel gondolataimat annyira, amennyire ez lehetséges, olyan öröm számomra a mi egyetértésünk. Látom ugyanis ebből, hogy az igazság ugyanaz Toulouse-ban, mint Párizsban.”[26]

E levelek az említett két konkrét feladaton túlmenően általános valószínűségszámítási kérdésekkel nem foglalkoznak: maga a „valószínűség” szó elő sem fordul bennük.

1654-ből valók Pascalnak az ún. Pascal-háromszögről és azzal kapcsolatos kombinatorikai kérdésekről szóló munkái is. Érdeklődése valószínűségszámítási vizsgálataival kapcsolatban fordult a kombinatorika felé.

Nem sokkal a levelek megírása után, 1654. november 23-án döntő fordulópont következett be Pascal életében, amit életrajzírói második megtérésének neveznek. Ezen éjszaka vallásos extázisában írt feljegyzéseit ettől kezdve kabátja bélésébe varrva emlékeztetőnek állandóan magával hordta. Röviddel ezután Pascal teljes energiával a janzenisták mellé állt a jezsuitákkal folytatott teológiai vitájukban és megírta a „Les Provinciales” címen ismertté vált 19 sziporkázóan szellemes levelét, amelyek a francia próza mesterművei. Kétségtelen, hogy 1654 és 1658 között ez állt Pascal érdeklődésének középpontjában. Téves azonban az a beállítás, hogy Pascal második megtérésével elfordult volna a matematikától és általában a tudománytól. 1658-1659-ből valók a cikloisra vonatkozó vizsgálatai, amelyek rendkívül nagy jelentőségűek, mivel a ciklois, ill. annak szelete területének és súlypontjának, a ciklois forgatásával keletkező forgástest súlypontjának és térfogatának meghatározásával Pascal döntő lépést tett a differenciál- és integrálszámítás létrehozása irányába. Bár ő megelégedett azzal, hogy felismerését a cikloissal kapcsolatos határozott integrálok kiszámítására alkalmazza, ebben csírájában benne volt az általános módszer, amit azután Leibniz fejlesztett ki. Leibniz maga is hangsúlyozta, hogy ő a differenciálhányados általános fogalmához Pascal „Trité des sinus du quart de cercle” című munkájának hatása alatt jutott el.

1658-ból származik Pascalnak a „De l’esprit géométrique et de l’art de persuader” című tanulmánya is, amelyből kitűnik, hogy ő a matematika axiomatikus módszere lényegének felismerésében is messze megelőzte korát. Ennek illusztrálására szolgálhat e tanulmány következő mondata:

„Minden állítást bizonyítani kell, és eközben nem szabad felhasználni mást, mint magukat az axiómákat vagy már előzőleg bebizonyított tételeket. Soha nem szabad visszaélni azzal, hogy különböző dolgokat gyakran ugyanazzal a szóval fejeznek ki, ezért gondolatban mindig magát a definíciót kell behelyettesíteni a definiált szó helyébe.”[27]

Pascal legismertebb műve kétségtelenül a „Pensées” (Gondolatok), amely csak halála után jelent meg. Ezen befejezetlen művéből, amely így csonkán tulajdonképpen nem más, mint aforizmák gyűjteménye, csak egyet idéztünk itt, amelyből látszik, hogy Pascal a tudóst és Pascalt a moralistát nem lehet egymástól különválasztani:

„A gondolatban rejlik tehát minden emberi méltóságunk. Igyekezzünk tehát helyesen gondolkodni, ez minden erkölcs alapja.”[28]

Nem vállalkozhatom itt arra, hogy Pascal érdekes, ellentmondásokkal teli egyéniségéről átfogó képet adjak és életútjának 300 év távlatából nem könnyen érthető fordulatait pszichológiai és kortörténeti alapon elemezzem; e feladatra nem is érzem magam kellően felkészültnek és ez egyébként sem tartozik e könyv célkitűzései közé. Legyen szabad befejezésül újból (lásd [12]) idéznem Ady Endre szavait:

„Vagyok, mint minden ember: fenség
Észak-fok, titok, idegenség
Lidérces messze fény,
Lidérces messze fény.”

Valóban, Pascal életműve és egyénisége, befejezetlensége illetve ellentmondásossága ellenére, 300 év távlatából is fényesen világít.

A LEVELEK DÁTUMÁRÓL

Mint Pascal életrajzának vázlatában említettük, utolsó reánk maradt levelét Fermathoz 1654. október 27-én írta. Említettük azt is, hogy 1654. november 23-ának éjszakája fordulópontot jelentett Pascal életében. Ha tehát feltételezzük, hogy Pascal a reánk maradt levelein túlmenőleg további leveleket írt Fermathoz, e levelek megírására csak 1654. október 28. és november 23. között kerülhetett sor. Ugyanis ezen elveszett levelek október 27. előtt nem íródhattak, mert ez esetben a fennmaradt levelekben kellene valami utalásnak lenni az elveszett levelekre. Nem íródhattak a levelek november 24. után sem, mert ezután Pascal egészen más gondolatokkal volt elfoglalva. A Pascal életéről rendelkezésre álló adatok szinte bizonyosan kizárják azt, hogy 1654. november 23. után Pascal újból visszatért volna a „véletlen matematiká”-jának problémájára.

Azonban az 1654. november 23. előtti heteket illetően nagyon is valószínű, hogy foglalkozott e kérdésekkel. Így a szóban forgó levelek datálására igen rövid időtartam - kereken 4 hét - állt csak rendelkezésre. Figyelembe véve az akkori közlekedés lassúságát, ha Pascal első levelét október utolsó napjaiban írta, választ erre november 5. előtt nemigen kaphatott. Még ha erre azonnal válaszolt is, november 15. előtt aligha kaphatott választ. Kézenfekvő azonban a feltevés, hogy ekkor Pascal már oly mértékbe beleélte magát a témába, hogy még a válasz megérkezése előtt írt egy harmadik levelet a második kiegészítésenként, és a második levelére írott válasz kézhezvétele után, november 15. és 20. között egy negyedik levelet. Ennél több levél megírása a megadott időhatárok között nemigen képzelhető el.[4]

Így tehát, feltéve, hogy Pascal a szóbanforgó 4 hét alatt négy levelet írt Fermatnak, ezek keletkezése 1-2 napnyi pontossággal „kiszámítható”.

Életrajzírói szerint Pascal 1654. november 23. előtti hetekben igen felzaklatott idegállapotban volt. Ezt tükrözik a levelek egyes részletei (különösen a 3. levél befejező része).

A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS TÖRTÉNETÉRŐL

A valószínűségszámítás a matematikának viszonylag fiatal ága. Önálló tudományággá való alakulása Pascal és Fermat 1654-ben folytatott levelezésével vette kezdetét, bár egyes speciális, a szerencsejátékokra vonatkozó feladatokkal már sokkal előbb foglalkoztak, így pl. Luca del Pacioli 1494-ben megjelent „Summa de arithmetica” c. munkájában egy valószínűségszámítási feladatot tárgyal - hibásan. Cardano (1501-1576) és Galilei (1564-1642) azonban már helyesen oldottak meg speciális valószínűségszámítási feladatokat. A valószínűség fogalma azonban ennél sokkal régebbi keletű, és az antik görög filozófiában már szerepet játszott. (Lásd pl. a 2. levélben között Platón idézetet.) Az a gondolat, hogy a természetben tapasztalható törvényszerűségek a véletlenek tömegén keresztül érvényesülnek, az ókori görög materialistáknál szerepelt először, és legrészletesebb ókori kifejtése Lucretius „De rerum natura” c. költeményében található meg, amelyből a legfontosabb idevágó részleteket Pascal idézi a 4. levélben, Miton-nal folytatott vitája során. Az újkorban a valószínűségszámítás kialakulásában nagy szerepet játszottak a szerencsejátékokra, elsősorban a kocka játékra vonatkozó feladatok. Maguk a kockajátékok már az ókorban igen népszerűek voltak. A taxillus-játék történetére vonatkozólag, amelyről a 2. levélben esik szó, Hagstroem kitűnő munkájára [5] támaszkodtunk. A valószínűségszámítás történetét Pascaltól Laplace-ig alaposan feldolgozta I. Todhunter [13]. Sok érdekes adatot tartalmaz a valószínűségszámítás történetéről Jordan Károly könyve [14], valamint F. N. David nemrégiben megjelent érdekes munkája [28]. Nem kívánjuk itt a valószínűségszámítás történetét részletesen ismertetni, csak röviden utalunk arra, hogy Pascal és Fermat levelezése hogyan hatott ki az új tudományág kialakulására. 1658-ban jelent meg Huyghens „De ratiociniis in ludo aleae” c. munkája, amelyben a Pascal és Fermat által tárgyalt kérdések részletesebb kifejtése található, és amely nyilvánvalóan Pascal és Fermat levélváltására támaszkodik, azonban számos más rokon kérdést is tárgyal, illetve felvet. Huyghens munkájához csatlakozik közvetlenül Bernoulli Jakab (1654-1705) „Ars coniectandi” című alapvető munkája, mely csak halála után, 1713-ban jelent meg. E munka első része Huyghens fent említett munkáját reprodukálja és kommentálja, a teljes megoldását adva a Huyghens által

[4] Annak érdekében, hogy a levélváltás rövidebb idő alatt történhessen meg, feltételeztük, hogy Fermat november közepén Orléansban tartózkodott és így közelebb került Párizshoz. Itt jegyezzük meg, hogy Pascal és Fermat soha nem találkoztak személyesen.

megoldás nélkül közölt kérdéseknek. E munka legjelentősebb része a negyedik, amely a nagy számok ún. Bernoulli-féle törvényével foglalkozik. Hasonlóképpen Huyghens könyvéhez, és ezen keresztül Pascal és Fermat levelezéséhez csatlakozik Montmort (1678-1719) „Essai d'Analyse sur les Jeux de Hazards" c. munkája, amely valamivel később íródott, de előbb jelent meg, mint Bernoulli műve; ugyanez mondható el A. de Moivre (1667-1754) „De Mensura sortis seu de Probabilitate Eventum in Ludis A Casu Fortuito Pendentibus" című alapvető művéről, amely 1711-ben jelent meg a Philosophical Transactions-ben.

A szerencsejátékokra vonatkozó valószínűségszámítási feladatok mellett már a valószínűség-számítás fejlődésének legelején felléptek másféle valószínűségszámítási feladatok is: a halandósági táblázatokkal és biztosítással kapcsolatos valószínűségszámítás feladatok. Londonban a halálozásokról már 1592-től kezdve pontos feljegyzéseket vezettek; John Graunt volt az első, aki 1662-ben ezen táblázatok alapján halandósági valószínűségeket számított ki az életkor függvényében. Néhány évvel később Hollandiában van Hudden és de Witt hasonló számításokat végeztek és alkalmazták ezeket életjáradékok kiszámítására: e kérdést később (1693-ban) Halley tárgyalta alaposabban. Nem bizonyítható, de igen kézenfekvő az a feltevés, hogy a valószínűségszámításnak a halandósági táblázatokkal és a biztosítással való kézenfekvő kapcsolatával Pascal már tisztában volt: ennek megfelelően egy ilyen utalást (a hajóbiztosítással kapcsolatban) a 4. levélben megengedhetőnek tartottam.

A VALÓSZÍNŰSÉG MATEMATIKAI FOGALMÁRÓL

Mint minden fogalom a valószínűség matematikai fogalma is fokozatosan alakult ki. Pascal és Fermat leveleiben a valószínűség fogalma explicit alakban nincs definiálva. Érdekes, hogy Huyghens művében az alapfogalom nem a valószínűség, hanem a nyereség várható értéke. Huyghens a várható értéket a következőképpen definiálja: Ha p esetben a összeget nyerek, q esetben pedig b összeget és az összes esetek „egyformán lehetségesek", úgy nyereségem várható értéke $\frac{pa+qb}{p+q}$. J. Bernoulli „Ars Coniectandi"-jának 4. részében találkozunk először a valószínűség „definíciójával". Bernoulli szerint „a valószínűség a bizonyosság foka és úgy viszonylik a bizonyossághoz, mint a rész az egészhez". Ezen inkább filozófiai, mint matematikai jellegű „definíció" mellett szerepel Bernoulli-nál a valószínűség ún. „klasszikus definíció"-ja is, amely szerint „egy esemény valószínűsége egyenlő az eseményre nézve kedvező esetek számának és az összes esetek számának hányadosával, feltéve, hogy ezen esetek mind egyformán lehetségesek". A valószínűség definíciójának ez a megfogalmazása Bernoulli-nál nem pontosan így szerepel; a fenti fogalmazás Laplace „Théorie analytique de la probabilité" c. alapvető, a klasszikus valószínűségszámítás eredményeit összegző és a további fejlődésnek nagy lökést adó munkájában található. Ugyanez a definíció szerepel Laplace „Essai philosophique sur les probabilités" című munkájában is, amely a valószínűség fogalmával kapcsolatos elvi kérdéseknek igen világos, részletes, gondolatébresztő és élvezetes kifejtését tartalmazza. Bár a valószínűség fent említett klasszikus definíciója Pascal valódi leveleiben explicite nem szerepel, úgy hisszük, nem anakronizmus, hogy e definíció a mi Pascal-leveleinkben előfordul, hiszen Pascal ténylegesen e definíciót használta de Méré feladatainak megoldása során. E definíció gyakorlati szempontból kielégítő volt mindaddig, amíg a valószínűségszámítás főként szerencsejátékokra vonatkozó elemi feladatokkal foglalkozott. Elvi szempontból azonban e definíció nem kielégítő, annak ellenére, hogy ma is helytálló az, amit Pascal a 2. levélben e definíció védelmében mond, ti., hogy e definíció csak látszólag tartalmaz circulus vitiosus-t.

E definíciónak valóban nem ez a hibája, hanem az, hogy nem is definíció. Arra a kérdésre, hogy mi is tulajdonképpen a valószínűség, e definíció nem ad választ, csak azt mondja meg, hogy a legegyszerűbb esetekben[5] hogyan lehet azt kiszámítani.

A valószínűségszámítás első művelői valójában nem is tekintették másnak; a valószínűség definíciójának ők inkább Bernoulli fent idézett meghatározását tekintették (mely szerint a valószínűség a „bizonyosság foka"), vagy nem is igen érezték szükségét egy formális definíciónak, mert a valószínűséget olyan alapfogalomnak tartották, amelynek jelentése evidens és nem szorul magyarázatra. Feladatukat csak abban látták, hogy konkrét problémáknál kiszámítsák az azokban szereplő események valószínűségét. Figyelembe véve a matematika akkori fejlettségi fokát, ezen nem is csodálkozhatunk, hiszen pl. a XVIII. században a számfogalom, a függvény vagy a határérték fogalma sem volt a mai értelemben igazán tisztázott, de akkoriban ennek hiányát sem érezték.

Gyökeresen megváltozott azonban a helyzet a XIX. században, amikor a matematika és a matematikai szabatosság fogalma alapvető átalakuláson ment keresztül. Kialakult a matematikára és annak a valósághoz való viszonyára vonatkozó mai felfogás, mely szerint a matematika minden egyes fejezetét axiomatikusan, reális hátterétől elvonatkoztatva kell felépíteni, mint önmagában zárt, logikailag ellentmondásmentes, absztrakt elméletet, amelyben az alapfogalmakat nem kell és nem is lehet definiálni és azoknak semmilyen más tartalmat nem szabad tulajdonítani, mint ami az axiómáiban implicité bennfoglaltatik.

Az ily módon axiomatikusan felépített matematikai elméletek a valóság leírására mármost úgy használhatók fel, hogy ezek a valóság bizonyos aspektusainak elvont modelljeiként szolgálhatnak. A matematika e modern felfogásának konzekvens keresztülvitele alapvetően átformálta magát a matematikát és egy új rohamos fejlődés kiindulási pontjául szolgált. A halmazelmélet, a valós függvénytan, a topológia, a modern algebra és a funkcionálanalízis létrejöttével, a matematikai logika kifejlődésével a matematika arculata gyökeresen megváltozott. A matematika elvi kérdéseinek tisztázása hatalmas lendületet adott a matematika felhasználásának a természettudományokban és a társadalomtudományokban egyaránt. Ebből a nagyszabású átalakulásból és az ennek nyomán meginduló fejlődésből a valószínűségszámítás meglepően sokáig, egészen a XX. század elejéig kimaradt. Bár a XIX. században Gauss, Laplace, Poisson, Csebisev, Markov, Bertrand, Poincaré és sokan mások számos eredménnyel gyarapították a valószínűségszámítást és ugyanakkor a valószínűségszámítás gyakorlati alkalmazásai nagy jelentőségre tettek szert a természettudományokban, a társadalomtudományokban és a gazdasági életben, a valószínűségszámítás matematikai elméletének elvi alapjai terén lényeges előrehaladás nem történt.

Ez az elmaradás ahhoz vezetett, hogy a XX. század elején a matematikusok zöme a valószínűségszámítást nem is fogadta el a matematika szerves részének, egyenrangú ágának, hanem a matematika és fizika, ill. a filozófia között közbenső helyet elfoglaló és meglehetősen kétes értékű tudományágnak tekintette. Hilbert már 1900-ban felismerte e lemaradás káros voltát és ezért a matematika legaktuálisabb megoldatlan feladatainak általa összeállított híres listájába felvette a valószínűségszámítás axiomatikus megalapozásának - és ezzel a matematika XX. századbeli színvonalára való felemelésének - problémáját. E feladat megoldására az első jelentős kísérlet R. v. Mises tette meg 1919-ben (lásd [15]). Bár az általa javasolt felépítés nem bizonyult célravezetőnek és ma már inkább csak történeti jelentősége van, az általa kiváltott viták számos matematikus érdeklődését keltették fel a probléma iránt. A valószínűségszámításnak a modern matematika szellemében való szabatos, axiomatikus megalapozását kielégítően

[5] Modern terminológiával az ún. „klasszikus valószínűségi mezők" esetében.

elsőnek A. N. Kolmogorov (lásd [16]) oldotta meg[6] 1933-ban. A valószínűségszámítás Kolmogorov-féle axiomatikus elméletében a véletlen eseményeket halmazok reprezentálják és a valószínűség egyszerűen egy e halmazokon értelmezett normált mérték. Kolmogorov elméletében a várható érték mint (absztrakt) Lebesgue-féle integrál van értelmezve. Azáltal, hogy Kolmogorov a valószínűségszámítást a halmazelmélet, ill. a mértékelmélet alapjaira helyezte, egy csapásra nemcsak a valószínűségszámítás logikailag kielégítő megalapozását adta meg, hanem azt bekapcsolta a modern matematika vérkeringésébe és lehetővé tette a matematika fejlett ágainak felhasználását a valószínűségszámításban. Kolmogorov elmélete, egyszerűsége és említett előnyei folytán rövidesen általánosan elfogadottá vált és az elmúlt 30 évben a valószínűségszámítási kutatások szilárd alapjául szolgált.[7] Az alapok tisztázása ugrásszerűen fejlődést tett lehetővé, mind a valószínűség matematikai elméletében, mind pedig az elmélet alkalmazásai terén. A valószínűségszámítás azóta rohamos léptekkel halad előre és egyre szélesebb területen kerül eredményes felhasználásra.

[6] Kolmogorov elmélete, mint minden tudományos felfedezés, számos előzményre támaszkodott. Kolmogorov elméletének előzményeit lásd [17]-ben.

[7] Bizonyos fizikai, statisztikai és más alkalmazásokkal kapcsolatos problémák szükségessé tették a valószínűségszámítás Kolmogorov féle elméletének bizonyos irányú általánosítását, az ún. feltételes valószínűségi mezők fogalmának bevezetését (lásd [18]); ez az elmélet azonban nem jelent eltérést a Kolmogorov-féle elmélettől, hanem annak logikus továbbfejlesztésének tekinthető, melynek alapgondolatát maga Kolmogorov vetette fel elsőnek, bár azt nem dolgozta ki.

MÉG EGY LEVÉL AZ OLVASÓHOZ

Kedves Olvasó!

Átolvasva előző, Önhöz írt levelemet, látom, hogy az kiegészítésre szorul. Csak azt mondtam el, hogy miért választottam a fiktív Pascal-levelek formáját mondanivalóm közlésére, de nem szóltam arról, hogy tulajdonképpen mi is vezetett arra, hogy e kérdésekről írjak. E levelemmel ezt a hiányt igyekeztem pótolni.

A 4. függelékben rámutattam arra, hogy a valószínűségszámítás matematikai elméletét illetően ma lényegében egyetértés uralkodik a hozzáértő matematikusok között. Nem mondható ez el azonban a valószínűségszámítás elvi kérdéseiről. E kérdések a valószínűség fogalmának a valósághoz való viszonyára, a valószínűségszámítás tételeinek alkalmazhatóságára, interpretációjára vonatkoznak; ezek tehát tulajdonképpen nem is matematikai problémák, hanem inkább filozófiai, ismeretelméleti jellegűek, és így nem meglepő, hogy e kérdések ma is vita tárgyát képezik.

Aki a valószínűségszámítást alaposan el akarja sajátítani, aki a valószínűségszámítás eredményeit bármely területen sikerrel alkalmazni kívánja, de még az is, aki csak megérteni akarja, hogy a valószínűségszámítás mire használható és mit nyújthat a kutatónak vagy a gyakorlati embernek, elkerülhetetlenül szembekerül e kérdésekkel.

A valószínűségszámítás különböző fokon, különböző előképzettségű és érdeklődésű hallgatóságnak való tanítása során, valamint a valószínűségszámítás alkalmazásaival való foglalkozás során egyaránt azt tapasztaltam, hogy a valószínűségszámítás matematikai elméletében való elmélyedéshez és annak eredményes felhasználásához nem elegendő (bár persze nélkülözhetetlen) a matematikai elmélet a célnak megfelelő mértékben való megértése és megtanulása: emellett szükséges a valószínűségszámítás sajátos gondolkodásmódjának elsajátítása is.

A valószínűségszámítás gondolkodásmódjának elsajátításához két dolog szükséges: a valószínűségszámítás konkrét alkalmazásaival való közelebbi megismerkedés, valamint a valószínűség fogalmával kapcsolatos elvi kérdések alapos megértése. Ez utóbbi cél eléréséhez kíván segítséget nyújtani e kötet.

Azok az elemi valószínűségszámítási ismeretek, amelyek nélkül e kérdések meg sem érthetők, magukban a levelekben megtalálhatók. Remélem ezért, hogy e levelek akkor is érthetőek voltak az Ön számára, ha a valószínűségszámítással előzőleg nem foglalkozott volna; örülnék azonban, ha e könyv olvasása közben kedvet kapott volna ahhoz, hogy a valószínűségszámítással alaposabban is megismerkedjék. Bár az e kötetben tárgyalt kérdések különösebb matematikai előismeretek nélkül is megérthetők, ez távolról sem jelenti azt, hogy e kérdések egyszerűek: nehézségük azonban inkább logikai, mint matematikai jellegű, hiszen e kérdések már a legelemibb valószínűségszámítási feladatokkal kapcsolatban is felvethetők. Éppen ezért nem indokolatlan az a feltevés, hogy e kérdéseket már Pascal és Fermat is felvetették, és igyekeztek is azokra választ adni maguknak. Ezért nem tekinthető anakronizmusnak, hogy az e kötetben közölt levelekben Pascal állást foglal mindezekben a kérdésekben.

A szóban forgó kérdések - mint mondottam - ismeretelméleti jellegűek, és a tudományos megismerés alapvető elvi problémáival függnek össze. Mi sem áll távolabb tőlem, kedves Olvasó, minthogy azt higgyem, hogy e levelekkel ezeket az évszázadok óta vitatott kérdéseket végérvényesen lezártam volna. Célom ennél sokkal szerényebb volt: e kérdések közérthető exponálása. Ennek során azonban szükségképpen kifejezésre jutott saját véleményem is. Különösen vonatkozik ez a 4. levélre.

Azt a felfogást, amelyet a vitában Miton képvisel, először de Morgan fogalmazta meg, 1847-ben. Szerinte egy véletlen esemény valószínűségére vonatkozó megállapítás mindig szubjektív, függ annak a személyétől, aki e megállapítást teszi, és azt fejezi ki, hogy milyen mértékben számít az illető a szóbanforgó esemény bekövetkeztetésére, tehát az illető meggyőződésének mértékszáma. Bár ma a valószínűségszámítással foglalkozó matematikusok többsége a valószínűségnek objektív jelentést tulajdonít, több neves matematikus ma is valószínűség szubjektivitásának híve. (Lásd. pl. [19]-[20] valamint a [21] cikkgyűjteményt.) Azt hiszem nem kell külön hangsúlyoznom, mert Ön ezt amúgy is észrevette, hogy e kérdésben én Pascallal értek egyet.

Ha Ön a szóban forgó kérdésekkel alaposabban kíván foglalkozni és a valószínűség fogalmára vonatkozó különböző álláspontokat részletesebben meg kívánja ismerni, figyelmébe ajánlom a kérdés kiterjedt irodalmából a már említetteken kívül az irodalomjegyzékben [22]-[27] alatt felsorolt munkákat.

Befejezésül még csak annyit, hogy a valószínűség fogalmával kapcsolatos elvi kérdések szorosan összefüggenek a matematikai statisztika és az információelmélet bizonyos alapvető kérdéseivel. (Így például a valószínűség objektív vagy szubjektív voltára vonatkozó vitában központi szerepet játszik az ún. Bayes-féle módszer kérdése.) Az adott keretek nem tették lehetővé, hogy e kötetben ezekre a kérdésekre is kitérjek. Talán egy más alkalommal ezekről is írok Önnek.

Addig is minden jót kíván

őszinte híve
Rényi Alfréd

JEGYZETEK

[1] Utalás Pascal Fermathoz 1654. október 27-én írt levelére, lásd [1], 90. o.

[2] Vö. Pascal 1660. augusztus 10-i levelét Fermathoz, lásd [1], 522. o.

[3] „Celeberrimae Matheseos Academiae Parisiensi", lásd [1], 73-74. o.

[4] Az eredeti latin szöveg (lásd loc. cit 3) a következő:

„et sic matheseos demonstrationes cum aleae incertirudene jungendo, et quae contraria videntur conciliando ab utraque nominationem suam accipiens stupendum hunc titulem jure sibi arrogat: aleae Geometria".

[5] Vö. „Pensées", 210, [11], 1146.o. és 263, [1], 1156. o.

[6] Vö. „Pensées", 84, [1], 1105-1107.o.

[7] Vö. „Pensées", 217, [1], 1147. o.

[8] Vö. Pascal levele Fermathoz 1654. július 29-én, lásd [1], 77. o.

[9] Vö. Ioc. cit. 8) 77. o.

[10] Vö. Lettres Provinciales, 5. levél, [1], 710. o.

[11] Descartes, Regulae ad Directionem Ingenii, III. regula, lásd [8], 27. o.

[12] Lásd [4]

[13] Cicero, Tusculanae disputationes, V. 38.

[14] Lásd [8], 32. o. "Regulae ad Directionem Ingenii" c. munkájában a IV. regulában szó szerint így jellemzi a matematikát.

[15] Lásd [4],

[16] Lásd [7], 536. o.

[17] Lásd [6], 1300, (IV. könyv 945-946. sor)

[18] Itt némi anakronizmust követtünk el, mert a lóverseny csak jóval Pascal halála után honosodott meg Franciaországban.

[19] Lásd [6], 21. o. (I. könyv, 263-266. sor)

[20] Lásd [6], 151. o. (V. könyv, 409-421. sor). Idézhette volna Pacal itt Lucretiustól a következő sorokat is (lásd V. könyv, 177-184, [6], 145. o.)

„Mert hisz a rengeteg őselemet már ősi időktől
Sok-sok módon hányja-kavarja az összeütődés,
S gyakran önsúlyuktól is mozgásnak erednek
Mindenképp egyesülnek s megpróbálnak akármit
Hogy mit tudnak szülni, ha egymással keverednek
Nem csoda hát, ha eközben olyan helyzetbe verődtek
És az idők folyamán mozgásuk is úgy alakult ki
Mint milyenekben most a világnak dolgai folynak."

Vagy idézhette volna az I. könyv 1015-1024. sorait is ([6], 40. o.), amelyek majdnem szó szerint egyeznek a Pascal által idézettekkel:

„Mert bíz az őselemek helyüket nem az ész vezetése
Mellett foglalták el a térben tervszerű rendben
És mozgásuk módját sem szabták meg előre,
Minthogy azonban változatos mozgással ezernyi
Formát öltenek, ütve-verődve az űrben örökké
Megpróbálva az összeverődés minden alakját,
Végre olyan formákra akadnak, mint milyenekből
Áll a világnak a mostani rendje teremtve, s amelyben
Fenntarthatja magát esztendők hosszú során át
Minthogy végre a kellő mozgásokba verődött.”

[21] Miton itt Lucretius következő soraira gondolt (lásd [6], 4-48. o. II. könyv, 114-124. sor):

„Nézd ugyanis, valahányszor a napnak a házba szüremlő
Fénye homályos zugba bocsátja aranysugarát, hát
Sok csöpp testecskét láthatsz kavarogni az űrben
Erre meg arra libegve a fény ragyogó mezejében;
S mintha örök harcot harcolva, tusázva, csatákat
Vívnának seregestől egy percet se pihenve
Szét-szétugranak, aztán ismét megtömörülnek
Elképzelheted ebből is, hogy az őselemek mint
Járják le s föl táncukat egyre a végtelen űrben
(Annyira persze, amennyire ily csöpp kép a nagyobbnak
Mása lehet s mintegy nyom amannak az ismeretéhez.)”.

A Brown-féle mozgásnak ennél költőibb leírását azóta sem adta senki.

[22] Lásd [1], 1146. o.

[23] Lásd [1], 535. o.

[24] Lásd pl. [1], 1222. o., Pensées 481.

[25] Pascal és Fermat levelezése megjelent Fermat összegyűjtött munkái között (lásd [29]), valamint angol fordításban F. N. David a valószínűségszámítás történetéről írott érdekes könyvének (lásd [28]) egyik függelékeként. Pascal első levele Fermathoz elveszett; megmaradt Fermat (dátum nélküli) válasza erre az elveszett levélre, Pascal 1654. július 29-i második levele, Fermat erre írt (Carcavinak címzett) 1654. augusztus 9-i válasza, Pascal 1654. augusztus 29-i levele és szeptember 25-i válasza Pascal harmadik levelére, végül Pascal 1654. október 27-i negyedik levele. Megjegyzendő, hogy F. N. David véleménye szerint Fermaté a fő érdem a szóban forgó problémák megoldásában és így a valószínűségszámítás létrehozásában; azok az érvek azonban, amelyekkel ezt a véleményét alátámasztani igyekszik, egyáltalán nem meggyőzőek. Elsősorban arra kell, hogy rámutassunk, hogy az osztozkodás problémájának az a szellemes megoldása, amely az összes lehetőség összeszámlálása helyett egy rekurziós eljárást ad a szóban forgó valószínűségek meghatározására, minden kétséget kizáróan Pascaltól származik és, még ha minden egyébtől eltekintünk is, pusztán ezzel Pascal jelentős gondolattal járult hozzá a valószínűségszámítás fejlődéséhez.

[26] Lásd [1], 77. o.

[27] Lásd [1]. 597. o.

[28] Lásd [1], 1157. o. Pensées 264., lásd továbbá az 1156. oldalon, Pensées 257. és 263.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] B. Pascal, Oeuvres Completes, Bibliotheque de la Pleiade (J. Chevalier jegyzeteivel), Gallimard, Paris, 1954.

[2] J. MESNARD, Pascal, Hatier, Paris, 1951.

[3] A. BÉGUIN, Blaise Pascal in Selbstzeugnissen und Bilddokumenten, Rowohlt, 1959.

[4] MONTAIGNE, Esszék (ford. Bajcsa András), Bibliotheca, Budapest, 1957.

[5] K.G. HAGSTROEM, Les préludes antiques de la theorie des probalités, Stockholm, C. E. Fritzes K. Hovbokhandel, 1942.

[6] LUCRETIUS, A természetről (ford. Tóth Béla), Alföldi Magvető, Debrecen, 1957. Egyes részletek Lucretius művéből megjelentek Meller Péter fordításában a Világirodalmi Antológia (Tankönyvkiadó Bp. 1952) I, kötetében (Szerkesztettek Szilágyi János György és Trencsényi-Waldapfel Imre) 520-535. o.

[7] PLATÓN, Összes művei, Magyar Filozófiai Társaság, Budapest, 1943.

[8] R. DESCARTES (Auswahl und Einleitung von I. Frenzel), Fischer Bücherei, Frankfurt a. M. 1960.

[9] CICERO, Tusculanae disputationes, V. 38.

[10] RÉNYI A., Dialógusok a matematikáról (2. kiadás), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1966.

[11] TH. WILDER, The Ides of March.

[12] RÉNYI A., Blaise Pascal, 1623-1662, Magyar Tudomány 8/1964, 102-108.

[13] I. TODHUNTER, History of the theory of probalbility from Pascal to Laplace, MacMillan, London, 1865.

[14] JORDAN K.: Fejezetek a klasszikus valószínűségszámításból Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956.

[15] R. v. MISES, Wahrscheinkichkeit, Statistik und Wahrheit, Wien. 1928.

[16] A. N. KOLMOGOROFF, Grundbegriffe der Wahrscheinkichkeitsrenhnunk, Springer, Berlin, 1933.

[17] RÉNYI A., Valószínűségszámítás (2. átdolgozott kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.

[18] A. RÉNYI, A new axiomatic theory of probalbility, Acta Sci. Math. Acad. Sci. Hung., 1965.

[19] B. DE FINETTI, La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives, Annales de l'Institut H. Poincare, Paris, 7 (1937).

[20] L. J. SAVAGE, The Foundations of Statistics, Wiley, New York, 1954

[21] Studies in Subjective Probability (Kiadták H. E. Kyburg és H. E. Smokler), Wiley, New York, 1964.

[22] R. CARNAP, Logical Foundations of Probability, University of Chicago Press, 1950.

[23] É. BOREL, Probabilité et certitude, Presses Universitaires de France, Paris, 1956.

[24] I. J. GOOD, Probability and the Weighing of Evidence, Griffin, London, 1950.

[25] A. N. KOLMOGOROFF, Verojatnoszty, Bolsaja Szovjetszkaja Enciklopedija, 7. kötet, Moszkva, 1951.

[26] Théorie des probabilités, Exposes sur ses fondements et ses applications, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[27] G. POLYA, Mathematics and Plausible Reasoning, II. kötet, Patterns of Plausible Inference, Princeton University Press, Princeton, 1954.

[28] F. N. DAVID, Games, Gods and Gambling (The origins and history of probability and statistical ideas from the earliest times to the Newtonian era), Griffin, London, 1962.

[29] OEUVRES DE FERMAT, Vol. 2, (kiadták P. Tannery és C. Henry) Gauthier-Villars, Paris 1894.