VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI MÓDSZEREK AZ ANALÍZISBEN II.

RÉNYI ALFRÉD

0. §. BEVEZETÉS

Ugyanúgy, mint a dolgozat I. részének[1] paragrafusai, e rész paragrafusai is az analízis egy-egy konkrét problémáját tárgyalják a valószínűségszámítás módszerei segítségével és így egymástól függetlenül, tetszőleges sorrendben olvashatók. Egyes §-ok közvetlenül kapcsolódnak a dolgozat I. részének egyes §-aihoz. Így e dolgozat 1. §-a az I. rész 7. §-ához, míg e dolgozat 2. §-a az I. rész 6. §-ához csatlakozik. E dolgozat 3. §-a azonosságok bizonyításával, a 4. § végtelen sokszor differenciálható, nem analitikus függvényekkel, az 5. § a Haar-féle ortogonális függvények, a 6. § a Walsh-féle függvények szerinti sorfejtésekkel, a 7. § pedig a másodfajú Stirling-számok aszimptotikus vizsgálatával foglalkozik; ez a § kapcsolódik az I. rész 3. §-ához.

Újból hangsúlyozni kívánjuk, hogy ezek csak kiragadott példák: a valószínűségszámítás módszerei az analízis számos más fejezetében is sikerrel használhatók fel. Így például a [17] dolgozat a valószínűségszámítási módszerek sorelméleti alkalmazásaival foglalkoznak, míg a [13] a Legendre-polinomok valószínűségszámítási vonatkozásaival. Ugyanúgy, mint a dolgozat I. részében, elsősorban olyan példákat válogattunk ki, amelyek viszonylag kevés valószínűségszámítási ismerettel megérthetők. Kivételt képez e tekintetben az 5. és a 6. §, amelyben a martingál-konvergencia tétel fel van használva; e tétel megértéséhez szükséges fogalmakat a martingálok elméletéből az 5. §-ban ismertetjük.

E dolgozat folytatásaként egy következő dolgozatban az információelmélet analízisbeli alkalmazásait fogjuk ismertetni.

1. §. A WIMAN-TÉTEL ÉLESÍTÉSE EGY EGÉSZ FÜGGVÉNY HATVÁNYSORÁNAK MAJDNEM MINDEN ELŐJELEZÉSÉRE

Egy *Erdős Pál*lal közös, sajtó alatt levő dolgozatunkban [1] a következő tételt bizonyítottuk be:

1. TÉTEL. *Legyen*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

egy tetszőleges transzcendens egész függvény; legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *egy valószínűségi mező, és legyenek* $\xi_n = \xi_n(\omega)$ $(n=0, 1, \ldots; \omega \in \Omega)$ *e valószínűségi mezőn értelmezett,*

[1] Valószínűségszámítási módszerek az analízisben, I., Matematikai Lapok, 18 (1967) 5—35

független valószínűségi változók, amelyek a ± 1 értékeket 1/2 valószínűséggel veszik fel. Vizsgáljuk az

$$f(z,\omega)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi_n(\omega) z^n \tag{1.2}$$

véletlen egész függvényt. Legyen

$$M(r,\omega)=\max_{|z|=r} |f(z,\omega)| \quad (r \geqq 0) \tag{1.3}$$

és

$$\mu(r)=\max_n |a_n| r^n \quad (r \geqq 0). \tag{1.4}$$

Akkor minden $\delta>0$-ra és $\omega \in \Omega$ majdnem minden választása mellett[2] *minden $r \notin E_\delta(\omega)$-re fennáll az*

$$M(r,\omega) < \mu(r)(\log \mu(r))^{\frac{1}{4}+\delta} \tag{1.5}$$

egyenlőtlenség, ahol $E_\delta(\omega)$ az $r>0$ félegyenes egy olyan (δ-tól és ω-tól függő) részhalmaza, amelynek logaritmikus mértéke véges.[3]

Megjegyzés. Erdős Pál már 1952-ben észrevette (l. [2]), hogy az (1. 5) egyenlőtlenség érvényes az exponenciális függvény hatványsorának majdnem minden előjelzésére, és hogy e függvényre az 1/4 kitevő nem helyettesíthető kisebb számmal. Ez a példa mutatja, hogy az 1. tétel állítása általában nem élesíthető. Persze speciális (pl. erősen hézagos) hatványsorokra még az is előfordulhat, hogy minden előjelzésre $M(r,\omega)<C\mu(r)$ is igaz, ahol C állandó. Azokra az egész függvényekre, amelyek együtthatósorozata bizonyos szabályosságot mutat, általában igaz, hogy az 1/4 kitevő nem helyettesíthető kisebbel.

Az 1. tétel bizonyítása. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a_0=1$. Legyen

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n, \tag{1.6}$$

akkor

$$M_1(r)=\max_{|z|=r} |f_1(z)| = f_1(r). \tag{1.7}$$

Az $f_1(z)$ hatványsorra érvényes a Wiman-tétel, vagyis megadható olyan E_δ halmaz, amelyre

$$\int_{E_\delta} \frac{dr}{r} < +\infty \tag{1.8}$$

úgy, hogy ha $r \notin E_\delta$, akkor

$$M_1(r) < \mu(r)(\log \mu(r))^{\frac{1+\delta}{2}}. \tag{1.9}$$

[2] Vagyis, ha $\omega \notin A$, ahol $A \in \mathscr{A}$ egy olyan halmaz, amelyre $P(A)=0$.

[3] Vagyis amelyre

$$\int_{E_\delta(\omega)} \frac{dr}{r} < +\infty.$$

Az E_δ halmazról feltehető, hogy az megszámlálható sok idegen nyílt intervallum egyesítése, amely intervallumok végpontjai a végesben sehol sem torlódnak. Mármost definiáljuk az R_n számsorozatot a következőképpen: Legyen $R_0=0$; ha már R_k definiálva van, ha $k \leqq n$, az R_{n+1} számot a következőképpen definiáljuk: Jelölje $R'_n > R_n$ azt a számot, amelyre $\log \mu(R'_n) = \log \mu(R_n)+1$. Ha $R'_n \notin E_\delta$, akkor legyen $R_{n+1}=R'_n$; ha viszont $R'_n \in E_\delta$, akkor R'_n beleesik az E_δ halmazt képező egyik intervallumba: ez esetben legyen R_{n+1} ezen intervallum alsó végpontja, és legyen R_{n+2} ezen intervallum felső végpontja. Így tehát az R_n sorozatról $(n=0, 1, \ldots)$ a következőket állíthatjuk:

a) $R_n \notin E_\delta$,

b) ha az (R_n, R_{n+1}) nyílt intervallumban van olyan r, amely nem tartozik az E_δ halmazba, akkor

$$\log \mu(R_{n+1}) = \log \mu(R_n)+1.$$

c) $\log \mu(R_n) \geqq \left[\frac{n}{2}\right]$.

Mármost tegyük fel, hogy ω valamely értékére már bebizonyítottuk, hogy ha $n \geqq n_0(\omega)$, akkor

$$M(R_n, \omega) \leqq \frac{1}{3}\,\mu(R_n)\big(\log \mu(R_n)\big)^{\frac{1}{4}+\delta}. \tag{1. 10}$$

Mivel $M(r, \omega)$ és $\mu(r)$ egyaránt r-nek növekvő függvényei, ha $n \geqq n_0(\omega)$, $R_n < r < R_{n+1}$, továbbá $r \notin E_\delta$, akkor az R_n sorozat b) tulajdonsága miatt érvényes a

$$M(r, \omega) \leqq M(R_{n+1}, \omega) \leqq \frac{1}{3}\,\mu(R_{n+1})\big(\log \mu(R_{n+1})\big)^{\frac{1}{4}+\delta}$$

és így az

$$M(r, \omega) < \mu(r)\big(\log \mu(r)\big)^{\frac{1}{4}+\delta} \tag{1. 11}$$

egyenlőtlenség, hacsak $n \geqq n_0(\omega)$, $r \geqq r_0$ és $r \notin E_\delta$.

Így tehát elegendő bebizonyítani, hogy az (1. 10) egyenlőtlenség 1 valószínűséggel fennáll valamely (ω-tól függő) $n_0(\omega)$-tól kezdve.

Mármost legyen $g(x) = \log f_1(e^x)$, akkor ugyanúgy, mint a *Wiman*-tétel *Rosenbloom*-féle bizonyításánál (1. I. rész 2. §), a Csebisev-egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$\sum_{|n-g'(\log r)| > A\sqrt{g''(\log r)}} |a_n| r^n < \frac{f_1(r)}{A^2}, \quad \text{ha} \quad A > 1$$

és így, ha $A = \big(\log \mu(r)\big)^{\frac{1}{8}}$ és $r \notin E_\delta$

$$\sum_{|n-g'(\log r)| > (\log \mu(r))^{1/8}\sqrt{g''(\log r)}} |a_n| r^n < \mu(r)\big(\log \mu(r)\big)^{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}.$$

Mármost, figyelembevéve (1. I. rész 2. §), hogy ha $r \notin E_\delta$, akkor $g''(\log r) < \big(\log f_1(r)\big)^{1+\delta} < 4\big(\log \mu(r)\big)^{1+\delta}$, és bevezetve az

$$A(r) = g'(\log r) \tag{1. 12}$$

és

$$c(r) = 2\big(\log \mu(r)\big)^{\frac{5}{8}+\frac{\delta}{2}} \tag{1. 13}$$

jelölést, következik

$$\sum_{|n-A(r)|\geqq c(r)} |a_n| r^n < \mu(r)(\log \mu(r))^{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}.$$

Ennélfogva

$$(1.14)\qquad M(R_n, \omega) < \mu(R_n)(\log \mu(R_n))^{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}} + \max_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi} \left| \sum_{|k-A(R_n)|<C(R_n)} a_k \xi_k r^k e^{ik\varphi} \right|.$$

Most fel fogjuk használni a 7. §-ban bebizonyított (7.13) egyenlőtlenséget. Ugyanazzal a meggondolással, amellyel (7.13)-ból a 7. § lemmáját bebizonyítottuk, következik, hogy ha $b_1, b_2, \ldots, b_D$ tetszőleges komplex számok,

$$(1.15)\qquad P\left(\max_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi} \left|\sum_{k=1}^{D} b_k \xi_k e^{ik\varphi}\right| > 2\lambda \sqrt{\sum_{k=1}^{D} |b_k|^2}\right) < \left(\frac{8\pi D^{\frac{3}{2}}}{\lambda} + 4\right) e^{-\frac{\lambda^2}{8}}$$

és így, $\lambda = \sqrt{44 \log D}$ helyettesítéssel

$$(1.16)\qquad P\left(\max_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi} \left|\sum_{k=1}^{D} b_k \xi_k e^{ik\varphi}\right| > 2\sqrt{44 \log D \cdot \sum_{k=1}^{D} |b_k|^2}\right) < \frac{1}{D^4},$$

ha $D \geqq D_0$.

Így tehát

$$P\left(\max_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi} \left|\sum_{|k-A(r)|<c(r)} a_k \xi_k r^k e^{ik\varphi}\right| > 2\sqrt{44 \log 2c(r) \cdot \sum_{|k-A(r)|<c(r)} |a_k|^2 r^{2k}}\right) < \frac{1}{(2c(r))^4}.$$

Mármost, ha $r \notin E_\delta$

$$\sum_{|k-A(r)|\leqq C(r)} |a_k|^2 r^{2k} \leqq \mu(r) f_1(r) \leqq \mu^2(r)(\log \mu(r))^{\frac{1+\delta}{2}},$$

ennélfogva, ha A_n-nel jelöljük a

$$\max_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi} \left|\sum_{|k-A(R_n)|<C(R_n)} a_k \xi_k R_n^k e^{ik\varphi}\right| > 8\mu(R_n)(\log \mu(R_n))^{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}$$

eseményt, nyerjük, hogy

$$(1.17)\qquad P(A_n) \leqq \frac{1}{(2C(R_n))^4} \leqq \frac{1}{(\log \mu(R_n))^{\frac{5}{2}}}.$$

Tekintettel az R_n sorozat c) tulajdonságára, azt kapjuk, hogy

$$(1.18)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty.$$

Ennélfogva a Borel—Cantelli lemma szerint 1 valószínűséggel az A_n események közül csak véges sok következik be. Így tehát 1 valószínűséggel van olyan $n_0(\omega)$, hogy ha $n \geqq n_0(\omega)$, akkor

$$(1.19)\qquad \max_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi} \left|\sum_{|k-A(R_n)|<C(R_n)} a_k \xi_k(\omega) R_n^k e^{ik\varphi}\right| < 8\mu(R_n)(\log \mu(R_n))^{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}.$$

Így, tekintettel (1. 13)-ra, (1. 20)-ból következik, hogy (1. 11) igaz, ha $n \geqq n_0(\omega)$; ezzel tételünket bebizonyítottuk.

Megjegyzendő, hogy az 1. tétel állításához hasonló állítást, egész függvények bizonyos osztályára elsőnek *P. Lévy* bizonyított be. (l. [22]).

2. §. A CARTAN-THULLEN TÉTEL VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI BIZONYÍTÁSA

Aki bármilyen keveset foglalkozott a többváltozós komplex függvénytannal, jól tudja, hogy a többváltozós esetben számos olyan probléma merül fel, amelynek az egyváltozós esetben nincs megfelelője. E kérdések közé tartozik a *regularitási tartományok* kérdése. Az egyváltozós esetben e probléma nagyon egyszerűen elintézhető. Akárhogy adunk meg a komplex számsíkon egy T tartományt (azaz egy összefüggő nyílt halmazt), megadható egy olyan $f(z)$ analitikus függvény, amely a T tartományban reguláris, és amelynek a T tartomány a regularitási tartománya, vagyis az $f(z)$ függvény nem folytatható analitikusan a T tartományon kívüli pontba, vagy más szóval nem adható meg olyan, a T tartományt valódi részhalmazként tartalmazó T^* tartomány, úgy hogy $f(z)$ reguláris legyen T^*-ban is.

A többváltozós esetben azonban egész más a helyzet. Az egyszerűség kedvéért szorítkozzunk csak a kétváltozós esetre. Legyen T a (z_1, z_2) komplex számpárok C^2 terének (a komplex számsík önmagával vett topologikus szorzatának) egy tartománya. A T tartományt regularitási tartománynak nevezzük, ha létezik olyan $f(z_1, z_2)$ analitikus függvény, amely a T tartományban reguláris és amely nem folytatható a T tartományon túl. Mármost a kétváltozós esetben — szöges ellentétben az egyváltozós esettel — nem minden tartomány regularitási tartomány. Így merül fel a probléma, hogy bizonyos T tartományokról bebizonyítsuk, hogy azok regularitási tartományok, ill., ha nem azok, megadjuk azt a T tartományt tartalmazó legnagyobb T^* tartományt (a T tartomány regularitási burkát), amelyre igaz, hogy minden T-ben reguláris függvény analitikusan folytatható T^*-ba. Az ezirányú eredmények közül itt csak egy tétellel foglalkozunk: Cartan és Thullen azon nevezetes tételével [3], hogy *minden konvergencia-tartomány regularitási tartomány is.*

Más szóval, ha T egy tartomány a C^2 térben és megadható egy olyan

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} z_1^m z_2^n \tag{2. 1}$$

kétváltozós hatványsor, amelynek T a (pontos) konvergenciatartománya, tehát a (2. 1) sor abszolút konvergens, ha $(z_1, z_2) \in T$ és nem abszolút konvergens, ha (z_1, z_2) nem tartozik a T tartomány zárt burkához, akkor megadható egy olyan $f(z_1, z_2)$ függvény, amelynek T a regularitási tartománya.

Persze, az általában nem igaz, hogy maga a (2. 1) sor által előállított függvény nem folytatható a T tartományon kívüli pontokban, hiszen pl. a

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_1^n z_2^n \tag{2. 2}$$

hatványsor konvergenciatartománya a $|z_1| \cdot |z_2| < 1$ tartomány, és ott a (2. 2) sor az $\dfrac{1}{1 - z_1 z_2}$ függvényt állítja elő, és e függvény folytatható az említett tartományon túl minden olyan (z_1, z_2) pontba, amelyre $z_1 z_2 \neq 1$. Azonban *J. P. Kahane* bebizonyította[4], hogy a (2. 1) sort lehet úgy előjelezni, hogy annak T legyen a regularitási tartománya, sőt, (2. 1) majdnem minden előjelezése esetében ez lesz a helyzet. Kahane e tétele természetesen tartalmazza és konkretizálja a Cartan—Thullen tételt, illetve a Cartan—Thullen tétel egy új — valószínűségszámítási — bizonyítását szolgáltatja. Alábbiakban Kahane tételének bizonyítását fogjuk ismertetni.

[4] Sajtó alatt levő [4] könyvében; a bizonyítást itt a szerző szíves hozzájárulásával közöljük.

A bizonyításhoz szükség lesz a következő — *Paley*től és *Zygmund*tól [5] származó — segédtételre.

LEMMA. *Legyenek $C_1, C_2, \ldots, C_N$ tetszőleges komplex számok, $\xi_1, \ldots, \xi_N$ független valószínűségi változók, amelyek a ± 1 értékeket $\frac{1}{2}$ valószínűséggel veszik fel. Akkor*

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{N} c_k \xi_k\right| \geqq \vartheta \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2}\right) \geqq \frac{(1-\vartheta^2)^2}{3}, \tag{2.4}$$

ha $0<\vartheta<1$.

A lemma bizonyítása. Egyrészt

$$M\left(\left|\sum_{k=1}^{N} c_k \xi_k\right|^2\right) = \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2$$

másrészt, felhasználva a Schwarz-egyenlőtlenséget,

$$M\left(\left|\sum_{k=1}^{N} c_k \xi_k\right|^2\right) \leqq \vartheta^2 \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 + P^{\frac{1}{2}}\left(\left|\sum_{k=1}^{N} c_k \xi_k\right| \geqq \vartheta \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2}\right) \cdot M^{\frac{1}{2}}\left(\left|\sum_{k=1}^{N} c_k \xi_k\right|^4\right).$$

Így tehát

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{N} c_k \xi_k\right| \geqq \vartheta \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2}\right) \geqq \frac{(1-\vartheta^2)^2 \left(\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2\right)^2}{M\left(\left|\sum_{k=1}^{N} c_k \xi_k\right|^4\right)}. \tag{2.5}$$

Azonban

$$M\left(\left|\sum_{k=1}^{N} c_k \xi_k\right|^4\right) \leqq 3\left(\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2\right)^2. \tag{2.6}$$

A (2. 5) és (2. 6) egyenlőtlenségekből (2. 4) azonnal következik.

Mármost legyen (ζ_1, ζ_2) a T tartomány egy határpontja. Először azt bizonyítjuk be, hogy ha a $\xi_{m,n}$ valószínűségi változók ($m, n=0, 1, 2, \ldots$) függetlenek és mindegyik a ± 1 értékeket $\frac{1}{2}$ valószínűséggel veszi fel, akkor az

$$F(z_1, z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} \cdot \xi_{m,n} \cdot z_1^m \cdot z_2^n \tag{2.7}$$

véletlen függvénynek a (ζ_1, ζ_2) pont 1 valószínűséggel szinguláris pontja. E célból vizsgáljuk a

$$\Phi(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} \xi_{m,n} \zeta_1^m \zeta_2^n w^{m+n} \tag{2.8}$$

egyváltozós függvényt. $\Phi(w)$ nyilvánvalóan reguláris, ha $|w|<1$ és (ζ_1, ζ_2), akkor és csak akkor szinguláris pontja $F(z_1, z_2)$-nek, ha a $w=1$ pont szinguláris pontja $\Phi(w)$-nek. Írjuk $\Phi(w)$-t a

$$\Phi(w) = \sum_{p=0}^{\infty} \gamma_p w^p \tag{2.9}$$

alakba, ahol tehát

$$\gamma_p = \sum_{m+n=p} c_{m,n} \xi_{m,n} \zeta_1^m \zeta_2^n \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.10}$$

Nyilvánvaló, hogy az γ_p együtthatók független és szimmetrikus eloszlású valószínűségi változók, így tehát *Kahane* az I. rész 6. §-ában bebizonyított tétele szerint a $\Phi(w)$ véletlen függvény 1 valószínűséggel nem folytatható a konvergenciakörén túl. Jelölje $\varrho=\varrho(\omega)$ a (2. 9) hatványsor konvergenciasugarát; ϱ egy valószínűségi változó, amelyre nyilvánvalóan $\varrho \geqq 1$. Állításunk bebizonyításához tehát elegendő kimutatni, hogy 1 valószínűséggel $\varrho=1$. Mármost, mivel feltevés szerint a (2. 8) sor nem abszolút konvergens, ha $|w|>1$, tehát minden pozitív δ-hoz végtelen sok olyan (m, n) számpár adható meg, hogy

$$|c_{m,n}\zeta_1^m\zeta_2^n| > e^{-(m+n)\delta} \tag{2.11}$$

(hiszen, ha nem így volna, (2. 8) abszolút konvergens volna, ha $|W|=e^{\delta/2}$). Legyen (m, n) egy számpár, amelyre (2. 11) fennáll és $p=m+n$, akkor tehát

$$\Big(\sum_{m+n=p} |c_{m,n}|\cdot|\zeta_1^m|\cdot|\zeta_2^n|\Big)^{\frac{1}{2}} \geqq e^{-p\delta}.$$

Így tehát a Paley—Zygmund egyenlőtlenség szerint az ilyen p-kre (melyek száma minden $\delta>0$-ra végtelen),

$$P\big(|\gamma_p| \geqq \vartheta e^{-p\delta}\big) \geqq \frac{(1-\vartheta^2)^2}{3}$$

hacsak $0<\vartheta<1$. Mivel a γ_p változók függetlenek, a Borel—Cantelli lemmából következik, hogy 1 valószínűséggel végtelen sok p-re áll fenn a $|\gamma_p|\geqq\vartheta e^{-p\delta}$ egyenlőtlenség, vagyis a (2. 9) sor 1 valószínűséggel nem konvergens, ha $|w|=e^{\delta}$, más szóval 1 valószínűséggel $\varrho\leqq e^{\delta}$. Mivel $\delta>0$, tetszőleges, következik, hogy 1 valószínűséggel $\varrho=1$ és így a (ζ_1, ζ_2) pont 1 valószínűséggel szinguláris pontja az $f(z_1, z_2)$ véletlen analitikus függvénynek. Mármost T határán egy mindenütt sűrű, megszámlálható ponthalmazt választva, azt kapjuk, hogy 1 valószínűséggel e pontok mind szinguláris pontjai $F(z_1, z_2)$-nek, vagyis az $F(z_1, z_2)$ véletlen függvény regularitási tartománya 1 valószínűséggel azonos a T tartománnyal. Ezzel *Kahane* tételét bebizonyítottuk, és egyúttal valószínűségszámítási bizonyítást adtunk a *Cartan—Thullen* tételre.

3. §. AZONOSSÁGOK VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI BIZONYÍTÁSA

E §-ban azt mutatjuk meg, hogyan lehet az analízisben szerepet játszó bizonyos azonosságokat valószínűségszámítási úton belátni. Erre számos egyszerű példa adható meg. Így például a Moivre—Laplace tétel bizonyítása megfogalmazható úgy, hogy abból kiadódjék az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi} \tag{3.1}$$

azonosság. Egy másik példa erre az Euler-féle béta-integrálra vonatkozó

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{3.2}$$

azonosság ($\alpha > 0$, $\beta > 0$). Ez a következőképpen bizonyítható be. Definíció szerint

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx. \tag{3.3}$$

Legyen ξ_α egy olyan valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye $\frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}$, ha $x > 0$, és hasonlóképpen ξ_β egy olyan valószínűségi változó,[5] amelynek sűrűségfüggvénye $\frac{x^{\beta-1}e^{-x}}{\Gamma(\beta)}$ ha $x > 0$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$), továbbá legyenek ξ_α és ξ_β függetlenek. A $\xi_\alpha + \xi_\beta = \eta$ változó sűrűségfüggvényét jelölje $g(x)$. Jól ismert, hogy $g(x)$ egyenlő ξ_α és ξ_β sűrűségfüggvényeinek konvolúciójával, tehát

$$g(x) = \int_0^x \frac{y^{\alpha-1} e^{-y} \cdot (x-y)^{\beta-1} e^{-(x-y)}}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}\, dy \tag{3.4}$$

és így

$$g(x) = \frac{x^{\alpha+\beta-1} \cdot e^{-x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt. \tag{3.5}$$

Mivel $g(x)$ sűrűségfüggvény, tehát $\int_0^\infty g(x)\, \mathrm{d}x = 1$ és így

$$1 = \int_0^\infty g(x)\, dx = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt, \tag{3.6}$$

amiből (3. 2) adódik.[6]

Az ilyen jellegű példák közül még csak egyet említünk itt meg: az *Abel*-től származó:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a(a+kb)^{k-1}(1-a-kb)^{n-k} = 1 \tag{3.7}$$

azonosság (l. [18]) valószínűségszámítási bizonyítását, amely $b=0$ esetben a binomiális tételre redukálódik, tehát a binomiális tétel általánosításának is tekinthető. Ez az azonosság a következőképpen látható be: legyen $0 < a < 1$, $0 < b \leqq \frac{1-a}{n}$ ($n = 1, 2, \ldots$). Válasszunk a $(0, 1)$ intervallumban egymástól függetlenül, egyenletes eloszlással n számot, és legyen ezek közül η_j^* a nagyság szerint j-edik ($j = 1, 2, \ldots, n$). Legyen továbbá $\eta_0^* = 0$ és $\eta_{n+1}^* = 1$. Jelölje $\nu_n(a, b)$ a legkisebb K egész számot[7], amelyre $\eta_{k+1}^* \geqq a + kb$ és legyen $W_k = P(\nu_n(a, b) = k)$ ($k = 0, 1, \ldots, n$). Felhasználva a rendezett minták elméletének elemeit (l. pl. [6]), egyszerű számolással (n-re vonatkozó indukcióval) belátható, hogy

$$W_k = \binom{n}{k} a(a+kb)^{k-1}(1-a-kb)^{n-k} \tag{3.8}$$

[5] Tehát legyenek ξ_α ill. ξ_β, α ill. β rendű gamma-eloszlású valószínűségi változók.
[6] Egyben azt is bebizonyítottuk, hogy $\xi_\alpha + \xi_\beta$ eloszlása $(\alpha+\beta)$-rendű gamma-eloszlás.
[7] Ilyen szám bizonyosan van, hiszen feltevéseink szerint $1 = \eta_{n+1}^* \geqq a + nb$.

A W_k számok $(k=0, 1, \ldots, n)$ egy teljes eseményrendszer valószínűségei, így tehát összegük 1, és ezért (3. 8)-ból (3. 7) azonnal adódik a $0<a<1$, $0<b\leqq\frac{1-a}{n}$ esetre. Mivel (3. 7) bal oldala a-nak és b-nek polinomja, ebből már következik, hogy (3. 7) minden a-ra és b-re fennáll.

A (3. 7) azonosságot szokták (l. pl. [19])

$$(3.7^*)\qquad (\beta-n)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(\alpha+i)^i(\beta-i)^{n-i-1}=(\alpha+\beta)^n$$

alakba is írni. Az azonosság két alakjának ekvivalenciája igen egyszerűen belátható: (3. 7*)-ból $\beta=n+\frac{a}{b}$ és $\alpha=\frac{1-a}{b}-n$ helyettesítéssel adódik (3. 7).

Legyen most $a=b=\frac{x}{n+1}$ $(0<x<1)$; elvégezve (3. 7)-ben az $n\to\infty$ határátmenetet, a Stirling formula felhasználásával adódik a

$$(3.9)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)^{k-1}x^k e^{-(k+1)x}}{k!}=1$$

azonosság. Bevezetve az

$$(3.10)\qquad y=xe^{-x}$$

jelölést, (3. 9) az

$$(3.11)\qquad x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-2}y^n}{(n-1)!}$$

alakra hozható. Így tehát (3. 11) az $y=xe^{-x}$ függvény inverz függvényének (pontosabban az inverz függvény azon ágának, amely $y=0$-ra az $x=0$ értéket veszi fel) jól ismert hatványsorát adja, amelyre ilymódon valószínűségszámítási bizonyítást nyertünk. Mi a (3. 11) azonosságot a $0<x\leqq 1$ vagyis $0\leqq y\leqq 1/e$ feltétel mellett bizonyítottuk be; ebből azonban már következik, hogy (3. 11) érvényes minden olyan y komplex számra, amelyre $|y|\leqq 1/e$. (Azt, hogy a (3. 11) hatványsor konvergenciasugara pontosan $1/e$, a Stirling-formula segítségével láthatjuk be; ha $|y|=1/e$, vagyis a konvergenciakör kerületén a (3. 11) sor konvergens, mivel n-edik tagja $n^{-\frac{3}{2}}$ nagyságrendben tart 0-hoz.)

A (3.11) sorfejtés egyébként az inverz függvény sorfejtésére vonatkozó ún. Bürmann—Lagrange formula speciális esete (l. [7], [20]).

4. §. VÉGTELEN SOKSZOR DIFFERENCIÁLHATÓ, NEM ANALITIKUS FÜGGVÉNYEK

Jól ismert tény, hogy vannak az $x\geqq 0$ félegyenesen végtelen sokszor differenciálható, de sehol sem analitikus függvények: ilyen függvények effektív megkonstruálása azonban nem triviális feladat. Nemrégiben vette észre *J. Fabius* [8], hogy igen egyszerűen konstruálhatunk ilyen függvényeket a valószínűségszámítás segítségével a következőképpen: Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ független, a (0, 1) intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók és legyen $F(x)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ az

$$(4.1)\qquad \eta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n}{2^n}$$

valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Definiáljuk az $F(x)$ függvényt a $[0, 1]$ intervallumon kívül a következőképpen:

(4. 2) $$F(x) = \begin{cases} 1-F(x-1), & \text{ha } 1 \leqq x \leqq 2, \\ -F(x-2^n), & \text{ha } 2^n \leqq x \leqq 2^{n+1}, \qquad n = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

A definícióból látható, hogy $F(2l)=0$, ha $l=1, 2, \dots$.

Mármost a (4. 1) által definiált η valószínűségi változó felírható

(4. 3) $$\eta = \frac{\xi_1}{2} + \frac{\eta_1}{2}$$

alakban, ahol

(4. 4) $$\eta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_{n+1}}{2^n},$$

Nyilvánvalóan ξ_1 és η_1 függetlenek, továbbá η_1 ugyanolyan eloszlású, mint η. Így tehát η eloszlása $\xi_1/2$ és $\eta/2$ eloszlásának konvolúciója, vagyis $F(x)$ eleget tesz a

(4. 5) $$F\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} \int_0^x F(t)\,dt, & \text{ha } 0 \leqq x \leqq 1, \\ x-1+\int_{x-1}^{1} F(t)\,dt, & \text{ha } 1 \leqq x \leqq 2 \end{cases}$$

függvényegyenletnek. Azonban, (4. 2) miatt $\int_0^2 F(u)\,du = 1$ és így, újból felhasználva (4. 2)-t,

(4. 6) $$x-1+\int_{x-1}^{1} F(t)\,dt = \int_0^x F(u)\,du,$$

vagyis (4. 5) a következő alakra hozható:

(4. 7) $$F\left(\frac{x}{2}\right) = \int_0^x F(t)\,dt, \quad \text{ha } 0 \leqq x \leqq 2.$$

Tekintettel (4. 2)-re, következik, hogy (4. 7) érvényes minden nemnegatív x-re, vagyis minden $x \geqq 0$-ra

(4. 8) $$F(x) = \int_0^{2x} F(u)\,du.$$

(4. 8)-ból látható, hogy $F(x)$ folytonos és akárhányszor differenciálható, és hogy

(4. 9) $$F^{(n)}(x) = 2^n F^{(n-1)}(2x) \qquad (n = 1, 2, \dots),$$

amiből indukcióval következik, hogy

(4. 10) $$F^{(n)}(x) = 2^{\binom{n+1}{2}} F(2^n x) \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Mivel $F(2l)=0$, ha $l\geqq 1$ egész, tehát ha x diadikus racionális szám, $x=\frac{a}{2^r}$, akkor

$$F^{(n)}\left(\frac{a}{2^r}\right)=0, \quad \text{ha} \quad n\geqq r+1.$$

Ha tehát volna olyan pont az $x\geqq 0$ félegyenesen, amelynek egy környezetében $F(x)$ analitikus volna, akkor volna ilyen racionális pont is, de akkor $F(x)$-nek polinomnak kellene lennie, ami nyilván lehetetlen (mivel pl. $F(x)$ korlátos, de nem konstans); így tehát $F(x)$ sehol sem analitikus függvény.

A mondottakból következik, hogy az $x=0$ pontban $F(x)$ összes deriváltjai eltűnnek. Ez speciális esete a következő, sokkal általánosabb állításnak:

Legyenek $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ független, nemnegatív valószínűségi változók és legyen η_n eloszlásfüggvénye $F_n(x)$, és tegyük fel, hogy $F_n(x)\leqq C_n x$ ha $x\geqq 0$ $(n=1, 2, \dots)$, ahol $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ tetszőleges pozitív állandók. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n$ sor 1 valószínűséggel konvergens (ehhez a Kolmogorov-féle 3-sor tétel szerint elégséges, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} M(\eta_n)$ és $\sum_{n=1}^{\infty} D^2(\eta_n)$ sorok konvergáljanak); e sor összegét jelölje η és η eloszlásfüggvényét jelölje $F(x)$. Akkor $F(x)$ a 0 pontban akárhányszor deriválható és ott összes deriváltjai eltűnnek.

Bizonyítás. Ha $x>0$ és $\eta<x$, akkor $\eta_k<x$ $(k=1, 2, \dots)$. Így tehát minden n-re

$$F(x)\leqq \prod_{k=1}^{n+1} F_k(x)\leqq c_1c_2\dots c_{n+1}x^{n+1}.$$

Ennélfogva

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(x)}{x^n}=0, \quad \text{ha} \quad n=1, 2, \dots.$$

Nyilvánvaló, hogy Fabius példája esetében teljesülnek a fenti általános tétel feltételei.

5. §. A HAAR-FÉLE ORTOGONÁLIS FÜGGVÉNYRENDSZER SZERINTI SORFEJTÉSEK KONVERGENCIÁJA

A Haar-féle $\{\chi_n(x)\}$ $(n=0, 1, \dots;\ 0\leqq x<1)$ függvényrendszert a következőképpen definiáljuk. Legyen

(5.1) $$\chi_0(x)=1, \quad \text{ha} \quad 0\leqq x<1$$

(5.2) $$\chi_1(x)=\begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 0\leqq x<\frac{1}{2} \\ -1, & \text{ha} \quad \frac{1}{2}\leqq x<1\end{cases}$$

(5.3) $$\chi_2(x)=\begin{cases} \sqrt{2}, & \text{ha} \quad 0\leqq x<\frac{1}{4} \\ -\sqrt{2}, & \text{ha} \quad \frac{1}{4}\leqq x<\frac{1}{2} \\ 0, & \text{ha} \quad \frac{1}{2}\leqq x<1\end{cases}$$

és általában

$$(5.4)\qquad \chi_{2^k}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}}, & \text{ha } 0 \leqq x < \frac{1}{2^{k+1}} \\ -2^{\frac{k}{2}}, & \text{ha } \frac{1}{2^{k+1}} \leqq x < \frac{1}{2^k} \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{2^k} \leqq x < 1, \end{cases}$$

ha $k = 0, 1, \ldots$, továbbá

$$(5.5)\qquad \chi_{2^k+j}(x) = \begin{cases} \chi_{2^k}\left(x - \frac{j}{2^k}\right), & \text{ha } \frac{j}{2^k} \leqq x < \frac{j+1}{2^k} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ha $1 \leqq j \leqq 2^k - 1$, $k = 1, 2, \ldots$.

Könnyen belátható, hogy a $\chi_n(x)$ $(n=0, 1, \ldots)$ függvények a $[0, 1)$ intervallumban ortonormált függvényrendszert alkotnak. Azt sem nehéz belátni, hogy e rendszer teljes. Legyen $f(x)$ egy tetszőleges, a $[0, 1)$ intervallumban megadott mérhető valós függvény, amelyre $\int_0^1 f^2(x)\,dx$ létezik; képezzük $f(x)$ kifejtését a Haar-féle rendszerben, vagyis vizsgáljuk az

$$(5.6)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \chi_n(x)$$

sort, ahol

$$(5.7)\qquad c_n = \int_0^1 f(t)\chi_n(t)\,dt.$$

Haar Alfréd nevezetes tétele szerint az (5. 6) sor a $[0, 1)$ intervallumban majdnem mindenütt konvergens és összege $f(x)$-szel egyenlő. E §-ban e tételre adunk — *K. Krickeberg* ([9]) nyomán — valószínűségszámítási bizonyítást, a martingálelmélet segítségével.

Valószínűségi változók egy ζ_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ végtelen sorozatát martingálnak nevezzük, ha rendelkezik a következő tulajdonsággal: ζ_{n+1} feltételes várható értéke $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ és ζ_n adott értéke mellett 1 valószínűséggel ζ_n-nel egyenlő. A „martingál" elnevezés onnan származik, hogy martingálnak nevezik a szerencsejátékoknál az ún. halmozási rendszert, amelynél a játékos a tétjét úgy változtatja, hogy vesztés esetén mindig megduplázza a tétjét. Ha pl. fej-vagy-írás játékról van szó és ζ_n jelöli a játékos pénzét az n-edik játszma után, akkor a ζ_n változók mindig martingált alkotnak a fenti értelemben, akárhogyan is variálja a játékos a tétet, tehát speciálisan a halmozási rendszer esetében is, hiszen az $n+1$-ik játszmában a nyereség (tehát $\zeta_{n+1} - \zeta_n$) várható értéke a $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$ változók értékétől és a téttől függetlenül mindig 0.

J. L. Doob a martingálokra vonatkozó egyik nevezetes tétele[8] szerint, ha $\{\zeta_n\}$ egy martingál és $M(|\zeta_n|)$ korlátos, akkor 1 valószínűséggel létezik $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n$ (l. [10]).

Mármost vizsgáljuk az (5. 6) sor

$$(5.8)\qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \chi_k(x)$$

[8] E tétel többet mond ki: elegendő $\{\zeta_n\}$-ről feltenni, hogy szubmartingál.

részletösszegeit; tekintsük az $S_n(x)$ függvényeket valószínűségi változóknak az $[\Omega, \mathscr{A}, P]$ ún. Lebesgue-féle valószínűségi mezőn, ahol Ω a $[0, 1)$ intervallum, $\mathscr{A}$ a $[0, 1)$ intervallum Borel-halmazainak összege és P a Lebesgue-féle mérték. Először megmutatjuk, hogy az $S_n(x)$ valószínűségi változó-sorozat egy martingál. Legyenek $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges valós számok és jelölje E azt a halmazt, amelyre $S_k(x) = a_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ és tegyük fel, hogy az E halmaz nem üres. Állításunk bebizonyításához csak azt kell kimutatni, hogy

$$\int_E \chi_{n+1}(x)\, dx = 0. \tag{5. 9}$$

Mármost jelölje B_n a legszűkebb halmazalgebrát, amelyre nézve $\chi_0(x), \ldots, \chi_n(x)$ mérhetőek. Nyilván E a B_n (véges) algebrához tartozik, és így elegendő kimutatni, hogy (5. 9) teljesül, ha E a B_n algebra egy atomja. Mármost, ha $n = 2^k + j$ $(0 \leq j \leq 2^k - 1;\ k = 1, 2, \ldots)$, akkor B_n atomjai az $\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right)$ $(l = 0, 1, \ldots, 2j+1)$ intervallumok, továbbá az $\left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right)$ $(m = j+1, \ldots, 2^k - 1)$ intervallumok[9] és ezen intervallumok mindegyikén $\chi_{n+1}(x)$ integrálja valóban 0-val egyenlő. Másrészt

$$M(|S_n(x)|) \leq \left(\int_0^1 S_n^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 f^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5. 10}$$

Így alkalmazható az említett martingál-tétel, és nyerjük, hogy a

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f^*(x) \tag{5. 11}$$

határérték majdnem mindenütt létezik.

Mivel a Haar-féle rendszer teljes,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (f(x) - S_n(x))^2\, dx = 0. \tag{5. 12}$$

Így a Fatou-lemmából és (5. 11)-ből következik, hogy

$$\int_0^1 (f(x) - f^*(x))^2\, dx = 0, \tag{5. 13}$$

vagyis $f^*(x)$ majdnem mindenütt megegyezik $f(x)$-szel, vagyis bebizonyítottuk, hogy az (5. 6) sor majdnem mindenütt konvergál $f(x)$-hez.

Érdemes megjegyezni, hogy az $S_n(x)$ részletösszeg előállítható az

$$S_n(x) = M(f(x)|B_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{5. 14}$$

feltételes várható érték alakjában.

Másrészt az is könnyen belátható, hogy az összes B_n halmazalgebrákat tartalmazó legszűkebb σ-algebra azonos a Borel-halmazok összességével. Így a *Haar*-féle tétel állítása speciális esete az ugyancsak *Doob*-tól származó következő martingál-tételnek is:

[9] Tehát B_n-nek $n+1$ atomja van, és B_{n+1} atomjait úgy nyerjük B_n atomjaiból, hogy egy atomot felezünk, a többit változatlanul hagyjuk.

Legyen B_n $(n=1, 2, \ldots)$ σ-algebrák egy sorozata, $B_n \subset B_{n+1}$ és legyen B_∞ az összes B_n σ-algebrákat tartalmazó legszűkebb σ-algebra. Legyen ζ egy véges várható értékű valószínűségi változó. Akkor a $\zeta_n = M(\zeta|B_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ változók martingált alkotnak, és 1 valószínűséggel

$$\lim_{n\to\infty} M(\zeta|B_n) = M(\zeta|B_\infty).$$

Végül megjegyezzük, hogy (5. 14)-ből következik, hogy ha $I_n(x)$ jelöli B_n atomjai közül azt, amely tartalmazza az x pontot és $|I_n(x)|$ jelöli az $I_n(x)$ intervallum hosszát, akkor

(5. 15) $$S_n(x) = \frac{1}{|I_n(x)|} \int\limits_{I_n(x)} f(t)\,dt.$$

Haar eredeti bizonyítása ([21]) tételére az (5. 15) formulán alapszik: az, hogy majdnem minden x-re $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$ (5. 15)-ből *Lebesgue* azon tétele segítségével következik, mely szerint egy $f(x)$ integrálható függvény határozatlan integrálja majdnem mindenütt differenciálható és deriváltja egy 0-mértékű halmaztól eltekintve megegyezik $f(x)$-szel.

6. §. A WALSH-FÉLE FÜGGVÉNYRENDSZER SZERINTI SORFEJTÉSEK

Összehasonlításul vizsgáljuk meg, hogy a *Haar-féle* rendszerre fentebb alkalmazott gondolatmenet mit ad a *Walsh*-féle ortogonális rendszer szerinti sorfejtések esetében.

Jelölje $R_n(x)$ $(n=0, 1, \ldots)$ az n-edik *Rademacher*-féle függvényt, vagyis legyen

(6. 1) $$R_n(x) = \text{sign}\,(\sin 2^n \pi x) \qquad (0 \leqq x < 1).$$

A $W_n(x)$ ún. Walsh-féle függvényeket a következőképpen definiáljuk: ha az $n \geqq 1$ szám előállítása a 2-alapú számrendszerben

(6. 2) $$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_r} \qquad (0 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_r),$$

akkor legyen

(6. 3) $$W_n(x) = R_{k_1}(x) R_{k_2}(x) \ldots R_{k_r}(x).$$

Mint jól ismert, a $W_n(x)$ függvények teljes ortonormált rendszert alkotnak a $[0, 1)$ intervallumban.

Legyen $f(x)$ egy tetszőleges, a $[0, 1)$ intervallumban négyzetesen integrálható függvény és vizsgáljuk e függvény Walsh-féle sorfejtését, vagyis a

(6. 4) $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n W_n(x)$$

sort, ahol

(6. 5) $$b_n = \int\limits_0^1 f(t) W_n(t)\,dt.$$

Legyen

(6. 6) $$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k W_k(x).$$

Az 5. §-ban alkalmazott gondolatmenet nem alkalmazható a teljes $S_n(x)$ sorozatra, azonban alkalmazható az $S_{2^n-1}(x)$ részsorozatra. Ugyanis, ha $\mathscr{A}_n$ jelöli azt a legszűkebb halmazalgebrát, amelyre nézve a $W_1(x), \dots, W_{2^n-1}(x)$ függvények mérhetőek, úgy $\mathscr{A}_n$ atomjai a $\left[\frac{j}{2^{n-1}}, \frac{j+1}{2^{n-1}}\right)$ $(j=0, 1, \dots, 2^{n-1}-1)$ intervallumok és ha I ezen intervallumok közül bármelyik és $2^n \leqq m < 2^{n+1}$, akkor

$$\int_I W_m(x)\,dx = 0 \tag{6.7}$$

tekintettel arra, hogy $W_m(x)$ az I intervallumon egyenlő $aR_n(x)$-szel, ahol $a = +1$ vagy $a = -1$, továbbá

$$\int_I R_n(x)\,dx = 0. \tag{6.8}$$

Így tehát, ha E $\mathscr{A}_n$-hez tartozó halmaz,

$$\int_E \left(S_{2^{n+1}-1}(x) - S_{2^n-1}(x)\right) dx = 0, \tag{6.9}$$

vagyis a $S_{2^n-1}(x)$ egy martingál a Lebesgue-féle valószínűségi mezőn. Az 5. §-ban alkalmazott gondolatmenetet alkalmazva következik, hogy majdnem minden x-re

$$\lim_{n\to\infty} S_{2^n-1}(x) = f(x). \tag{6.10}$$

Így tehát egy a Walsh-sorokra vonatkozó nevezetes ismert tételre nyertünk új, valószínűségszámítási bizonyítást. E tételből speciális esetként következik, hogy a Rademacher-féle függvényekből konvergens négyzetösszegű együtthatókkal képezett

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k R_k(x) \tag{6.11}$$

alakú sor $\left(\sum a_k^2 < +\infty\right)$ majdnem mindenütt konvergens; ez egyébként speciális esete *Kolmogorov* ún. 3-sor-tételének.

Pál László nemrégiben észrevette (l. [11]), hogy igaz a következő tétel is: Ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k}^2 < +\infty, \tag{6.12}$$

akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} R_n(x) R_k(x) \tag{6.13}$$

sor majdnem mindenütt konvergens. Ez az állítás is igen egyszerűen belátható az 5. §-ban ismertetett módszerrel, ugyanis az

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} R_n(x) R_k(x) \tag{6.14}$$

sorozat $(N=1, 2, \dots)$ nyilván martingál, és $\int_0^1 |S_N(x)|\,dx$ korlátos sorozat, tehát

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = g(x) \tag{6.15}$$

1 valószínűséggel létezik; másrészt viszont a Kolmogorov-féle egyenlőtlenség szerint igaz a következő állítás:

$$P\left(\operatorname{Max}_{1\leq l\leq N}\left|\sum_{k=0}^{l} a_{N+1,k}R_k(x)\right| > \lambda\left[\sum_{k=0}^{N} a_{N+1,k}^2\right]^{\frac{1}{2}}\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}, \tag{6. 16}$$

tehát, ha

$$S_{N,l}(x) = S_N(x)+\sum_{k=0}^{l} a_{N+1,k}R_{N+1}(x)R_k(x), \tag{6. 17}$$

akkor

$$P(\operatorname{Max}_{1\leq l\leq N}|S_{N,l}(x)-S_N(x)| > \varepsilon) \leq \frac{\sum_{k=0}^{N} a_{N+1,k}^2}{\varepsilon^2}. \tag{6. 18}$$

Így a Borel—Cantelli lemma szerint minden $r>0$ pozitív egész számra 1 valószínűséggel véges sok (N, l) számpár kivételével

$$|S_{N,l}(x)-S_N(x)| \leq \frac{1}{r}. \tag{6. 19}$$

Mivel r tetszőlegesen nagynak választható és megszámlálható sok 0-mértékű halmaz egyesítése is 0-mértékű, (6. 15)-ből és (6. 19)-ből következik, hogy a (6. 13) sor majdnem mindenütt konvergál a $g(x)$ függvényhez.

Pál László azt is bebizonyította, hogy egy olyan Walsh-sor, amelyben csak azok a Walsh-függvények szerepelnek, amelyek legfeljebb k Rademacher-függvény szorzataként állíthatók elő, és amelynek együtthatóinak négyzetösszege konvergens, a Walsh-féle függvényrendszer indexezésének megfelelő elrendezésben majdnem mindenütt konvergens. Ez az általánosabb tétel ugyanúgy bizonyítható be valószínűségszámítási úton, mint ahogy az előbb a tétel $k=2$ esetét bizonyítottuk. Mivel az általános eset tárgyalásához újabb ötletre nincs szükség, azt itt nem részletezzük.

7. §. ASZIMPTOTIKUS FORMULÁK A MÁSODFAJÚ STIRLING-SZÁMOKRA

A $\sigma_{n,k}$ $(k=1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots)$ másodfajú Stirling-számokat a következő formulával definiáljuk:

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{n,k}x(x-1)\ldots(x-k+1). \tag{7. 1}$$

A $\sigma_{n,k}$ szám kombinatorikai jelentése, mint ismeretes (l. pl. [14]) a következő: $\sigma_{n,k}$ megadja egy n-elemű halmaz összes k nem üres idegen részhalmazra való felbontásainak (particióinak) a számát. E számok jelentős szerepet játszanak a differencia számításban (l. pl. [15]), ezért érdekes aszimptotikus viselkedésük vizsgálata. *L. H. Harper* (l. [16]) nemrégiben a Stirling-számok aszimptotikus viselkedését valószínűségszámítási úton vizsgálta. E §-ban az ő vizsgálatait ismertetjük, megjegyezve, hogy módszere ugyanazon az ötleten alapszik, mint *Hayman* tételének az I. rész 3. §-ában adott valószínűségszámítási bizonyítása. (7. 1) mindkét oldalát x-szel beszorozva és a nyert formulát összevetve x^{n+1}-nek a (7. 1) formula szerinti kifejtésével, figyelembevéve, hogy egy polinomnak az $x(x-1)\ldots(x-k+1)$ alappolinomokkal való kifejezése egyértelmű, adódik a

$$\sigma_{n+1,k}=k\sigma_{n,k}+\sigma_{n,k-1} \tag{7. 2}$$

rekurzív összefüggés. Vizsgáljuk most a

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_{n,k} x^k \tag{7. 3}$$

polinomokat. Először bebizonyítjuk, hogy $P_n(x)$ összes gyökei egyszeresek és e gyökök mind valós, nempozitív számok. E célból először vegyük észre, hogy (7. 2)-ből azonnal adódik a $P_n(x)$ polinomokra a

$$P_{n+1}(x) = x(P_n'(x) + P_n(x)) \tag{7. 4}$$

összefüggés. Mivel

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2 + x,$$

tehát állításunk igaz, ha $n=1$ és ha $n=2$. Azt, hogy az állítás minden n-re igaz, teljes indukcióval fogjuk belátni. Legyen $H_k(x) = e^x P_k(x)$ és tegyük fel, hogy $P_n(x)$-nek n különböző nem-pozitív gyöke van. Legyen $n \geqq 1$, akkor (7. 4) szerint

$$H_{n+1}(x) = xH_n'(x). \tag{7. 5}$$

Mivel $\lim_{x \to -\infty} H_n(x) = 0$, tehát Rolle tétele szerint ha $-x_{n,1} < -x_{n,2} < \ldots < -x_{n,n} = 0$ jelölik $H_n(x)$ gyökeit, akkor $H_{n+1}(x)$-nek és így $P_{n+1}(x)$-nek egy-egy gyöke van a $(-\infty, -x_{n1})$, $(-x_{n,1}, -x_{n,2})$, $\ldots$ $(-x_{n,n-1}, 0)$ nyílt intervallumokban; ez már n gyök, de mivel $P_{n+1}(0) = 0$ és $P_{n+1}(x)$ $n+1$-edfokú polinom, ezzel $P_{n+1}(x)$ összes gyökeit megtaláltuk, és azok mind különbözőek és nem pozitívak. Így tehát (mivel (7. 4)-ből látható, hogy $P_n(x)$-ben x^n együtthatója 1) $P_n(x)$ a

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x + x_{n,k}) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{7. 6}$$

alakba írható, ahol $0 = x_{n,n} < x_{n,n-1} < \ldots < x_{n,1}$. (7. 6)-ból az is leolvasható, hogy a $\sigma_{n,k}$ számok mind pozitívak, ha $k \geqq 1$ és $n \geqq 1$.

Legyen most

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \sigma_{n,k}. \tag{7. 7}$$

A B_n számokat szokták *Bell-féle számoknak* is nevezni. B_n kombinatorikai jelentése (l. [14]) a következő: B_n megadja egy n elemű halmaz összes különböző partícióinak a számát (a részhalmazok számára vonatkozó korlátozás nélkül). Mármost vizsgáljuk a $\left\{\frac{\sigma_{n,k}}{B_n}\right\}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ valószínűségeloszlást. Legyen η_n egy valószínűségi változó, amelyre

$$P(\eta_n = k) = \frac{\sigma_{n,k}}{B_n}. \tag{7. 8}$$

Ekkor η_n generátorfüggvénye

$$M(x^{\eta_n}) = \frac{P_n(x)}{P_n(1)} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{1+x_{n,k}} + \frac{x_{n,k}}{1+x_{n,k}} \right). \tag{7. 9}$$

Így tehát η_n eloszlása megegyezik az $\eta_{n,1} + \eta_{n,2} + \ldots + \eta_{n,n}$ összeg eloszlásával, ahol $\eta_{n,1}, \ldots, \eta_{n,n}$ független valószínűségi változók és

$$P(\eta_{n,k} = 1) = \frac{1}{1+x_{n,k}}, \quad P(\eta_{n,k} = 0) = \frac{x_{n,k}}{1+x_{n,k}}. \tag{7. 10}$$

Mivel η_n n darab független valószínűségi változó összege, várható, hogy η_n határeloszlása normális lesz. Meg fogjuk mutatni, hogy a $\sum_{k=1}^{n} \eta_{n,k}$ összegekre teljesülnek a Ljapunov-tétel feltételei. Mivel az $\eta_{n,k}$ változók csak a 0 és 1 értékeket veszik fel, ehhez (mint az I. rész 3. §-ában megjegyeztük) elegendő kimutatni, hogy η_n szórása végtelenhez tart, ha $n \to \infty$.

Először számítsuk ki η_n várható értékét. A (7. 2) azonosságból

$$M(\eta_n) = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} k \cdot \sigma_{n,k} = \frac{B_{n+1}}{B_n} - 1. \tag{7.11}$$

Ugyancsak (7. 2)-ből

$$M(\eta_n^2) = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} k^2 \sigma_{n,k} = \frac{B_{n+2}}{B_n} - 2\frac{B_{n+1}}{B_n} \tag{7.12}$$

és így

$$D^2(\eta_n) = M(\eta_n^2) - M^2(\eta_n) = \frac{B_{n+2}}{B_n} - \left(\frac{B_{n+1}}{B_n}\right)^2 - 1. \tag{7.13}$$

Annak kimutatása, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} D^2(\eta_n) = +\infty$, a legegyszerűbben a következő megjegyzés segítségével történhet. Legyen

$$\varepsilon_n = \frac{1}{B_n} \operatorname*{Max}_{1 \leqq k \leqq n} \sigma_{n,k}. \tag{7.14}$$

Először megmutatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0. \tag{7.15}$$

Ebből már állításunk következik, ugyanis a Csebisev egyenlőtlenség szerint

$$P\left(|\eta_n - M(\eta_n)| \geqq \frac{1}{4\varepsilon_n}\right) \leqq 16\varepsilon_n^2 D^2(\eta_n). \tag{7.16}$$

Mármost

$$P\left(|\eta_n - M(\eta_n)| \geqq \frac{1}{4\varepsilon_n}\right) = 1 - \frac{1}{B_n} \sum_{|k - M(\eta_n)| < \frac{1}{4\varepsilon_n}} \sigma_{n,k} \geqq 1 - \frac{\varepsilon_n}{2\varepsilon_n} = \frac{1}{2}, \tag{7.17}$$

tehát (7. 16)-ból és (7. 17)-ből

$$D^2(\eta_n) \geqq \frac{1}{32\varepsilon_n^2} \tag{7.18}$$

és így (7. 15)-ből következik $\lim\limits_{n\to\infty} D^2(\eta_n) = +\infty$.

Így tehát csak (7. 15)-öt kell bebizonyítanunk.

E célból kiindulunk a (7. 2)-ből indukcióval könnyen belátható

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{n,k}}{n!} x^n = \frac{(e^x - 1)^k}{k!} \tag{7.19}$$

formulából és a (7. 19) k-ra való összegezésével adódó

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = e^{e^x - 1} \tag{7.20}$$

formulából (l. [14]). (7. 20)-ból *Hayman* az I. rész 3. §-ában említett tétele segítségével következik, hogy

$$(7.21) \qquad B_n \sim \frac{1}{\sqrt{R_n}} \exp\left(n\left(R_n + \frac{1}{R_n} - 1\right) - 1\right),$$

ahol R_n az $xe^x = n$ egyenlet egyetlen pozitív gyöke.

Másrészt (7. 19)-ből, ugyancsak *Hayman* tétele segítségével következik, hogy

$$(7.22) \qquad \max_{1 \leq k \leq n} \sigma_{n,k} = O\left(\sqrt{\frac{R_n}{n}} \exp\left(n\left(R_n + \frac{1}{R_n} - 1\right)\right)\right),$$

tehát [10]

$$(7.23) \qquad \varepsilon_n = O\left(\frac{R_n}{\sqrt{n}}\right).$$

Mivel $R_n = O(\log n)$, (7. 23)-ból következik (7. 15). Így tehát η_n-re valóban alkalmazható a Ljapunov-tétel és így nyerjük azt, hogy

$$(7.24) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n} \sum_{k \leq \frac{B_{n+1}}{B_n} - 1 + x\sqrt{\frac{B_{n+2}}{B_n} - \left(\frac{B_{n+1}}{B_n}\right)^2 - 1}} \sigma_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

amit bizonyítani akartunk.

Könnyen ki lehet mutatni, hogy

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{n}{R_n} + o\left(\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right)$$

és

$$\sqrt{\frac{B_{n+2}}{B_n} - \left(\frac{B_{n+1}}{B_n}\right)^2 - 1} \sim \sqrt{\frac{n}{\log n}},$$

tehát (7. 24) felírható

$$(7.25) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n} \sum_{k \leq \frac{n}{R_n} + x\sqrt{\frac{n}{\log n}}} \sigma_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

alakban is $(-\infty < x < +\infty)$.

8. §. FÜGGELÉK

E függelékben a dolgozat megértésének megkönnyítésére a dolgozat I. és II. részében felhasznált valószínűségszámítási tételekkel kapcsolatban megadjuk, hogy azok a [12] tankönyvben hol találhatók meg:

Csebisev egyenlőtlenség (felhasználva az I. rész 1. és 2. §-ában és a II. rész 7. §-ában): lásd 309. o.

Ljapunov tétele (felhasználva az I. rész 3. §-ában és a II. rész 7. §-ában): lásd 373. o.

Karakterisztikus függvények folytonossági tétele (felhasználva az I. rész 3. §-ában): lásd 271. o.

[10] Azt is meg lehet mutatni, hogy $\varepsilon_n \sim \frac{\log n}{\sqrt{2\pi n}}$.

Nulla-vagy-egy törvény (felhasználva az I. rész 6. §-ában): 349. o.

Markov-egyenlőtlenség (felhasználva az I. rész 7. §-ában és a II. rész 1. §-ában): 202. o.

Borel—Cantelli lemma (felhasználva az I. rész 7. §-ában és a II. rész 1., 2. és 6. §-ában): 323. o.

Kolmogorov-egyenlőtlenség (felhasználva a II. rész 6. §-ában): 326. o.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] *P. Erdős, A. Rényi,* On random entire functions (sajtó alatt).

[2] *P. Erdős,* On the uniform but not absolute convergence of power series with gaps, Annales de la Soc. Polonaise de Math. 25 (1952) 162—168.

[3] *H. Cartan, P. Thullen,* Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen, Regularitäts- und Konvergenzbereiche, Math. Annalen 106 (1932) 617—647.

[4] *J. P. Kahane,* Some random series of functions, (sajtó alatt).

[5] *R. Paley—A. Zygmund,* On some series of functions, Proc. Cambridge Phil. Soc. 26 (1936) 337—357.

[6] *Hajós Gy.—Rényi, A.,* Elemi bizonyítások a rendezett minták elméletének néhány alapvető összefüggésére, MTA III. O. K. 4 (1954) 467—472.

[7] *G. Pólya, G. Szegő,* Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Springer, 1931, I. köt. 125. o.

[8] *J. Fabius,* A probabilistic example of a nowhere ananytic function, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie, 5 (1966) 173—174.

[9] *K. Krickeberg,* Wahrscheinlichkeitstheorie, Teubner, Stutgart, 1963.

[10] *J. L. Doob,* Stochastic processes, Wiley, New York, 1953.

[11] *Pál László,* kandidátusi disszertáció-tézisei. Bp. 1967.

[12] *Rényi A.,* Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, Bp. 1966.

[13] *Rényi, A.,* Legendre polynomials and probability theory, Annales Univ. Sci. Eötvös, Sect. Math. 3—4 (1960—61) 247—251.

[14] *Rényi A.,* Új módszerek és eredmények a kombinatorikai analízisben, MTA III. O. K. I. 16 (1966) 78—105, II. 16 (1966) 159—177.

[15] *C. Jordan:* Calculus of finite differences, Budapest, 1939.

[16] *L. H. Harper:* Stirling behaviour is asymptotically normal. Ann. Math. Stat. 38 (1967) 410—414.

[17] *A. Rényi,* Summation methods and probability theory, MTA Mat. Kut. Int. Közl. 4 (1959) 127—132.

[18] *N. H. Abel,* Oeuvres complètes, Christiania, C. Groendahl, 1839. I. köt. 102. o.

[19] *Z. W. Birnbaum—R. Pyke,* On some distributions related to the statistics D_n^+. Ann. Math. Stat. 29 (1958) 179—187.

[20] *A. Rényi,* Some remarks on the theory of trees, MTA Mat. Kut. Int. Közl. 4 (1959) 73—85.

[21] *Haar Alfréd,* Összegyűjtött munkái, Akadémiai Kiadó, Bp. 1959. 367—368. o.

[22] *P. Lévy,* Sur la croissance des fonctions entières, Bulletin de la Société Mathématique de France 58 (1930) 29—59 és 127—149.

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В АНАЛИЗЕ II

А. РЕНЬИ

PROBABILISTIC METHODS IN ANALYSIS II.

A. RÉNYI