Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 9, 146—157 (1968)

Zufällige konvexe Polygone in einem Ringgebiet

A. Rényi und R. Sulanke

Eingegangen am 2. Juni 1967

1. Einleitung

Sei K ein nicht ausgearteter, beschränkter, konvexer Bereich der euklidischen Ebene und B ein beliebiger, im Innern von K enthaltener konvexer Bereich. Wir wählen n zufällige Geraden $g_1, \ldots, g_n$, die den Bereich K, aber nicht den Bereich B treffen. Die g_i seien unabhängig; ihre Verteilung sei durch das euklidische invariante Geradenmaß μ mit der Dichte dg definiert (W. Blaschke [1], § 2). Durch H_i bezeichnen wir die von g_i bestimmte abgeschlossene Halbebene, die B enthält. Dann ist

$$\Pi_n = \bigcap_{i=1}^{n} H_i \tag{1.1}$$

ein durch die g_i eindeutig bestimmtes, zufälliges konvexes Polygon, das B enthält. Durch X_n bezeichnen wir die Anzahl der Ecken von Π_n. Wir wollen das asymptotische Verhalten der mathematischen Erwartung der Eckenanzahl X_n unter verschiedenen Voraussetzungen für B bestimmen.

In § 2 stellen wir die Formeln für die zu untersuchenden Wahrscheinlichkeiten auf und leiten einige einfache, in den §§ 3—5 anzuwendende Abschätzungen her. Ferner zeigen wir, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Π_n nicht geschlossen ist, ebenso wie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Π_n nicht in K enthalten ist, von der Ordnung $O(\gamma^n)$ $(0 < \gamma < 1)$, gegen Null geht. In § 3 betrachten wir den Fall, daß B in einem Punkt ausartet, und beweisen $E(X_n) \to \frac{\pi^2}{2}$ für $n \to +\infty$. In dem Fall, daß B einen glatten Rand beschränkter Krümmung hat, gilt $E(X_n) \sim$ konst. $n^{1/3}$ (Satz 4, § 4); wenn schließlich B ein konvexes r-Eck ist ($r \geqq 2$; $r = 2$ bedeutet, daß B in eine Strecke ausartet), ergibt sich $E(X_n) \sim \frac{2}{3} r \log n$ (Satz 5, § 5). Die Größenordnung, in der $E(X_n)$ in den letzten beiden Fällen mit n gegen Unendlich geht, stimmt also mit den entsprechenden Größenordnungen für den Fall der Eckpunkte der konvexen Hülle von n in B zufällig gewählten Punkten überein (A. Rényi, R. Sulanke [2]).

Herrn L. Berg möchten wir für einige Hinweise zu den Berechnungen in § 5 herzlich danken.

Das Resultat von § 3 kann folgendermaßen interpretiert werden: Wir betrachten ein System von n zufälligen linearen Ungleichungen $a_k x + b_k y \leqq c_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Das Wort „zufällig" bedeute, daß die Verteilung der voneinander unabhängigen Geraden $a_k x + b_k y = c_k$, die alle den Bereich K treffen sollen, durch das invariante Geradenmaß bestimmt ist und der Punkt $B(x = 0, y = 0) \in K$ allen Ungleichungen genügt. Sei X_n die kleinste Zahl mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt X_n aus den n Ungleichungen derart, daß jeder Punkt (x, y), der diesen X_n Ungleichungen genügt, sogar alle n Ungleichungen erfüllt. Unser Ergebnis besagt, daß für $n \to \infty$ der Erwartungswert der minimalen Anzahl X_n der „kritischen" Ungleichungen gegen $\pi^2/2$ strebt. Also kann man erwarten, daß man bei der Lösung einer Aufgabe der Linearprogrammierung mit zwei Unbekannten und einer beliebig großen Anzahl linearer Ungleichungen mit zufälligen Daten im Mittel nur eine ziemlich kleine Anzahl von Schritten nach einem der bekannten Verfahren benötigt. So ergibt sich naturgemäß das Problem, die analoge Aufgabe für eine beliebige Anzahl von Unbekannten (also für den Durchschnitt von zufälligen Halbräumen eines k-dimensionalen Raumes, $k = 3, 4, \ldots$) zu behandeln. Diese Aufgabe hat unlängst Herr Wolfgang M. Schmidt gelöst, indem er bewies, daß die mittlere minimale Anzahl der „kritischen" Ungleichungen auch im k-dimensionalen Fall ($k = 3, 4, \ldots$) gegen einen endlichen, nur von k abhängigen Grenzwert λ_k strebt; sein Beweis ergibt aber nur die Existenz der Zahlen λ_k und nicht deren genauen Wert. Aus dem Satz von Herrn Wolfgang M. Schmidt folgt für den von uns betrachteten zweidimensionalen Fall die Existenz der Grenzverteilung von X_n. Auf die explizite Bestimmung dieser Grenzverteilung hoffen wir in einer anderen Arbeit zurückzukommen.

2. Grundformeln und einfache Abschätzungen

Sei $S_{ij} = g_i \cap g_j$ $(i \neq j)$. Der Punkt S_{ij} existiert mit Wahrscheinlichkeit 1. Setzen wir $\varepsilon_{ij} = 1$, wenn S_{ij} Eckpunkt von Π_n ist, und $\varepsilon_{ij} = 0$ sonst, so gilt

$$X_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varepsilon_{ij}. \tag{2.1}$$

Sei $W(n)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß S_{12} Eckpunkt von Π_n ist. Aus Symmetriegründen ergibt sich für die mathematische Erwartung

$$E(X_n) = \binom{n}{2} W(n). \tag{2.2}$$

Wir wollen zunächst eine allgemeine Formel für $W(n)$ herleiten. Der Punkt $S = S_{12}$ ist Eckpunkt von Π_n genau dann, wenn keine der Geraden $g_3, \ldots, g_n$ die konvexe Hülle B_S von $B \cup S$ trifft. Sei l der Umfang von K, b der von B und l_S der von B_S. Nach der Croftonschen Formel für konvexe Bereiche (W. Blaschke [1], § 3, (60))

$$\int_{g \cap K \neq \emptyset} dg = l \tag{2.3}$$

ergibt sich im Falle $S \in K$

$$P(g_3 \cap B_S = \emptyset) = \frac{l - l_S}{l - b}. \tag{2.4}$$

Wir zerlegen $W(n)$ in die beiden Wahrscheinlichkeiten

$$W(n) = W_1(n) + W_2(n), \tag{2.5}$$

$$W_1(n) = P(S \text{ Ecke von } \Pi_n,\ S \in K), \tag{2.6}$$

$$W_2(n) = P(S \text{ Ecke von } \Pi_n,\ S \notin K). \tag{2.7}$$

Es gilt

$$W_1(n) = \frac{1}{(l-b)^n} \iint_{g_1 \cap g_2 \cap K \neq \emptyset,\ (g_1 \cup g_2) \cap B = \emptyset} (l - l_S)^{n-2}\, dg_1\, dg_2. \tag{2.8}$$

Für $W_2(n)$ geben wir eine Abschätzung an, aus der folgen wird, daß $W_2(n)$ gegen-über $W_1(n)$ zu vernachlässigen ist. Bezeichnet μ das Geradenmaß, so ergibt sich

(2.9) $$W_2(n) = \frac{1}{(l-b)^n} \iint\limits_D f(S)^{n-2}\, dg_1\, dg_2$$

mit $f(S) = \mu(g: g \cap B_S = \emptyset,\ g \cap K \neq \emptyset)$. Integriert wird über den Bereich D aller Geradenpaare g_1, g_2 mit $g_1 \cap K \neq \emptyset$, $g_2 \cap K \neq \emptyset$, $g_1 \cap g_2 \cap K = \emptyset$, $(g_1 \cup g_2) \cap B = \emptyset$. Um $f(S)$ abzuschätzen, wählen wir einen Randpunkt R von K, der in B_S liegt; dann gilt $B_R \subset B_S$ und folglich

(2.10) $$f(S) \leqq f(R) = l - l_R = (l-b) - (l_R - b).$$

Indem wir von B_R durch eine geeignete Stützgerade an den in B_R liegenden Randbogen B ein gleichschenkliges Dreieck abschneiden (Abb. 1), ergibt sich

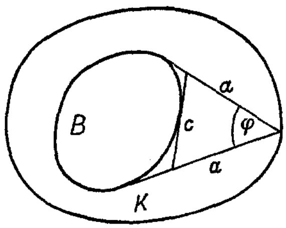

Abb. 1

(2.11) $$l_R - b \geqq 2a - c = 2a\left(1 - \sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Bezeichnet r den Abstand der Ränder von B und K, so gilt offenbar $a \geqq r > 0$; ferner haben wir, wenn φ der Winkel ist, in dem man B von einem Randpunkt von K aus sieht, $0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0 < \pi$; denn B liegt ganz im Innern von K. Somit gilt

(2.12) $$l - b \geqq l_R - b \geqq 2r\left(1 - \sin\frac{\varphi_0}{2}\right) = \varepsilon > 0.$$

Aus (2.10) und (2.12) folgt

(2.13) $$\frac{f(S)}{l-b} \leqq \frac{l-b-\varepsilon}{l-b} = \gamma \quad \text{mit} \quad 0 < \gamma < 1,$$

wobei γ nur von B und K abhängt. Wir erhalten

(2.14) $$W_2(n) \leqq \frac{\gamma^{n-2}}{(l-b)^2} \iint\limits_{\substack{g_1 \cap K \neq \emptyset,\ g_2 \cap K \neq \emptyset \\ g_1 \cap g_2 \cap K = \emptyset}} dg_1\, dg_2.$$

Nach einer Formel von CROFTON (W. BLASCHKE, [1], § 7) ergibt sich für das Integral (2.14)

(2.15) $$\iint dg_1\, dg_2 = l^2 - 2\pi F$$

wobei F der Flächeninhalt von K ist. Es folgt

(2.16) $$W_2(n) = O(\gamma^n) \quad \text{mit} \quad 0 < \gamma < 1.$$

Wenn der Bereich B in einem Punkt ausartet, erhält man (2.16) durch eine noch einfachere Abschätzung. Dieselben Überlegungen zeigen allgemein, daß der Anteil der Geradenpaare g_1, g_2 deren Schnittpunkt S außerhalb einer festen konvexen Umgebung U von B liegt, von der Größenordnung $O(\gamma^n)$ ist, wobei γ mit $0 < \gamma < 1$ natürlich von der Umgebung U abhängt.

Satz 1. *Sei B ein (möglicherweise ausgearteter) konvexer Bereich und K eine konvexe Umgebung von B. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Ecke von Π_n*

außerhalb K liegt, genügt der Beziehung

$$P(\text{Ecke von } \Pi_n \notin K) = O(\gamma^n) \quad (0 < \gamma < 1) \tag{2.17}$$

wobei γ eine von K und B abhängige Konstante ist.

Es bleibt also (2.8) auszuwerten. Hierzu führen wir nach W. BLASCHKE [1], § 6, (89) die Substitution

$$dg_1\, dg_2 = |\sin(\varphi_1 - \varphi_2)|\, d\varphi_1\, d\varphi_2\, dS \tag{2.18}$$

aus; hierbei sind φ_1, φ_2 die Winkel von g_1 bzw. g_2 mit einer festen Richtung und dS die Dichte des Schnittpunktes $S = g_1 \cap g_2$. Wegen

$$\int_0^\alpha \int_0^\alpha |\sin(\varphi_1 - \varphi_2)|\, d\varphi_1\, d\varphi_2 = 2(\alpha - \sin\alpha) \tag{2.19}$$

erhalten wir, weil über $\psi_1 \leqq \varphi_1$, $\varphi_2 \leqq \psi_2$ zu integrieren ist,

$$W_1(n) = \frac{2}{(l-b)^2} \int_{S\in K\setminus B} \left(1 - \frac{l_S - b}{l-b}\right)^{n-2} (\alpha(S) - \sin\alpha(S))\, dS; \tag{2.20}$$

hierbei ist $\alpha = \psi_2 - \psi_1 = \pi - \omega$ und $\omega(S)$ ist der Winkel, unter dem man B von S aus sieht (Abb. 2). Die Auswertung dieses Integrals unter verschiedenen Voraussetzungen über B erfolgt in den §§ 3—5.

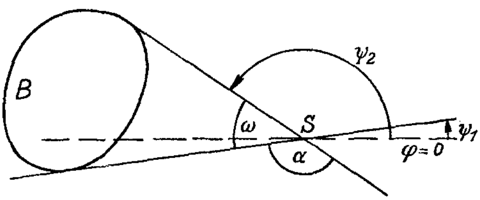

Abb. 2

Zuerst untersuchen wir noch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Π_n nicht geschlossen ist. Es ist ja denkbar, daß das Polygon Π_n auch für größere n nicht den Bereich B umschließt, d.h. nicht beschränkt ist. Das wird besonders dann eintreten, wenn B nur an einer Seite dem Rand von K sehr nahe kommt. Natürlich geht die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Π_n nicht geschlossen ist, für $n \to +\infty$ gegen Null. Wir wollen die Größenordnung dieser Konvergenz abschätzen.

Seien φ_i die Winkel der von B weg gerichteten Normalen von g_i mit einer festen Richtung. Durch ψ_i bezeichnen wir die geordnete Stichprobe der φ_i, d.h. die ψ_i sind gleich den φ_j, der Größe nach geordnet: $0 \leqq \psi_1 \leqq \psi_2 \leqq \cdots \leqq \psi_n < 2\pi$. Sei $\delta_i = \psi_i - \psi_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$, wobei $\psi_0 = \psi_n - 2\pi$ gesetzt werde. Das Polygon ist genau dann nicht geschlossen, wenn einer der Winkel $\delta_i \geqq \pi$ ist. Zunächst haben wir also die Verteilungsfunktion des Winkels φ unter der Bedingung $g \cap K \neq \emptyset$, $g \cap B = \emptyset$ zu berechnen. Ist $p_0(\varphi)$ die Stützfunktion von B und $p_1(\varphi)$ die von K, so folgt für $0 \leqq x \leqq 2\pi$

$$P(\varphi \leqq x) = \frac{1}{l-b} \int_0^x \int_{p_0(\varphi)}^{p_1(\varphi)} dp\, d\varphi = \frac{1}{l-b} \int_0^x (p_1(\varphi) - p_0(\varphi))\, d\varphi. \tag{2.21}$$

Hieraus ergibt sich: Ist $p_1(\varphi) - p_0(\varphi) = r$ konstant, d.h. K der äußere Parallelbereich im Abstand r von B, so ist φ auf dem Einheitskreis gleichverteilt und es gilt

$$l - b = 2\pi r \tag{2.22}$$

In diesem Fall ist die Dichte von φ

$$f(\varphi) = \frac{p_1(\varphi) - p_0(\varphi)}{l - b} \tag{2.23}$$

konstant gleich $\frac{1}{2\pi}$; die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $\delta_i \geqq \pi$ ist, ist gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß $n - 1$ Winkel $\psi_1, \ldots, \psi_{i-1}, \psi_{i+1}, \ldots, \psi_n$ zwischen ψ_i und $\psi_i + \pi$ liegen, also gleich $2^{-(n-1)}$. Da alle Möglichkeiten $\delta_i \geqq \pi$ sich gegenseitig ausschließen und gleich wahrscheinlich sind, ergibt sich (vgl. [3])

$$P(\Pi_n \text{ nicht geschlossen}) = \frac{n}{2^{n-1}} \tag{2.24}$$

(falls K Parallelbereich von B ist).

Im allgemeinen Fall gilt wieder

$$P(\Pi_n \text{ nicht geschlossen}) = n \int_0^{2\pi} f(\varphi) \left(\int_{\varphi}^{\varphi+\pi} f(\Theta)\, d\Theta \right)^{n-1} d\varphi. \tag{2.25}$$

Nun ist offenbar

$$f(\varphi) = \frac{p_1(\varphi) - p_0(\varphi)}{l - b} \geqq c > 0 \tag{2.26}$$

also

$$\int_{\varphi}^{\varphi+\pi} f(\Theta)\, d(\Theta) \leqq 1 - \pi c \tag{2.27}$$

wobei

$$\pi c < \int_0^{2\pi} f(\Theta)\, d\Theta = 1 \tag{2.28}$$

gilt. Aus (2.25) und (2.27) folgt

Satz 2. *Ist K ein Parallelbereich von B, so gilt für die Wahrscheinlichkeit, daß Π_n nicht geschlossen ist, die Beziehung* (2.24). *Ist B enthalten im Innern von K, so ergibt sich für diese Wahrscheinlichkeit im allgemeinen Fall*

$$P(\Pi_n \textit{ nicht geschlossen}) \leqq n\, \gamma^{n-1} \tag{2.29}$$

wobei $\gamma\,(0 < \gamma < 1)$ eine von B und K abhängende Konstante ist.

3. Zufällige Polygone um einen Punkt

Sei $B = O \in K$ ein fester Punkt. Dann ist $b = 0$ und $l_S = 2|OS|$ gleich der doppelt zu zählenden Länge der Strecke OS. Aus (2.8) folgt

$$W_1(n) = \frac{1}{l^2} \iint\limits_{g_1 \cap g_2 \cap K \neq \emptyset} \left(1 - \frac{2|OS|}{l}\right)^{n-2} dg_1\, dg_2. \tag{3.1}$$

Die Bedingung $g_i \cap O = \emptyset$ braucht nicht beachtet zu werden, weil die Menge aller Geraden durch einen Punkt das Maß Null hat. Aus (2.20) ergibt sich, weil in unserem Fall $\alpha = \pi$ ist:

$$W_1(n) = \frac{2\pi}{l^2} \int\limits_{S \in K} \left(1 - \frac{2|OS|}{l}\right)^{n-2} dS. \tag{3.2}$$

Sei $0 < r < l/2$, r fest. Dann gilt offenbar

$$\frac{2\pi}{l^2} \int\limits_{\substack{S \in K \\ |OS| > r}} \left(1 - \frac{2|OS|}{l}\right)^{n-2} dS = O(\alpha^n), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{3.3}$$

wobei $\alpha = 1 - (2r)/l$ zu setzen ist. Bezeichnet K_r den Kreis vom Radius r um O, $K_r \subset K$, so folgt

$$W_1(n) = \frac{2\pi}{l^2} \int\limits_{S \in K_r} \left(1 - \frac{2|OS|}{l}\right)^{n-2} dS + O(\alpha^n) \tag{3.4}$$

mit $0 < \alpha < 1$. Für Polarkoordinaten ϱ, Θ gilt $dS = \varrho d\varrho d\Theta$ und es ergibt sich durch eine einfache Rechnung

$$E(X_n) = \frac{n(n-1)}{2} W(n) = \frac{\pi^2}{2} + O(\gamma^n) \quad \text{mit} \quad 0 < \gamma < 1. \tag{3.5}$$

Satz 3. *Die mathematische Erwartung der Anzahl X_n der Ecken eines zufälligen konvexen Polygons Π_n um einen Punkt O einer konvexen Menge K genügt der Beziehung* (3.5).

4. Ringgebiet um einen glatten Bereich

Über B setzen wir nun voraus, daß die Randkurve konvex und genügend oft stetig differenzierbar ist. Unter dieser Voraussetzung ist die Formel (2.20) auszuwerten. Um die Größen $\alpha(S)$ und $l_S - b$ abzuschätzen, wählen wir zunächst geeignete Koordinanten t, s. Auf dem Rand $\mathscr{B}$ von B führen wir die Bogenlänge s als Parameter ein. Wir orientieren $\mathscr{B}$ entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn. Sei $x = f(s)$, $y = g(s)$ die Gleichung von $\mathscr{B}$, $\mathfrak{t} = \{f'(s), g'(s)\}$ der Tangentialvektor und $\mathfrak{n} = \{g', -f'\}$ der äußere Normalvektor; die Striche bedeuten die Ableitung nach s. Es gilt dann $[\mathfrak{n}, \mathfrak{t}] = 1$ für die Determinante von $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{t}$. Die Normalen

$$x = f(s) + t g'(s), \qquad y = g(s) - t f'(s) \tag{4.1}$$

bedecken ein Gebiet, welches das Komplement von B in seinem Innern enthält, schlicht, so daß (4.1) eine in diesem Gebiet umkehrbar eindeutige Koordinatentransformation definiert. Die Funktionaldeterminante dieser Transformation ist

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, s)} = 1 + t k(s) > 0 \quad \text{für} \quad t > -\frac{1}{k(s)}; \tag{4.2}$$

hierbei bezeichnet $k(s) \geqq 0$ die Krümmung von $\mathscr{B}$ im Punkte S. Für dS folgt

$$dS = (1 + t k(s))\, dt\, ds. \tag{4.3}$$

Wir betrachten nun einen festen Punkt Y_0 von $\mathscr{B}$, etwa $s_0 = 0$, und ziehen von einem äußeren Punkt S auf der Normalen durch Y_0 die Tangenten an $\mathscr{B}$, die $\mathscr{B}$ in den Punkten $Y(\sigma_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$, berühren mögen (Abb. 3). Um Näherungsausdrücke für die Größen σ_α und $\tau_\alpha = |Y_\alpha S|$ als Funktionen von t zu berechnen, stellen wir die Kurve $\mathscr{B}$ in bezug

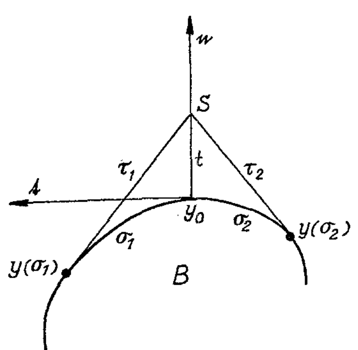

Abb. 3

auf das begleitende Zweibein $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{t}$ im Punkte Y_0 dar:

$$(4.4)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{x}(s) &= \mathfrak{t}\left(s - \frac{k^2}{3!}s^3 - \frac{3kk'}{4!}s^4 + O(s^5)\right)\\ &\quad - \mathfrak{n}\left(\frac{k}{2!}s^2 + \frac{k'}{3!}s^3 + (k'' - k^3)\frac{s^4}{4!} + O(s^5)\right).\end{aligned}$$

Für den Schnittpunkt S der Tangente an $\mathscr{B}$ im Punkte $Y(\sigma_\alpha)$ mit der Normale durch Y_0 haben wir die Beziehung

$$(4.5)\qquad \mathfrak{x}(\sigma) + \tau\,\mathfrak{x}'(\sigma) = t\,\mathfrak{n}$$

auszuwerten. Setzen wir für τ eine Entwicklung

$$(4.6)\qquad \tau = A\sigma + B\sigma^2 + C\sigma^3 + D\sigma^4 + O(\sigma^5)$$

an und gehen damit in (4.5) ein, so erhalten wir nach Zerlegung in die Komponenten bezüglich $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$ zwei skalare Gleichungen. Aus der $\mathfrak{t}$-Komponente folgt

$$(4.7)\qquad \tau = -\sigma - \frac{k^2}{3}\sigma^3 - \frac{3}{8}kk'\sigma^4 + O(\sigma^5).$$

Durch Koeffizientenvergleich der $\mathfrak{n}$-Komponente erhält man unter Berücksichtigung von (4.7):

$$(4.8)\qquad t = \frac{k}{2}\sigma^2 + \frac{k'}{3}\sigma^3 + (3k'' + 5k^3)\frac{\sigma^4}{4!} + O(\sigma^5).$$

Setzen wir nun $t = u^2$, so ergibt sich für einen zu (4.6) analogen Ansatz von $\sigma = \sigma(u)$ aus (4.8):

$$(4.9)\qquad \sigma_{1,2}(u) = \pm\sqrt{\frac{2}{k}}\,u - \frac{2}{3}\frac{k'}{k^2}u^2 \pm \frac{1}{3}\sqrt{\frac{k}{2}}\left(\frac{10}{3}\frac{k'^2}{k^4} - \frac{3}{2}\frac{k''}{k^3} - \frac{5}{2}\right)u^3 + O(u^4).$$

Diese Entwicklung macht die Voraussetzung $k > 0$ für $\mathscr{B}$ notwendig; der Rand von B darf also keinen Streckpunkt und erst recht keine Strecke enthalten. Die beiden Vorzeichen entsprechen den zwei Tangenten von S an $\mathscr{B}$. Nun können wir das Integral (2.20) unter Berücksichtigung von (4.3) auswerten. Unter Beachtung der Vorzeichen für die berechneten Längen (Abb. 3) gilt nach (4.7)

$$(4.10)\qquad l_S - b = (\tau_2 + \sigma_2) - (\tau_1 + \sigma_1) = \frac{k^2}{3}(\sigma_1^3 - \sigma_2^3) + \frac{3}{8}kk'(\sigma_1^4 - \sigma_2^4) + O(\sigma^5).$$

Wegen (4.9) erhalten wir

$$(4.11)\qquad l_S - b = \frac{4}{3}\sqrt{2k}\,u^3 + O(u^5).$$

Für $\alpha - \sin\alpha$ ergibt sich wegen

$$(4.12)\qquad \alpha(s,t) = \int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_1} k(\sigma)\,d\sigma$$

unter Beachtung von (4.9)

$$(4.13)\qquad \alpha - \sin\alpha = \frac{1}{3!}\left(2\sqrt{2k}\,u\right)^3 + O(u^4).$$

Das abzuschätzende Integral (2.20) wird wegen $u = t^{1/2}$ nach Einsetzen der gewonnenen Ausdrücke (4.3), (4.11), (4.13) zu

$$W_1(n) = \frac{2}{(l-b)^2}\int\limits_0^b\int\limits_0^{h(s)}\left(1 - \frac{4\sqrt{2k}\,t^{3/2}}{3\,(l-b)} + O(t^{5/2})\right)^{n-2}\left(\frac{8}{3!}\left(\sqrt{2kt}\right)^3 + O(t^2)\right)(1 + tk)\,dt\,ds.$$

Substituieren wir nun

$$t = \left(\frac{3(l-b)}{4\sqrt{2k}}\,\frac{x}{n}\right)^{2/3}, \tag{4.14}$$

so ergibt sich nach einigen Umformungen

$$W_1(n) = 2\left(\frac{2}{3(l-b)}\right)^{1/3} \int_0^b k^{2/3} \int_0^\infty \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \frac{x^{2/3}}{n^{5/3}}\,dx\,ds + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{4.15}$$

Hieraus folgt

Satz 4. *Sei B ein konvexer beschränkter Bereich mit glattem Rand, dessen Krümmung $k = k(s)$ positiv und beschränkt ist. B liege im Innern der konvexen Menge K; l und b seien der Umfang von K bzw. B. Für die mathematische Erwartung der Eckenzahl X_n eines zufälligen konvexen Polygons Π_n um B gilt dann*

$$E(X_n) = \left[\left(\frac{2}{3(l-b)}\right)^{1/3} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \int_0^b k^{2/3}\,ds\right] n^{1/3} + O(1). \tag{4.16}$$

Die Größenordnung der Eckenanzahl ist also dieselbe wie im Fall der konvexen Hülle von n zufällig im Bereich B gewählten Punkten (vgl. A. Rényi, R. Sulanke [2]), die Faktoren unterscheiden sich jedoch wesentlich.

5. Ringgebiet um ein konvexes Polygon

Sei nun B ein konvexes r-Eck. Nach Satz 1 liegt das zufällige Polygon Π_n mit großer Wahrscheinlichkeit in einer beliebigen, festen, konvexen Umgebung U von B; U sei so gewählt, daß alle Schnittpunkte nicht aneinandergrenzender Seiten von B außerhalb U liegen. Das Ringgebiet $U \setminus B$, für das jetzt das Integral (2.20) auszuwerten ist, wird durch die Seiten von B in r Eckgebiete E_i und in r Seitengebiete T_i zerlegt (Abb. 4), in denen wir die Integration einzeln ausführen.

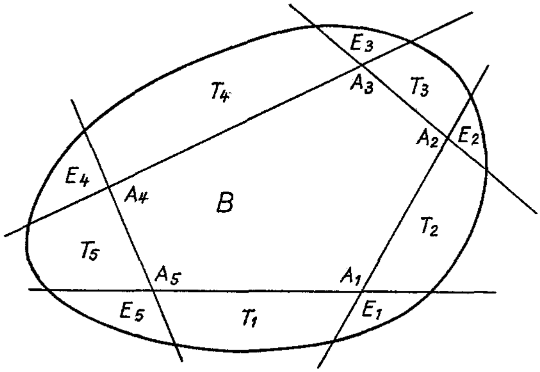

Abb. 4

Sei T eines der Seitengebiete mit den Ecken A, A' an einer Seite der Länge $2c = |AA'|$. Für $S \in T$ gilt

$$l_S - b = |SA| + |SA'| - |AA'| = 2(a-c)\ , \tag{5.1}$$

wobei a die große Halbachse der Ellipse mit den Brennpunkten A, A' durch den

Punkt S ist. Als Koordinaten von S wählen wir a und den Abstand x der Projektion von S auf die große Achse der Ellipse von ihrem Zentrum. Für das Flächenelement dS erhalten wir in diesen Koordinaten

$$dS = \frac{a^4 - c^2 x^2}{a^2 \sqrt{(a^2 - c^2)(a^2 - x^2)}}\, dx\, da. \tag{5.2}$$

Für den in (2.20) eingehenden Winkel α, den Außenwinkel des Dreiecks $AA'S$ in S, berechnet man

$$\sin\alpha = \frac{2ac\sqrt{(a^2 - c^2)(a^2 - x^2)}}{a^4 - c^2 x^2} = f(x, a). \tag{5.3}$$

Wir ersetzen nun das Gebiet T durch einen an AA' grenzenden Abschnitt des Halbkreises über der Seite AA', der in U liegt und in dem $\alpha \leqq \pi/2$ gilt; den hierbei entstehenden Fehler schätzen wir später ab. Der Halbkreis wird bestimmt durch $f = 1$; für x, a erhalten wir den Integrationsbereich

$$c \leqq a \leqq \delta c, \qquad |x| \leqq \frac{a}{c}\sqrt{2c^2 - a^2}, \tag{5.4}$$

hierbei ist δ ($1 < \delta \leqq \sqrt{2}$) eine Zahl, die so gewählt wird, daß der Kreisabschnitt in U liegt. Nach (2.20) ist also zunächst das Integral

$$W = \frac{8c}{(l-b)^2} \int\limits_c^{\delta c} \int\limits_0^{(a/c)\sqrt{2c^2 - a^2}} \left(1 - \frac{2(a-c)}{l-b}\right)^{n-2} \left(\frac{\arcsin f - f}{af}\right) dx\, da \tag{5.5}$$

zu berechnen. Hierzu entwickeln wir das innere Integral

$$F(a) = \int\limits_0^{(a/c)\sqrt{2c^2 - a^2}} \frac{1}{f}(\arcsin f - f)\, dx \tag{5.6}$$

nach Potenzen von $a - c$ und setzen

$$\frac{1}{f}(\arcsin f - f) = \frac{1}{6} f^2 + R. \tag{5.7}$$

Das Integral über den ersten Bestandteil ergibt

$$\frac{1}{6} \int\limits_0^{(a/c)\sqrt{2c^2 - a^2}} f^2\, dx = -\frac{a^4 - c^4}{6a^2 c} \log(a - c) + O(a - c). \tag{5.8}$$

Für den Rest R zeigen wir

$$\int\limits_0^{(a/c)\sqrt{2c^2 - a^2}} R\, dx = O(a - c). \tag{5.9}$$

Es gilt ja, wenn

$$\arcsin \xi = \sum_{v=0}^{\infty} c_v\, \xi^{2v+1}$$

gesetzt wird,

$$0 < R = \sum_{v=2}^{\infty} c_v f^{2v} \leqq f^4 \sum_{v=2}^{\infty} c_v = f^4 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{7}{6}\right). \tag{5.10}$$

Daher genügt es

$$\int\limits_0^{(a/c)\sqrt{2c^2 - a^2}} f^4\, dx = O(a - c)$$

also

$$\int_0^{(a/c)\sqrt{2c^2-a^2}} \frac{(a^2-x^2)^2}{(a^4-c^2x^2)^4}\,dx = O\left(\frac{1}{a-c}\right) \tag{5.11}$$

zu beweisen. Nun gilt wegen $0 \leqq x \leqq c \leqq a$

$$\frac{(a-x)^2}{16\,a^6(a^2-c\,x)^4} \leqq \frac{(a^2-x^2)^2}{(a^4-c^2x^2)^4} \leqq \frac{4(a-x)^2}{a^6(a^2-c\,x)^4}\,. \tag{5.12}$$

Daher ist noch

$$\int_0^{(a/c)\sqrt{2c^2-a^2}} \frac{(a-x)^2}{(a^2-c\,x)^4}\,dx = O\left(\frac{1}{a-c}\right) \tag{5.13}$$

zu zeigen. Diese Beziehung erhält man leicht durch die Substitution $a^2-cx=t$ und einige einfache Abschätzungen. Aus (5.6)—(5.9) ergibt sich

$$F(a) = -\frac{a^4-c^4}{6a^2c}\log(a-c) + O(a-c)\,. \tag{5.14}$$

Nach (5.5) gilt also

$$W = \frac{-4}{3(l-b)^2}\int_c^{\delta c}\left(1-\frac{2(a-c)}{(l-b)}\right)^{n-2}\left(\frac{a^4-c^4}{a^3}\log(a-c)+O(a-c)\right)da. \tag{5.15}$$

Durch die Substitution

$$\frac{2(a-c)}{l-b} = \frac{Z}{n-2}$$

ergibt sich nach einigen einfachen Rechnungen wegen

$$\int_c^{\delta c}\left(1-\frac{2(a-c)}{(l-b)}\right)^{n-2}\cdot O(a-c)\,da = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{5.16}$$

die Beziehung

$$W = \frac{4}{3n(n-1)}\log(n-2) + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{5.17}$$

Bei der Ersetzung des Seitengebietes T durch einen Halbkreisabschnitt haben wir entweder über ein von der Geraden der benachbarten Seite und einen Kreis-

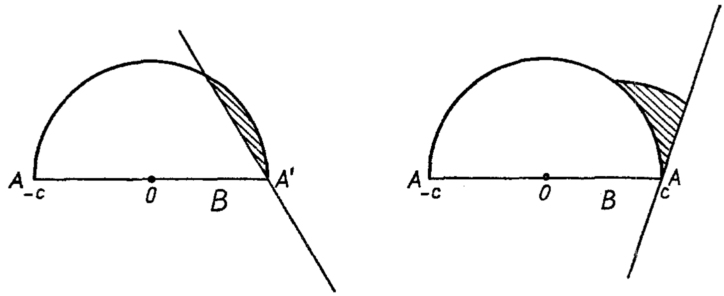

Abb. 5 a Abb. 5 b

bogen begrenztes Gebiet zuviel (Abb. 5a) oder zuwenig (Abb. 5b) integriert. Wir zeigen, daß die hierdurch entstehenden Fehler von der Größenordnung

$O(1/n^2)$ sind. Sei

$$x(a) = c + (a - c)\gamma + O((a - c)^2) \tag{5.18}$$

eine Darstellung der benachbarten Seite. Der Fehler im ersten Fall (Abb. 5a) ist dann

$$\Delta = q \int_c^{\delta c} \left(1 - \frac{2(a-c)}{(l-b)}\right)^{n-2} \frac{1}{a^2\sqrt{a^2-c^2}} \int_{x(a)}^{(a/c)\sqrt{2c^2-a^2}} (\alpha - \sin\alpha) \frac{a^4 - c^2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx\, da; \tag{5.19}$$

hierbei bezeichnet q eine Konstante. Wegen (5.16) genügt es zu zeigen, daß

$$I(a) = \int_{x(a)}^{(a/c)\sqrt{2c^2-a^2}} (\alpha - \sin\alpha) \frac{a^4 - c^2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = O((a-c)^{3/2}) \tag{5.20}$$

gilt. Nun ist $\alpha - \sin\alpha$ beschränkt, so daß es genügt,

$$\int_{x(a)}^{(a/c)\sqrt{2c^2-a^2}} \frac{a^4 - c^2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = O((a-c)^{3/2}) \tag{5.21}$$

zu beweisen. Für das unbestimmte Integral

$$Q(x) = \int \frac{a^4 - c^2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \frac{c^2 x}{2}\sqrt{a^2-x^2} - a^2\left(a^2 - \frac{c^2}{2}\right) \arccos\frac{x}{a} \tag{5.22}$$

erhalten wir wegen $\arccos\frac{x}{a} = \arcsin\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ die Entwicklung

$$Q(x) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}\,(c^2x - a^3 + a(c^2-a^2) + O(a^2-x^2)). \tag{5.23}$$

Durch Einsetzen der unteren Grenze $x = x(a)$ nach (5.18) ergibt sich sofort

$$Q(x(a)) = O((a-c)^{3/2}) \tag{5.24}$$

Das gleiche gilt aber auch für die obere Grenze, weil der hier einzusetzende Ausdruck ebenfalls die Gestalt (5.18), natürlich mit einer anderen Konstanten γ, besitzt. Somit gilt (5.21). Ganz analog schätzt man auch den zweiten Fehler (Abb. 5b) ab. Somit können wir in (5.17) den Halbkreisabschnitt durch das Seitengebiet T ersetzen und erhalten insgesamt

$$W(T) = \frac{4}{3n(n-1)}\log n + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{5.25}$$

Diese Formel gilt auch, wenn B in eine Strecke ausartet.

Nun betrachten wir das Eckgebiet $E = E_i$ bei der Ecke A_i von B. Wir führen wie bei (5.2) wieder halbelliptische Koordinaten ein; nur ist die Basis jetzt die Strecke $A_{i-1}A_{i+1}$, deren Länge wieder durch $2c$ bezeichnet werde. Mit

$$d = \frac{1}{2}(|A_{i-1}A_i| + |A_iA_{i+1}|)$$

ergibt sich für die Abstandsdifferenz

$$l_S - b = 2(a-d). \tag{5.26}$$

Daher gilt nach (2.20) und (5.2) für die entsprechende Wahrscheinlichkeit

$$(5.27)\quad W(E) = \frac{2}{(l-b)^2}\int\limits_{d}^{a_0}\left(1-\frac{2(a-d)}{(l-b)}\right)^{n-2}\int\limits_{x_1(a)}^{x_2(a)}(\alpha-\sin\alpha)\frac{a^4-c^2x^2}{a^2\sqrt{a^2-c^2)(a^2-x^2)}}dx\,da.$$

Hier bezeichnen $x_1(a)$, $x_2(a)$ die x-Koordinaten der Schnittpunkte der zu a gehörenden Ellipse mit den Verlängerungen der an A_i anstoßenden Seiten über A_i hinaus. Da wir nur eine genügend kleine Umgebung von B betrachten, gilt

$$|x| \leqq \max(|x_1(a)|, |x_2(a)|) < a, \qquad c < d \leqq a.$$

Aus dem Mittelwertsatz folgt wegen der Beschränktheit und Stetigkeit des Integranden

$$(5.28)\qquad \int\limits_{x_1(a)}^{x_2(a)}(\alpha-\sin\alpha)\frac{a^4-c^2x^2}{a^2\sqrt{(a^2-c^2)(a^2-x^2)}}\,dx = M(a)\,(x_2(a)-x_1(a)),$$

wobei $M(a)$ für alle a aus dem betrachteten Bereich beschränkt bleibt: $|M(a)| \leqq M_0$. Für $a=d$ gilt $x_1(d) = x_2(d)$. Die Funktionen $x_i(a)$ sind an der Stelle d genügend oft stetig differenzierbar. Es folgt

$$(5.29)\qquad x_2(a)-x_1(a) = h_0(a-d) + O((a-d)^2),$$

wobei h_0 eine gewisse Konstante ist. Setzt man (5.28), (5.29) in (5.27) ein, so folgt nach (5.16) unmittelbar

$$(5.30)\qquad W(E) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Wegen Satz 1, (5.25) und (5.30) erhalten wir den folgenden

Satz 5. *Sei B ein im Innern von K liegendes konvexes r-Eck, $r \geqq 2$. Für die mathematische Erwartung der Eckpunktanzahl X_n des zufälligen Polygons Π_n gilt*

$$E(X_n) = \frac{2r}{3}\log n + O(1).$$

Das Hauptglied dieser Formel stimmt mit dem entsprechenden Hauptglied aus Satz 1 unserer Arbeit [2] über die konvexe Hülle von in einem Polygon liegenden zufälligen Punkten überein.

Literatur

1. Blaschke, W.: Vorlesungen über Integralgeometrie. 3. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1955.
2. Rényi, A., u. R. Sulanke: Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **2**, 75—84 (1963).
3. Stevens, W. L.: Solution to a geometrical problem in probability. Ann. Eugenics **9**, 315—320 (1939).

Dr. R. Sulanke
Mathematisches Institut der
Humboldt-Universität
Berlin

Prof. Dr. A. Rényi
Mathematisches Institut der Ungarischen
Akademie der Wissenschaften
Reáltanoda u. 13—15
Budapest V, Ungarn