GONDOLATOK A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS TANÍTÁSÁRÓL

RÉNYI ALFRÉD

BEVEZETÉS

A következőkben általában beszélek a valószínűségszámítás tanításáról, nem szorítkozom konkrét iskolatípusra vagy meghatározott korú tanulókra. Olyan kérdésekkel foglalkozom, amelyek a valószínűségszámítás tanításának minden formájánál felmerülnek. Három alapvető kérdésről lesz szó:
1. Miért kell a valószínűségszámítást tanítani? 2. Mit kellene tanítani? és 3. Hogyan kellene tanítani? Tehát a valószínűségszámítás tanításának céljával, tartalmával és módszereivel fogok foglalkozni.

Megjegyzéseim személyes tapasztalataimra támaszkodnak. Ezek elsősorban egyetemi oktatói munkámból származnak, de tartottam valószínűségszámítási előadássorozatokat a budapesti szabadegyetemen is, ahol a hallgatóság java részét érdeklődő középiskolások teszik ki és egy előadássorozatot tartottam a televízióban is, amelyet nagyon vegyes hallgatóság nézett meg, egészen fiatalok és felnőttek, akiknek igényeik és ismereteik erősen eltérőek lehettek.

1. MIÉRT KELL A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁST TANÍTANI?

Első pillanatra úgy tűnik, hogy erre a kérdésre csak akkor lehet pontos választ adni, ha megmondjuk, hogy az oktatás milyen formában és milyen szinten történik. Szerintem néhány dolgot enélkül is el lehet mondani. Elmondom, hogy mit tartok a valószínűségszámítás tanítása fő céljainak. Úgy gondolom, hogy ezeket a valószínűségszámítás bármely részének a tanításánál szem előtt kell tartani, bár a különböző iskolatípusoknak megfelelően különböző hangsúlyt kaphatnak. Ezek a célok a következők:

A) A valószínűségszámítást azért tanítjuk, mert fontos szerepe van a tanulók gondolkodásának fejlesztésében.

B) A valószínűségszámítást a mindennapi élet, a tudomány, a technika stb. különböző területén való hasznossága miatt tanítjuk.

C) A valószínűségszámítást azért tanítjuk, mert a matematikai nevelésben fontos, sőt nélkülözhetetlen szerepe van.

Az alábbiakban néhány megjegyzést fűzök ezekhez.

A) A budapesti egyetemen volt egy jogászprofesszor, aki a szóbeli vizsgákon a következő kérdést tette fel a hallgatóknak: Mit lát, ha a Gellérthegyről lenéz a városra? A hallgatóknak ezt kellett válaszolniuk: „Jogtárgyakat és jogalanyokat.” Nem tudom mit szólt volna ez a professzor ahhoz, ha valaki azt válaszolta volna erre a kérdésre, hogy „sztochasztikus folyamatokat”. A professzor valószínűleg egyáltalán nem értette volna a választ, annak ellenére, hogy ez nem kevésbé helyes, mint az, amit ő várt. A valószínűség fogalmának megértése valóban nélkülözhetetlen ahhoz, hogy megértsük a körülöttünk levő világot és egyik alapköve tudományos világképünknek. A tanulók gondolkodásának fejlesztését a matematika bármely ágának tanítása elősegíti, megtanítja őket arra, hogy világosan definiált fogalmakkal logikusan gondolkozzanak. A tanulók gondolkodásának alakításában a valószínűségszámítás tanulmányozásának, a szerepe valamivel több ennél, tartalmazza azt is, amit az imént elmondtunk a matematika egyéb ágainak tanításáról, de túl is megy ezen. A valószínűségszámítás tanítása megtanítja a tanulókat arra, hogy a világos és logikus gondolkozás olyan esetekben is hasznos, amikor bizonytalansággal van dolgunk ezzel találkozunk majdnem minden gyakorlati helyzetben).

A valószínűségszámítás tanulmányozása a tanulók jellemére is előnyös hatással van: például növeli a bátorságukat, ha megértik, hogy bizonyos kudarcokat egyszerűen a véletlen okozott és így e kudarc nem ok arra, hogy feladják a küzdelmet. A primitív emberek hajlamosak arra, hogy túlzottan gyanakvóak legyenek: ha valami bajuk van, azt rendszerint valaki rosszindulatával próbálják megmagyarázni, még akkor is, ha egyáltalán nem arról van szó. Ennek az ésszerűtlen viselkedésnek gyakran az az oka, hogy nem értik a véletlen fogalmát. A valószínűségszámítás tanulmányozása segíthet abban, hogy végleg megszűnjenek a kőkorszak mágikus gondolkozásának ezek a maradványai. Ily módon a valószínűségszámítás tanulmányozása az embereket megértőbbé teszi embertársaik iránt is és segíti a társadalmi életbe való beilleszkedésüket.

B) A hétköznapi életben állandóan szembekerülünk a véletlennel, a valószínűségszámítás arra is megtanít bennünket, hogyan lehet az egyes döntésekkel járó kockázatokat figyelembe venni egy ésszerű magatartás kialakításánál. A lehetséges biztosítási formák közül a legcélszerűbb kiválasztása jó példa arra, hogyan használhatjuk a valószínűségszámítást a saját életünkben. Családi költségvetés készítésénél, vagy külföldi utazás tervezésénél meg kell becsülnünk a kiadásokat, amelyek bizonyos fokig a véletlentől függnek. Ezek a példák is mutatják, hogy mindenkinek szüksége van a véletlen törvényeinek valamilyen szintű ismeretére. A valószínűségszámítás tudományos, technológiai, gazdasági, stb. alkalmazásainak egyre növekvő fontosságára való tekintettel, mind több embernek van a munkája során bizonyos valószínűségszámítási tudásra szüksége. Az iskolatípustól függ, hogy mennyire kell ezt figyelembe venni. Nem felejtkezhetünk meg arról sem, hogy manapság minden művelt embernek, a foglalkozásától függetlenül, valamennyire kell értenie az olyan dolgokhoz mint atomenergia, rádióaktivitás, genetika stb. és ezeknek még a felszínes megértéséhez is szükség van bizonyos valószínűségszámítási ismeretre. Ma, amikor az időjárásjelentésben megadják a holnapi eső valószínűségét, mindenkinek célszerű tudnia, hogy mit is jelent ez tulajdonképpen.

C) A valószínűségszámítás elemeinek ismerete segíti a való világ és a matematika kapcsolatának, a valóság matematikai modelljének megértését. Azoknak a tanulóknak, akik a matematikatanítás során egyáltalában nem találkoznak a valószínűségszámítással, nem alakul ki megfelelő képük arról, hogy milyen is valójában a matematika és mire használhatják. A valószínűségszámítást nem ismerő embereknek van egy közös téves felfogásuk, mely szerint matematikai módszereket, csak olyan helyzetben lehet alkalmazni, ahol egyszerű és pontos összefüggés áll fenn kis számú és pontosan mérhető mennyiségek között. Gyakran hallhatunk még mostanában is olyan kijelentéseket, hogy bizonyos jelenségek tanulmányozására, leírására nem lehet matematikai módszereket alkalmazni, mert azok „túl bonyolultak". Azoknak az embereknek az előítélete ez, akik tanultak némi matematikát, de valószínűségszámítást nem és ez a szemlélet — legalább is néhány országban — jó ideig akadályozta a matematikai módszerek alkalmazását a közgazdaságban, a szociológiában, a biológiában, a pszichológiában és egyéb területeken.

Megjegyzem, még hogy az az elképzelés, hogy a valószínűségszámítás tanítására is sor kerüljön közép-, illetve alsóbb fokon, összhangban van a matematikatanítás egyéb modern törekvéseivel és könnyen össze lehet egyeztetni ezekkel úgy, hogy ez hasznára váljék a valószínűségszámítás tanításának is és az új törekvések megvalósításának is. A valószínűségszámítás tanítását például megkönnyíti, ha a tanulók előzőleg már megismerkedtek a halmazelmélet és a Boole algebra elemeivel, másrészt a valószínűségszámítás tanulmányozása kiváló alkalom arra, hogy használjuk az említett fogalmakat, ami viszont elősegíti e fogalmak alaposabb megértését.

2. MIT KELLENE TANÍTANI?

Mivel csak olyan kérdésekkel akarok foglalkozni, amelyek a valószínűségszámítás akármilyen szinten történő tanításánál lényegesek, a tananyag viszont erősen függ a szóban forgó iskolatípustól, a tanulók életkorától, általános matematikai ismereteiktől stb., csak néhány általános megjegyzésre szorítkozom.

Úgy gondolom, hogy az alább felsorolandó négy témából minden valószínűségszámítási tananyagnak kell valamennyit tartalmaznia:

A) A valószínűségszámítás gyakorlati háttere, vagyis a mindennapi életben, a természetben, a szerencsejátékokban felmerülő statisztikai törvényszerűségek konstatálása.

B) A valószínűség matematikai elmélete;

C) A valószínűségszámítás alkalmazása különböző területeken véletlen tömegjelenségek leírására és az ilyen jelenségek lefolyásának nagy vonalakban való előrejelzésére.

D) A valószínűségszámítás története, beleértve a valószínűség fogalmával kapcsolatos filozófiai kérdések tárgyalását.

Ennek a négy pontnak a sorrendje annak a logikai sorrendnek felel meg, amelyben — véleményem szerint — ezeket a kérdéseket tárgyalni kell. A félreértések elkerülése végett, hangsúlyozni kívánom, hogy amikor azt mondom, hogy a valószínűségszámítás tanítását azzal kell kezdeni, hogy a tanulókat megismertetjük a statisztikai törvényszerűség fogalmával, nem arra gondolok, hogy statisztikával kell kezdenünk. Ellenkezőleg, egyetlen olyan kísérletet sem tartottam (sem logikai sem didaktikai szempontból) kielégítőnek, amely szerint a statisztikát előzetes valószínűségszámítási ismeretek nélkül tanították. Úgy képzelem a valószínűségszámítás tanítását kívánatos lenne azzal kezdeni, hogy a a statisztikai törvényszerűséget jól választott példákkal és kísérletekkel magyarázzuk meg. Először megvilágítjuk a tanulók előtt, hogy melyek azok az alapvető dolgok, amelyek segíthetnek a valószínűségszámítás matematikai elméletének megértésében és megmagyarázásában és csak ezután térünk rá a valószínűségszámítás olyan mértékű tárgyalására, amelyet a tanulók életkora és matematikai előképzettsége megenged. Természetesen figyelembe kell venni azt is, hogy mennyi idő áll rendelkezésre és azt, hogy a szóban forgó iskolatípus milyen speciális célokat követel. Szerintem a matematikai statisztikát mint *különálló* tárgyat csak egyetemi szinten helyes tanítani, azoknak a hallgatóknak, akik érdeklődnek iránta.

Ami a valószínűségszámítás alkalmazásait illeti, találkoztam már olyan szemlélettel is, hogy a valószínűségszámítás gyakorlati fontosságát csak a statisztika tanításával lehet megvilágítani. Én nem hiszem, hogy ez így lenne: a valószínűségszámítás legfontosabb alkalmazásainak nagy részét teljesen meg lehet érteni a valószínűségszámítás valamilyen bevezető tárgyalása alapján. Természetesen a valószínűségszámítás bármilyen rövid tárgyalása során rá kell világítani arra, hogy a valóságban legtöbb esetben empirikusan kell meghatározni az alapvető paramétereket; azonban ha elég nagy minta áll rendelkezésünkre, akkor ez nem kíván bonyolult statisztikai módszereket. Különben bevezető tárgyalásban is rá kell világítani arra, hogy a valószínűségszámítás inverz problémáinak a tanulmányozása (amikor konkrét megfigyelésekből kiindulva akarunk a szóban forgó valószínűségi eloszlás paramétereire következtetéseket levonni) egy különálló szaktárgy témája, nevezetesen a matematikai statisztikáé, amelynek az alapját a valószínűségszámítás adja, de ennek ellenére az egy önálló tárgy, nem a valószínűségszámítás része. A Bayes módszert természetesen lehet a valószínűségszámításon belül tárgyalni és ha az idő megengedi, bevezető tárgyalásba is be lehet építeni valamennyit belőle.

Ami a *D)* pontot illeti, úgy gondolom, hogy míg valamennyi történeti tárgyalás hasznos és kívánatos minden anyagrésznél, a valószínűségszámítás tanításánál ez különös segítséget jelent. Még egy rövid bevezető tárgyalásban is nagyon fontos, hogy a valószínűség fogalmának filozófiai problémáit megtárgyaljuk, mivel segíti a tanulókat abban, hogy megtanulják a valószínűségszámítás sajátos gondolkodásmódját. A valószínűség filozófiai kérdéseit könnyen lehet a valószínűség történetének rövid megvilágítása során tárgyalni; ez egyúttal a valószínűség filozófiájának története is.

Végül hangsúlyozni szeretném, hogy az *entrópiát* és az *információt* a Valószínűségszámítás alapvető fogalmainak tartom és igen ajánlom a tanároknak, hogy szánjanak valamennyi időt ezen fogalmak tárgyalására a valószínűségszámítás tanítása keretében.

3. HOGYAN KELLENE A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁST TANÍTANI?

Ezzel a kérdéskörrel kapcsolatban épp ellekező nehézség lép fel, mint az előzővel. Itt olyan sokat lehet mondani — anélkül, hogy bármilyen szintre is szorítkoznánk — hogy némi szelekcióra van szükség. Sok fontos kérdést félretéve csak a következő három kérdéssel kapcsolatban teszek néhány megjegyzést.

A) A matematikai szigorúság kérdése.

B) Véletlen eseményekre vonatkozó kísérletek elvégzése az iskolában.

C) A valószínűségi mező fogalmának a bevezetése.

A) Én általában az ésszerű mértékű szigorúság pártján vagyok a matematikatanítás terén, mert úgy érzem, hogy szigorúság nélkül egyáltalán nem matematika a matematika. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy minden kijelentést szigorúan be kellene bizonyítani: a tételek egy részét bizonyítás nélkül lehet elmondani, másokat heurisztikus okoskodással alátámasztani, és csak néhányhoz kell teljes bizonyítás. Azonban éles különbséget kell tenni a különböző típusú információközlések között: a tanulóknak mindig tudniok kell, hogy mit bizonyítottunk és mit nem. Különösen vigyázzunk arra, hogy sose nevezzük bizonyításnak a heurisztikus érvelést. Hasonlóan éles különbséget kell tenni definíciók és tételek között. Mindez érvényes a matematika bármely ágának tanítására, azonban a valószínűségszámítás tanításában gyakran megsértik ezeket az alapszabályokat, ezért kell hangsúlyozni őket. Ha a tanár azt akarja, hogy a tanulók felfogják, hogy miért van szükség szigorúságra, akkor jól választott példákkal, olyanokkal, ahol a hanyag tárgyalás kimondottan hamis eredményekre vezet, meg kell győznie őket a szigorúság szükségességéről. A matematikatanítás alapját általában jól választott példáknak kellene képezniök és sehol sincs olyan nagy választék izgalmas és mégis elemi példákban, mint a valószínűségszámítás területén.

B) Statisztikai törvényszerűséget lehet szemléltetni könyvekből, újságokból, stb. vett adatokkal, azonban nagyobb hatással van a tanulókra, ha a szemük előtt — sőt, ha lehetséges sajátkezűleg — elvégzett kísérletekből nyerték a vizsgált adatokat. Néhány tanár nem ért ezzel egyet, mert fél, hogy a kísérletek nem vezetnek pontosan olyan eredményekre, mint amit várnak, amint ez az ilyen kísérletek természeténél fogva valóban bekövetkezhet. Szerintem ez a félelem nem indokolt és ha a tanár jól érti a valószínűségszámítást, nem kerülhet kényelmetlen helyzetbe. Természetesen a tanárnak gyorsan kell reagálnia, hiszen olyan eredmények értékelése, amelyeket a tanár maga sem láthatott előre, nehezebb, mint olyan példák tárgyalása, amelyeknek az eredményét a tanár előre kidolgozhatta. Azonban az iskolában végrehajtott kísérletek előnye olyan nagy, hogy az említett nehézségek ellenére a magam részéről erősen pártolom őket. Természetesen gondosan elő kell készíteni ezeket a kísérleteket. Például a tv-ben tartott népszerűsítő előadássorozatomban el akartam végezni Buffon híres tűkísérletét. Meglepődve fedeztem fel, hogy ugyan a legtöbb valószínűségszámítási tankönyv említi Buffon kísérletét, egyik sem ad gyakorlati tanácsot ahhoz, hogyan lehet elvégezni ezt a kísérletet úgy, hogy az alapvető feltételek elég jól megvalósuljanak. Végül magamnak kellett kitalálnom egy egyszerű mechanizmust erre a célra. Hasonló tapasztalatom volt egy másik klasszikus kísérlettel, a Galton deszkával. Azt tapasztaltam, ha az ember nem kellő gonddal végzi a kísérletet, akkor a kapott eredmény erősen eltér attól, amit várunk, mivel a különböző sorokban a golyók eltérítései erősen összefüggnek. Ebben az esetben egy speciális készüléket kellett konstruálnom ahhoz, hogy a várt eredményt kapjam. Ami a kockákat illeti, azok közül, amiket én láttam, a legjobbak azok az ikozaéder alakú kockák voltak, amiket minőség-ellenőrzés céljára — véletlen számjegyeket állítanak elő vele — Japánban gyártanak. Úgy tudom, hogy Japánban nagy mennyiségben gyártják őket. Nem hiszem, hogy túl nehéz lenne megbízható közönséges kockákat gyártani valószínűségszámítás tanításához. A kockákkal kapcsolatban még meg akarom említeni, hogy a tv-előadásomban nemcsak közönséges kockákkal végeztem kísérleteket, hanem csontokkal is, ahogyan azt az ókori görögök és rómaiak tették. Természetesen sok más egyszerű kísérlet van még, ami alkalmas arra, hogy iskolában elvégezzék: pénzérmék dobálása, jól összekevert kártyacsomagból lapok húzása, rulettjáték, stb. Akkor fogtam fel, hogy milyen értékes segítséget jelentenek a szerencsejátékokra vonatkozó példák, amikor dr. Révész Pál kollégám etiópiai valószínűségszámítás-tanítási tapasztalatairól mesélve elmondta, hogy igen nagy nehézséget jelentett neki, hogy Etiópiában a szerencsejátékok teljesen ismeretlenek, és mivel erősen tiltják őket, azt tanácsolták neki, hogy ne is említsen az előadásaiban ilyen játékokat. Különben a minőségellenőrzésnél is alkalmaznak olyan ügyes megoldásokat, amelyek az iskolában hasznosíthatók. Például a tv-előadásomban kísérleteket végeztem egy zsák műanyag golyóval és egy műanyag lapáttal, amelyen 10×10-es négyzetes elrendezésben 100 kis lyuk volt. Ha a lapátot bemerítettem a golyók közé, a golyók, amelyeket elektromos erő vonzott a lapáthoz, megtöltötték a kis lyukakat. Kétféle golyót tettem a zsákba: fehéret és pirosat úgy, hogy a piros golyók aránya egész kicsi volt (1%). Így olyan adatokat kaptam, amelyek jól illeszkedtek a Poisson eloszláshoz. Meg szeretném említeni, hogy a kísérletekből nyert adatokat többféleképpen lehet analizálni és ez az analízis sokkal messzebb vezethet, mint a statisztikai törvényszerűség fogalmának megértése, nevezetesen elvezethet a függetlenség fogalmához és a véletlen jelenségek további kevésbé nyilvánvaló fogalmához. Például, többször csináltam azt, hogy mutattam tanulóknak két — nullákból és egyesekből álló — sorozatot; és azt mondtam nekik, hogy az egyiket úgy kaptam, hogy egy pénzdarabot dobáltam (0 jelentette a fejet, 1 az írást), a másik sorozat pedig csupán mesterséges utánzata a valódi véletlen sorozatnak. A sorozatok körülbelül 150 elemből álltak, a tanulóknak ki kellett találniuk, hogy melyik közülük valódi véletlen sorozat. (Általában a mesterséges sorozat igen szabályos volt, pl. sem egyesből, sem nullából nem tartalmazott hosszú szakaszokat, míg a valódi sorozatban természetesen voltak ilyen sorozatok is.)

C) Végül arról szeretnék beszámolni, hogy az utóbbi időben hogyan vezetem be a valószínűségi mező fogalmát. Első látásra úgy tűnik, hogy csupán terminológiai jellegű újításról van szó, megmutatom azonban, hogy ennél több van mögötte. Amit szokásosan valószínűségi mezőnek neveznek, vagyis az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármast, ahol Ω egy nem üres halmaz, $\mathcal{A}$ egy, az Ω részhalmazaiból álló σ-algebra és P egy $\mathcal{A}$-n értelmezett mérték, amelyre $P(\Omega)=1$; azt én egy *kísérlet*nek nevezem, az $\omega\in\Omega$ elemeket pedig a kísérlet lehetséges *kimeneteleinek*. Ω minden A részhalmazát *eseménynek* nevezem, amely a kísérletnek az A halmazhoz tartozó lehetséges kimeneteleiből áll. Azokat a részhalmazokat, amelyek az $\mathcal{A}$ halmazrendszer elemei, *megfigyelhető eseményeknek* tekintem, míg Ω-nak azokat a részhalmazait, amelyek nem tartoznak $\mathcal{A}$-hoz, nem megfigyelhető eseményeknek. $P(A)$-t szokásosan a megfigyelhető A esemény valószínűségeként értelmezem. Hangsúlyozni kell, hogy a nem megfigyelhető események valószínűségét egyáltalán nem értelmezzük.

Egy tipikus példa az a kísérlet, amikor két egyforma kockával dobunk. Ebben az esetben Ω 36 számpárból áll, $(a, b)\in\Omega$ ha $1\leqq a\leqq 6$ és $1\leqq b\leqq 6$, és $\mathcal{A}$ Ω-nak azok az A részhalmazait tartalmazza, amelyekre fennáll, hogy ha $(a, b)\in A$, akkor $(b, a)\in A$. A 2^{36} részhalmaz közül csak 2^{21}-nek van meg ez a tulajdonsága: ezek a megfigyelhető események.

Ez a példa azt is mutatja, hogy még ha Ω véges is, előfordulhat, hogy nem célszerű belevenni $\mathcal{A}$-ba Ω összes részhalmazát. Természetesen, ha Ω-nak az (a, b) renrendezett párok helyett a rendezetlen párok halmazát vesszük, akkor $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazából álló halmazrendszer lesz. Általában azonban célszerűbb a lehetséges kimenetelek halmazát viszonylag nagynak választani és azoknak a halmazoknak az összességét korlátozni, melyek valószínűségét definiáljuk.

Ez a tárgyalás logikus módon elvezet ahhoz a feltevéshez, hogy $\mathcal{A}$-nak egy halmazalgebrának kell lennie: hiszen nyilvánvaló, hogy ha egy esemény megfigyelhető, akkor megfigyelhető az ellentettje is, továbbá ha két esemény megfigyelhető, akkor az az esemény is megfigyelhető, amely azon kimenetelekből áll, amelyek a két említett esemény közül legalább az egyikben előfordulnak. (Ez a kvantummechanikában nem igaz, „klasszikus" megfigyelésekre azonban mindig teljesül.)

Különböző iskolai szinteken próbáltam ilyen módon bevezetni a valószínűségi mező fogalmát (nemcsak egyetemi, elemibb fokon is) és azt tapasztaltam, hogy megkönnyíti a tanulóknak a valószínűségi mező fogalmának megértését, ha a megfigyelhetőség fogalmára helyezzük a hangsúlyt. Ennek a módszernek bizonyos előnyei csak későbbi stádiumban válnak nyilvánvalóvá: megkönnyíti a feltételes valószínűség és a feltételes várható érték általános fogalmának a megértését, ha a tanulók kezdettől fogva hozzászoknak ahhoz, hogy az a halmazrendszer, amelyen egy mérték értelmezve van, nem feltétlenül a lehető legbővebb. Sok tankönyv azt a körülményt, hogy egy valószínűségi mérték az alaphalmaz részhalmazainak egy bizonyos σ-algebráján van definiálva és nem az összes részhalmazon, azzal indokolja, hogy gyakran lehetetlen tisztán matematikai okoskodással kiterjeszteni a szóban forgó mértéket az összes részhalmazra. Bár ez szó szerint így igaz, úgy gondolom, hogy mégis félrevezető ez az indoklás, rendszerint teljesen értelmetlen lenne ugyanis a valószínűségi mértéket az alaptér összes részhalmazára kiterjeszteni, mert a kiterjesztett mérték teljesen elveszítené az eredeti, valószínűségszámítás szerinti értelmét. Ebben a kérdésben nem akarok a részletekbe belemenni, mivel ez csak magasabb fokú valószínűségszámítás tanítására vonatkozik. Visszatérve az elemibb fokú tanításra azt kívánom hangsúlyozni, hogy azt tapasztaltam a valószínűség fogalmának a megértését — pontosabban a valószínűségszámítás matematikai felépítésének megértését — megkönnyíti, ha egészen a kezdettől fogva szerepel azon események megfigyelhetőségének fogalma, amelyekre a valószínűség értelmezve van.

О ПРЕПОДАВАНИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

АЛЬФРЕД РЕНЬИ

THOUGHTS ON TEACHING PROBABILITY

RÉNYI A.