VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI MÓDSZEREK AZ ANALÍZISBEN. I.

RÉNYI ALFRÉD

0. §. BEVEZETÉS

A valószínűségszámítás a véletlen tömegjelenségek vizsgálata céljából jött létre. Amióta azonban a valószínűségszámítás egzakt matematikai diszciplinává vált, lehetővé vált a valószínűségszámítás módszereinek, eredményeinek a felhasználása olyan problémákra is, amelyeknek a véletlenhez semmi közük nincsen. Elvileg a valószínűségszámítás eredményei, módszerei a matematika bármely ágában felhasználhatók és ez a lehetőség számos esetben meg is valósult és igen sok — részben más úton meg sem közelíthető — fontos probléma megoldásához vezetett. A valószínűségszámítás *számelméleti* alkalmazásai közismertek, e témakörről monográfia (l. [1]) és több összefoglaló dolgozat (l. [2], [3]) jelent meg. A valószínűségszámítás sikerrel alkalmazható az *algebrában* is (l. [4], [5]). A valószínűségszámítás *geometriai* alkalmazásai is közismertek, elsősorban az integrálgeometriában és a diszkrét geometriában (l. pl. [6], [7]). E dolgozatban a valószínűségszámítás módszereinek az *analízis*ben való felhasználási lehetőségeiről kívánunk (kaleidoszkópszerű) képet adni.

E dolgozat semmilyen tekintetben nem törekszik teljességre, csak arra, hogy válogatott példákon keresztül képet adjon a valószínűségszámítási módszerek az analízisben való alkalmazásainak széles spektrumáról. Túlnyomórészt olyan példákat válogattunk össze, amelyek kevés valószínűségszámítási ismerettel is megérthetők. A dolgozat egyes paragrafusai egymástól függetlenül, a dolgozatban közölttől eltérő sorrendben is olvashatók. A példák tárgyalásánál a valószínűségszámítás alapfogalmait ismertnek tételeztük fel; a megértés megkönnyítésére azonban a II. rész függelékében összefoglaljuk a felhasznált valószínűségszámítási ismereteket és tételeket (utóbbiakat természetesen bizonyítás nélkül). A dolgozat megértéséhez szükséges valószínűségszámítási ismeretek egy-két kivétellel nem mennek túl az egyetemi anyagon; szinte az összes felhasznált valószínűségszámítási tételek megtalálhatók pl. a [8] tankönyvben, amelynek feladatai között egyébként több, ezen dolgozatban tárgyalt példa is szerepel, azonban legtöbbször csak rövid utalással a megoldás módjára.

A valószínűségszámítási módszerek az analízisben való alkalmazásairól eddig kevés összefoglaló jellegű munka jelent meg. Sok érdekes példa található M. *Kac* dolgozatában [3], valamint W. *Feller* tankönyvének nemrégen megjelent második kötetében (l. [9]).

E dolgozat elsősorban ismert eredmények összefoglalását adja; egyes példák tárgyalásánál azonban helyenként a szakirodalomban találhatótól eltérő, egyszerűbb bizonyítást adunk, (így pl. a 3. §-ban Hayman tételére, a 6. §-ban Ryll—Nardzewski tételére) továbbá új eredményeket is közlünk. (Számozott tételként csak ez utóbbiak szerepelnek.)

A valószínűségszámítási módszerek az analízisben való felhasználásának „iskolapéldája" Weierstrass tételének S. *Bernstein*től származó valószínűségszámítási bizonyítása, amely e tétel legegyszerűbb ismert bizonyítása.

Legyen $f(x)$ tetszőleges, a $[0, 1]$ zárt intervallumban folytonos valós függvény. Legyen

$$(1.1) \qquad B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

$B_n(f, x)$ nyilván n-edfokú polinom, amelyet az $f(x)$-hez tartozó n-edik Bernstein-féle polinomnak nevezünk. Mármost S. *Bernstein* [10] azt mutatta meg, hogy

$$(1.2) \qquad \lim_{n\to+\infty} B_n(f, x) = f(x)$$

és a konvergencia $[0, 1]$-ben egyenletes; ebből már következik Weierstrass klasszikus tétele, mely szerint minden a $[0, 1]$ zárt intervallumban folytonos függvény tetszőleges pontossággal egyenletesen approximálható alkalmasan választott polinommal.

Az (1. 2) állítás valószínűségszámítási jelentése a következő: Legyen $\xi_n(x)$ n-edrendű x paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, vagyis legyen

$$(1.3) \qquad \mathbf{P}(\xi_n(x) = k) = \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Ha például a $[0, 1]$ intervallumban egymástól függetlenül egyenletes eloszlással választunk n pontot és $\xi_n(x)$ jelenti ezen pontok közül azoknak a számát, amelyek a $[0, x)$ intervallumba esnek, akkor (1. 3) fennáll. Mármost $B_n(f, x)$ felfogható, mint az $\eta_n = f\left(\frac{\xi_n(x)}{n}\right)$ valószínűségi változó várható értéke, hiszen

$$(1.4) \qquad \mathbf{M}(\eta_n) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbf{P}(\xi_n(x) = k) = B_n(f, x).$$

Ismeretes, hogy az n-edrendű x paraméterű binomiális eloszlás várható értéke nx és szórása $\sqrt{nx(1-x)}$, és így a Csebisev-féle egyenlőtlenséget $\xi_n(x)$-re alkalmazva adódik, hogy minden $\lambda > 0$-ra

$$(1.5) \qquad \mathbf{P}\left(|\xi_n(x) - nx| \geqq \lambda\sqrt{nx(1-x)}\right) \leqq \frac{1}{\lambda^2}.$$

(Persze (1. 5) állítása csak $\lambda > 1$-re érdekes, $\lambda \leqq 1$-re triviális.)

Legyen

$$(1.6) \qquad \lambda = \delta\sqrt{\frac{n}{x(1-x)}},$$

ahol $\delta > 0$ tetszőleges; azt kapjuk, hogy

$$(1.7) \qquad \mathbf{P}\left(\left|\frac{\xi_n(x)}{n} - x\right| \geqq \delta\right) \leqq \frac{x(1-x)}{\delta^2 n} \leqq \frac{1}{4n\delta^2} \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1.$$

Mármost, mivel $f(x)$ a $[0, 1]$ zárt intervallumban folytonos, tehát ott egyenletesen folytonos és korlátos, vagyis minden pozitív $\varepsilon > 0$-hoz megadható a $\delta > 0$

szám úgy, hogy ha $|x'-x|\leqq\delta$ $(0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq x'\leqq 1)$, akkor $|f(x')-f(x)|\leqq\varepsilon$ legyen, továbbá megadható olyan $K>0$, hogy $|f(x)|\leqq K$ ha $0\leqq x\leqq 1$.

Mármost (1. 8) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1$, és így

$$B_n(f,x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right) \tag{1. 9}$$

és így

$$|B_n(f,x)-f(x)|\leqq\varepsilon+2KP\left(\left|\frac{\xi_n(x)}{n}-x\right|\geqq\delta\right)\leqq\varepsilon+\frac{K}{2\delta^2 n} \tag{1. 10}$$

és ez a becslés x-ben egyenletesen teljesül, ha $0<x<1$.

Nyilvánvaló, hogy (1. 10) $x=0$-ra és $x=1$-re is teljesül, hiszen x ezen értékeire (1. 10) bal oldala 0-val egyenlő.

Így tehát, ha $n\geqq n_0(\varepsilon)=\frac{k}{2\delta^2\varepsilon}$, akkor

$$|B_n(f,x)-f(x)|\leqq 2\varepsilon \qquad (0\leqq x\leqq 1). \tag{1. 11}$$

Ezzel (1. 2)-t és ezzel Weierstrass tételét bebizonyítottuk.

Könnyen belátható ezúton *T. Popoviciu* és *M. Kac* tétele is: ha $f(x)$ a $[0,1]$ intervallumban a Lip α osztályba tartozik, $(0<\alpha\leqq 1)$, akkor

$$B_n(f,x)-f(x)=O\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)$$

(l. [11] ahol a Bernstein-polinomokra vonatkozó további approximációs tételek is találhatók.)

Természetesen a fenti bizonyítás elmondható valószínűségszámítási interpretáció nélkül is, és több tankönyv (l. pl. [1]) ezt is teszi. Ez esetben persze közvetlenül igazolni kell, hogy $\xi_n(x)$ várható értéke nx és szórása $\sqrt{nx(1-x)}$, vagyis be kell bizonyítani, az (egyébként egyszerűen belátható)

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^k(1-x)^{n-k}=nx \tag{1. 12}$$

és

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x) \tag{1. 13}$$

azonosságokat és a bizonyítás során a Csebisev-egyenlőtlenséget is be kell bizonyítani, anélkül, hogy megmondanánk, hogy erről van szó. A bizonyítás ezáltal egyszerűségben is veszt, de még nagyobb veszteség, hogy a bizonyítás lényege az ilyen tárgyalásmódnál nem domborodik ki eléggé.

A bizonyítás valószínűségszámítási megfogalmazása világossá teszi továbbá, hogy a binomiális eloszlás helyett számos más eloszlást lehet használni, amelynek tagjai a várható értéknek polinomjai. Mivel a binomiális eloszlás felfogható, mint a visszatevéses mintavételnél fellépő valószínűségeloszlás, a legkézenfekvőbb alternatíva a visszatevés nélküli mintavételnél fellépő hipergeometrikus eloszlással helyettesíteni a binomiális eloszlást. Ez a meggondolás a

$$(1.14)\qquad B_n(f, N, x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{\binom{Nx}{k}\binom{N(1-x)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

polinomok vizsgálatához vezet. $B_n(f, N, x)$ az $N \geqq n$ pozitív paraméter minden értéke mellett n-edfokú polinom, azonban ez a polinom valószínűségszámításilag csak akkor interpretálható, ha

$$(1.15)\qquad \frac{n}{N} \leqq x \leqq 1-\frac{n}{N}$$

ugyanis, bár a

$$(1.16)\qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{Nx}{k}\binom{N(1-x)}{n-k}}{\binom{N}{n}} = 1$$

reláció akkor is fennáll, ha (1. 15) nem teljesül; azonban az (1. 15) feltétel az (1. 16) baloldalán álló összeg tagjai nemnegativitásának biztosításához szükséges, tehát ahhoz, hogy e tagok valóban valószínűségeloszlást alkossanak.

Ha az (1. 15) feltétel teljesül, akkor $B_n(f, N, x)$ felfogható, mint várható érték, mégpedig

$$(1.17)\qquad B_n(f, N, x) = \mathbf{M}\left(f\left(\frac{\xi(n, N, x)}{n}\right)\right),$$

ahol $\xi(n, N, x)$ olyan valószínűségi változó, amelyre

$$(1.18)\qquad \mathbf{P}(\xi(n, N, x) = k) = \frac{\binom{Nx}{k}\binom{N(1-x)}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Érdekes megjegyezni, hogy $B_n(f, n, x)$ nem más, mint az $f(x)$ függvénynek a k/n $(k=0, 1, \ldots, n)$ ekvidisztáns alappontokhoz tartozó Lagrange-féle interpolációs polinomja, hiszen

$$(1.19)\qquad B_n\left(f, n, \frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Mármost könnyen belátható az is, hogy

$$(1.20)\qquad \lim_{N\to\infty} B_n(f, N, x) = B_n(f, x),$$

ahol $B_n(f, x)$ az $f(x)$ n-edik Bernstein-féle polinomja (vö. (1. 1)).

A $B_n(f, N, x)$ polinomok tehát folytonos átmenetet létesítenek a Lagrange és a Bernstein-polinomok között. Az (1. 18) eloszlás várható értéke és szórása jól ismeretes:

$$(1.21)\qquad \mathbf{M}(\xi(n, N, x)) = nx$$

és

$$(1.22)\qquad \mathbf{D}(\xi(n, N, x)) = \sqrt{nx(1-x)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)}.$$

Ezen relációk figyelembevételével Bernstein bizonyítását szószerint követve a következő eredményre jutunk:

1. tétel. Ha $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ *és* $N(n)$ *egy tetszőleges olyan számsorozat, amelyre* $\frac{n}{N(n)}\leqq\varepsilon$, *akkor tetszőleges, a* $[0, 1]$*-ben folytonos* $f(x)$ *valós függvényre*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f, N(n), x) = f(x) \quad \text{ha} \quad \varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$$

és a konvergencia az $\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ *intervallumban egyenletes.*

Ezen tételnek látszólag szépséghibája, hogy a konvergenciát csak az $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ intervallumban garantálja, azonban ettől a látszólagos megszorítástól megszabadulhatunk, ha a tételt a $[0, 1]$-ben definiált $f(x)$ függvény helyett a

$$g(x) = \begin{cases} f(0) & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq \varepsilon \\ f\left(\dfrac{x-\varepsilon}{1-2\varepsilon}\right) & \text{ha} \quad \varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon \\ f(1) & \text{ha} \quad 1-\varepsilon \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

függvényre alkalmazzuk; így azt kapjuk, hogy a $[0,1]$ intervallumban egyenletesen

$$\lim_{n\to+\infty} B_n(g, N(n), \varepsilon+(1-2\varepsilon)x) = f(x).$$

A Bernstein-polinomok valószínűségszámítási interpretációjának előnye az is, hogy közvetlenül általánosítható a többdimenziós esetre. Ez esetben a binomiális eloszlás helyett természetesen a polinomiális eloszlás lép fel, és a következő tételt nyerjük:

Legyen $f(x_1, \ldots, x_r)$ tetszőleges folytonos függvény a $0\leqq x_j\leqq 1$ $(j=1, 2, \ldots, r)$ r-dimenziós egységkockában; legyen

$$B_{n,r}(f, x_1, \ldots, x_r) = \sum_{\substack{k_1=0 \\ \sum_{j=1}^{r} k_j=n}}^{n} \cdots \sum_{k_r=0}^{n} f\left(\frac{k_1}{n}, \ldots, \frac{k_r}{n}\right) \frac{n!}{k_1!\ldots k_r!} x_1^{k_1}\ldots x_r^{k_r}.$$

Akkor

$$\lim_{n\to\infty} B_{n,r}(f, x_1, \ldots, x_r) = f(x_1, \ldots, x_r)$$

egyenletesen a $0\leqq x_j\leqq 1$ $(j=1, 2, \ldots r)$ r-dimenziós egységkockában.

A bizonyítás lépésről lépésre követi az egydimenziós esetet, felhasználva, hogy

$$\sum_{\substack{k_1=0 \\ \sum_{j=1}^{r} k_j=n}}^{n} \cdots \sum_{k_r=0}^{n} [(k_1-nx_1)^2+\ldots+(k_r-nx_r)^2] \frac{n!}{k_1!\ldots k_r!} x_1^{k_1}\ldots x_r^{k_r} = n\sum_{j=1}^{r} x_j(1-x_j).$$

2. §. A WIMAN-TÉTEL VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI BIZONYÍTÁSA

Második példánkként az egész függvények elmélete egy fontos tételének, *Wiman* tételének (l. [12], [13], [14]) P. C. *Rosenbloom* által nemrégiben adott valószínűségszámítási bizonyítását (l. [15]) ismertetjük. Ez ugyanis közvetlenül csatlakozik a Weierstrass-tétel az 1. §-ban ismertetett Bernstein-féle bizonyításához, amennyiben szintén csak a Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazását igényli.

Legyen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{2. 1}$$

egy tetszőleges, egész függvény,

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \qquad (r>0). \tag{2. 2}$$

$f(z)$ abszolút értékének maximuma a $|z|=r$ körön ($f(z)$ ún. maximum-modulus-függvénye) és

$$\mu(r) = \max_n |a_n| r^n \tag{2. 3}$$

a (2. 1) hatványsor tagjai abszolút értékének maximuma, ha $|z|=r$. Wiman 1914-ben bebizonyította, hogy minden pozitív $\varepsilon>0$-hoz megadható olyan B állandó, hogy ha $r \geqq B$, fennáll, az

$$M(r) < \mu(r)(\log \mu(r))^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \tag{2. 4}$$

egyenlőtlenség, kivéve, ha r egy E halmazba tartozik, ahol a kivételes r-értékek ezen E halmazának logaritmikus mértéke véges, vagyis

$$\int_E \frac{dr}{r} < +\infty. \tag{2. 5}$$

Bizonyítása igen bonyolult volt. Bizonyítási módszerét *Valiron* és *Pólya György* tovább fejlesztették és más rokon kérdésekre is alkalmazták, de az továbbra sem vált igazán egyszerűvé. Ezzel szemben a Wiman-tétel az alábbiakban ismertetésre kerülő, *Rosenbloom*tól származó valószínűségszámítási bizonyítása rendkívül egyszerű és frappáns.

Először is megjegyezzük, hogy a Wiman-tétel bizonyításánál az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az $f(z)$ egész függvény hatványsorának együtthatói mind valósak és nemnegatívak:

$$a_n \geqq 0 \qquad (n=0, 1, \ldots). \tag{2. 6}$$

Ha ugyanis (2. 1) egész függvény, akkor $f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n$ is egész függvény, és ha e függvény modulusát $M^*(r)$-rel, hatványsora tagjai abszolút értékének maximumát a $|z|=r$ körön $\mu^*(r)$-rel jelöljük, akkor $M(r) \leqq M(r^*)$ és $\mu(r) = \mu^*(r)$ Ha tehát a Wiman-tétel érvényes $f^*(z)$-re, akkor $f(z)$-re is érvényes. Így tehát feltehetjük, hogy (2. 6) teljesül, amely esetben

$$M(r) = f(r). \tag{2. 7}$$

Legyen $\xi(x)$ egy olyan valószínűségi változó, amelynek értékkészlete a nemnegatív egész számok halmaza, és valószínűségeloszlása

$$P(\xi(x) = n) = \frac{a_n e^{nx}}{f(e^x)} \qquad (-\infty < x < +\infty) \tag{2. 8}$$

Vezessük be a

(2. 9) $$G(x)=f(e^x)$$

és

(2. 10) $$g(x)=\log G(x)=\log f(e^x)$$

jelölést.

Egyszerű számolással adódik, hogy $\xi(x)$ várható értéke

(2. 11) $$\mathbf{M}(\xi(x)) = \frac{\sum_{n=1}^{n} na_n e^{nx}}{f(e^x)} = \frac{G'(x)}{G(x)} = g'(x)$$

továbbá, hogy $\xi(x)$ szórásnégyzete

(2. 12) $$\mathbf{D}^2(\xi(x)) = \mathbf{M}(\xi^2(x)) - \mathbf{M}^2(\xi(x)) = \frac{G''(x)}{G(x)} - \left(\frac{G'(x)}{G(x)}\right)^2 = g''(x).$$

(2. 12)-ből látszik, hogy $g''(x)>0$; ez egyébként speciális esetként következik *Hadamard* azon tételéből is, hogy $\log M(r)$ konvex függvénye $\log r$-nek.

Mármost alkalmazzuk $\xi(x)$-re a Csebisev-egyenlőtlenséget. Azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left(|\xi(x)-g'(x)| \geqq \lambda\sqrt{g''(x)}\right) \leqq \frac{1}{\lambda^2}$$

és így

(2. 13) $$\mathbf{P}\left(|\xi(x)-g'(x)| < \lambda\sqrt{g''(x)}\right) \geqq 1-\frac{1}{\lambda^2}.$$

Kiírva részletesen, ez azt jelenti, hogy

$$\sum_{|n-g'(x)|<\lambda\sqrt{g''(x)}} a_n e^{nx} \geqq \left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right) f(e^x)$$

és így, mivel $a_n e^{nx} \leqq \mu(e^x)$ és $f(e^x)=M(e^x)$, következik, ha λ-nak pl. a $\lambda=\sqrt{2}$ értéket választjuk, hogy

(2. 14) $$4\sqrt{2}\sqrt{g''(x)}\,\mu(e^x) \geqq M(e^x).$$

Mármost szükségünk lesz a következő, szinte triviális segédtételre:

Lemma. Ha $\delta>0$ és $g(x)$ egy tetszőleges, kétszer differenciálható, növekvő és konvex pozitív függvény a $c \leqq x < +\infty$ intervallumban és $g'(c)>0$, akkor azon $x \geqq c$ értékek halmaza, amelyekre

$$g''(x) > (g(x))^{1+\delta}$$

véges Lebesgue-mértékű.

A lemma bizonyítása. Legyen $\alpha=\sqrt{1+\delta}$ és jelölje A azon $x \geqq c$ értékek halmazát, amelyekre $g'(x)>(g(x))^\alpha$ továbbá B azon $x \geqq c$ értékek halmazát, amelyekre $g''(x)>(g'(x))^\alpha$. Nyilván, ha $x \geqq c$, sem az A, sem a B halmazhoz nem tartozik hozzá, akkor

$$g''(x) \leqq (g'(x))^\alpha \leqq (g(x))^{\alpha^2} = (g(x))^{1+\delta}.$$

Elegendő tehát bebizonyítani, hogy az A és B halmazok véges mértékűek. Azonban

$$\int_A dx + \int_B dx \leqq \int_c^\infty \frac{g'(x)\,dx}{(g(x))^\alpha} + \int_c^\infty \frac{g''(x)}{(g'(x))^\alpha}\,dx \leqq \int_{g(c)}^{+\infty} \frac{dy}{y^\alpha} + \int_{g'(c)}^{+\infty} \frac{dy}{y^\alpha},$$

amivel a lemma állítását már be is bizonyítottuk.

A lemmát alkalmazhatjuk a $g(x) = \log f(e^x)$ függvényre, a $c \leqq x < +\infty$ intervallumban, ahol c tetszőleges olyan valós szám, amelyre $f(e^c) > 1$. Így adódik, hogy egy véges mértékű D halmazhoz tartozó, kivételes x értékektől eltekintve

(2. 15) $$g''(x) < (g(x))^{1+\delta} = [\log M(e^x)]^{1+\delta},$$

tehát (2. 14)-ből kapjuk, hogy

(2. 16) $$M(e^x) \leqq 4\sqrt{2}\mu(e^x)(\log M(e^x))^{\frac{1+\delta}{2}} \quad \text{ha} \quad x \geqq c \quad \text{és} \quad x \notin D,$$

ahol $\int_D dx < +\infty$.

Legyen $r = e^x$. Jelölje E azon e^x pozitív számok halmazát, amelyekre $x \in D$. Mivel $\frac{dr}{dx} = \frac{1}{r}$, állításunk a következőképpen fogalmazható:

(2. 17) $$M(r) \leqq 4\sqrt{2}\mu(r)(\log M(r))^{\frac{1+\delta}{2}} \quad \text{hacsak} \quad r \geqq e^c$$

és $r \notin E$, ahol $\int_E \frac{dr}{r} < +\infty$.

Mármost minden $x > 1$-re $\log x < x$, tehát (2. 17)-ből

$$M(r) < 4\sqrt{2}\mu(r) M(r)^{\frac{1+\delta}{2}}$$

és így

(2. 18) $$M(r)^{\frac{1-\delta}{2}} < 4\sqrt{2}\mu(r).$$

(2. 17)-ből és (2. 18)-ból adódik

(2. 19) $$M(r) < 4\sqrt{2}\mu(r)\left(\frac{\log \mu(r) + \log 4\sqrt{2}}{\frac{1-\delta}{2}}\right)^{\frac{2}{1+\delta}} \quad \text{ha} \quad r \geqq e^c$$

és $r \notin E$.

Mivel $\mu(r) \to +\infty$, ha $r \to +\infty$, van olyan $d > 0$, hogy ha $r > d$, akkor $\log \mu(r) > \max\left(\log 4\sqrt{2}, \frac{4}{1-\delta}(4\sqrt{2})^{\frac{2}{1+\delta}}\right)$. Így tehát

(2. 20) $$M(r) < \mu(r)(\log \mu(r))^{\frac{2}{1+\delta}},$$

ha $r > \max(e^c, d)$ és $r \notin E$, ahol $\int_E \frac{dr}{r} < +\infty$; ezzel a Wiman-tételt bebizonyítottuk.

E bizonyítással persze ugyanaz a helyzet, mint a Weierstrass-tétel Bernstein-féle bizonyításával: el lehet mondani valószínűségszámítási interpretáció nélkül is, de a bizonyítás gondolatát a valószínűségszámítási interpretáción át lehet csak világosan megérteni.

Érdekes rámutatni, hogy *Rosenbloom* maga megjegyzi, hogy a bizonyítás ötletét *Hincsin*nek a kvantumstatisztikával kapcsolatos valószínűségszámítási vizsgálatai [16] adták neki.

3. §. HAYMAN EREDMÉNYEI EGÉSZ FÜGGVÉNYEK HATVÁNYSORÁRÓL

Az ebben a §-ban tárgyalt probléma közvetlenül kapcsolódik a 2. § témájához. Hayman tétele (l. [17]), amelyet be fogunk bizonyítani, azonban már megfogalmazásában is valószínűségszámítási jellegű, ugyanis bizonyos eloszlásoknak a normális eloszlásához való konvergenciájára vonatkozik. Hayman eredetileg azonban tételét nem valószínűségszámítási úton bizonyította. Mi itt egy Hayman tételéhez közelálló (bizonyos tekintetben erősebb, más tekintetben gyengébb feltételeket kikötő) tételre egy az övétől eltérő, valószínűségszámítási bizonyítást adunk.

A következő tételt fogjuk bebizonyítani:

2. tétel. Legyen

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \tag{3.1}$$

nemnegatív együtthatós, transzcendens egész függvény, amelynek neme 0, *és amelyre* $f(0)=1$, *vagyis amely előállítható*

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right) \tag{3.2}$$

alakban. Tegyük fel, hogy $f(z)$ *összes* z_n *gyökei a* $\operatorname{Re}(z)\leqq 0$ *félsíkban fekszenek, tehát* $\frac{\pi}{2}\leqq \arg z_n\leqq\frac{3\pi}{2}$. *Legyen*

$$g(x)=\log f(e^x), \tag{3.3}$$

továbbá

$$a(r)=g'(\log r)=\frac{d\log f(r)}{d\log r} \quad \text{és} \quad b(r)=g''(\log r)=\frac{d^2\log f(r)}{d(\log r)^2}, \tag{3.4}$$

akkor

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{f(r)}\sum_{n<a(r)+x\sqrt{b(r)}}a_nr^n=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du, \tag{3.5}$$

ha $-\infty<x<+\infty$, *feltéve, hogy*

$$\lim_{r\to\infty}b(r)=+\infty. \tag{3.6}$$

Bizonyítás. Feltevésünk szerint a z_n gyökök közül a valós gyökök negatívak, míg azok, amelyek nem valósak, konjugált komplex párokba sorolhatók, és így $f(z)$ felírható

$$f(z)=\prod_{k=1}\left(1+\frac{z}{\varrho_k}\right)\prod_{l=1}\left(1+\frac{2z}{R_l}\cos\theta_l+\frac{z^2}{R_l^2}\right) \tag{3.7}$$

alakban, ahol $\varrho_k > 0$ $(k=1, 2, \ldots)$ $R_l > 0$, $|\theta_l| \leqq \frac{\pi}{2}$ $(l=1, 2, \ldots)$ és a két szorzat közül legalább az egyik végtelen sok tényezőből áll. Ennélfogva

$$\text{(3. 8)} \qquad \frac{f(re^{it})}{f(r)} = \prod_{k=1} \left(\frac{\varrho_k + re^{it}}{\varrho_k + r} \right) \prod_{l=1} \left(\frac{R_l^2 + 2rR_l \cos\theta_l e^{it} + r^2 e^{2it}}{R_l^2 + 2rR_l \cos\theta_l + r^2} \right).$$

A (3. 8) jobb oldalán álló szorzat minden egyes tényezője egy-egy karakterisztikus függvény, mégpedig $\frac{\varrho_k + re^{it}}{\varrho_k + r}$ egy olyan $\xi_k(r)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye, amely a 0 és 1 értékeket veszi fel

$$\mathbf{P}(\xi_k(r) = 0) = \frac{\varrho_k}{\varrho_k + r}, \quad \mathbf{P}(\xi_k(r) = 1) = \frac{r}{\varrho_k + r}$$

valószínűségekkel, míg $\frac{R_l^2 + 2rR_l \cos\theta_l e^{it} + r^2 e^{2it}}{R_l^2 + 2rR_l \cos\theta_l + r^2}$ egy olyan $\eta_l(r)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye, amely a 0, 1 és 2 értékeket veszi fel

$$\mathbf{P}(\eta_l(r) = 0) = \frac{R_l^2}{S_l}, \quad \mathbf{P}(\eta_l(r) = 1) = \frac{2rR_l \cos\theta_l}{S_l}, \quad \mathbf{P}(\eta_l(r) = 2) = \frac{r^2}{S_l}$$

valószínűségekkel, ahol $S_l = R_l^2 + 2rR_l \cos\theta_l + r^2$. Tehát $f(re^{it})/f(r)$ egyenlő a $\zeta(r) = \sum_l \xi_k(r) + \sum_k \eta_l(r)$ összeg karakterisztikus függvényével, ha a $\xi_k(r)$, $\eta_l(r)$ változók függetlenek. Mármost nyilvánvaló, hogy ez esetben

$$\text{(3. 9)} \qquad \mathbf{M}(\zeta(r)) = a(r) \quad \text{és} \quad \mathbf{D}^2(\zeta(r)) = b(r),$$

ahol $b(r)$ kifejezhető

$$\text{(3. 10)} \qquad b(r) = \sum_k \frac{\varrho_k r}{(\varrho_k + r)^2} + \sum_l \frac{2rR_l \cos\theta_l)(R_l^2 + r^2) + 4R_l^2 r^2}{(R_l^2 + 2rR_l \cos\theta + r^2)^2}$$

alakban is. Könnyen belátható, hogy a $\zeta(r) = \sum_k \xi_k(r) + \sum_l \eta_l(r)$ összegekre $(r \to +\infty)$ teljesülnek a Ljapunov-tétel feltételei, hacsak $b(r) \to +\infty$. Ugyanis, ha η a 0, 1, 2 értékeket veheti csak fel, akkor $|\eta - \mathbf{M}(n)| \leqq 2$ és így

$$\mathbf{M}(|\eta - \mathbf{M}(\eta)|^3) \leqq 2\mathbf{D}^2(\eta),$$

tehát az

$$\text{(3. 11)} \qquad L(r) = \frac{[\sum_k \mathbf{M}(|\xi_k(r) - \mathbf{M}(\xi_k(r))|^3) + \sum_l \mathbf{M}(|\eta_l(r) - \mathbf{M}(\eta_l(r))|^3]^{\frac{1}{3}}}{D(\zeta(r))}$$

ún. Ljapunov-féle hányadosra érvényes a

$$\text{(3. 12)} \qquad L(r) \leqq \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{D(\varrho(r))}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{b(r)}}$$

egyenlőtlenség, és így a (3. 5) tétel állítása a Ljapunov-tételből következik.

Könnyen be lehet látni, hogy a (3. 6) feltétel teljesüléséhez elégséges (bár nem szükséges) az alábbi, kizárólag $f(z)$ gyökeinek abszolút értékeit tartalmazó feltétel:

$$\lim_{r\to+\infty}\left[\frac{1}{r}\Big(\sum_{\varrho_k<r}\varrho_k\Big)+\frac{1}{r^2}\Big(\sum_{R_l<r}R_l^2\Big)\right]=+\infty. \tag{3.13}$$

Megjegyezzük, hogy HAYMAN azon egész függvények összességét, amelyek a következő tulajdonsággal bírnak: $f(r)>0$, ha $r\geqq R_0\geqq 0$ és

$$f(re^{i\vartheta})\sim f(r)\,e^{i\vartheta a(r)-\frac{1}{2}\vartheta^2 b(r)},$$

ha $r\to\infty$ és $|\vartheta|\leqq\delta(r)$, továbbá

$$f(re^{i\vartheta})=\frac{o\big(f(r)\big)}{\sqrt{b(r)}}\quad\text{ha}\quad\delta(r)\leqq|\vartheta|\leqq\pi\quad\text{és}\quad r\to\infty,$$

admisszibilis-nek nevezi, és kimutatja, hogy a 2. tétel állítása minden admisszibilis egész függvényre érvényes.[1] A 0 nemű egész függvények közül azokra mutatja ki, hogy admisszibilisek (l. [17], 9. tétel), amelyek elég nagy pozitív r-re pozitívak és amelyek gyökei véges kivétellel a $\frac{\pi}{2}+\varepsilon<\arg z<\frac{3\pi}{2}-\varepsilon$ szögtérbe esnek egy alkalmas $\varepsilon>0$-val, és amelyekre teljesül a (3. 6) feltétel. A 2. tétel nemnegatív együtthatós hatványsorokra valamivel többet mond, mivel tételünk szerint elegendő feltenni, hogy $f(z)$ gyökei a $\operatorname{Re}(z)\leqq 0$ félsíkban fekszenek. (Véges sok kivételt ez esetben is meg lehet engedni.)

A 2. tétel alkalmazható például az

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n^\alpha}\right)$$

$\left(\frac{1}{\alpha}\text{-rendű}\right)$ függvényre, ahol $\alpha>1$, továbbá pl. az $f(z)=\prod\left(1+\frac{z}{e^{\sqrt{n}}}\right)$ 0-rendű függvényre, valamint az

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^\alpha}\right)$$

függvényre, ahol $\alpha>2$. A bizonyításból látható egyébként, hogy érvényes a tétel állítása az

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2}\right)=\frac{\sinh(\pi z)}{\pi z}$$

egész függvényre is (bár az nem 0-nemű); utóbbira $a(r)\sim b(r)\sim\pi r$.

HAYMAN eredményei közül megemlítjük még a következőt: ha $f(z)$ admisszibilis, akkor $e^{f(z)}$ is az.

Ebben az irányban itt csak annyit jegyzünk meg, hogy ha $f(z)$ tetszőleges nemnegatív együtthatós hatványsor (csak azt az esetet kell kizárni, ha $f(z)$ állandó), akkor az, hogy a 2. tétel állítása az $e^{f(z)}=F(z)$ függvényre is érvényes, valószínűségszámítási úton a következőképpen látható be: Legyen

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

[1] Hayman többet bizonyít be, mint (3.5)-öt, ugyanis ő a $h(r)$ valószínűségi változókra lokális határeloszlástételt ad.

és $\zeta(r)$ a 2. tétel bizonyításában szereplő valószínűségi változó, amelyre

$$\mathbf{P}(\zeta(r)=n)=\frac{a_n r^n}{f(r)} \qquad (n=0,1,\ldots).$$

Legyen

$$F(z)=e^{f(z)}=\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n,$$

akkor tehát

(3. 14) $$\left\{\frac{A_n r^n}{F(r)}\right\} \qquad (n=0,1,\ldots)$$

egy valószínűség-eloszlás. Legyenek $\zeta_1(r),\ldots,\zeta_k(r),\ldots$ a $\zeta(r)$ változó eloszlásával megegyező eloszlású független valószínűségi változók, ν a $\zeta_k(r)$ változóktól független, $f(r)$ várható értékű Poisson-eloszlású változó, amelyre tehát

$$\mathbf{P}(\nu=n)=\frac{(f(r))^n e^{-f(r)}}{n!} \qquad (n=0,1,\ldots).$$

Legyen

$$Z(r)=\sum_{k=1}^{\nu}\zeta_k(r),$$

akkor $Z(r)$ karakterisztikus függvénye

$$M(e^{itZ(r)})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(f(r))^n e^{-f(r)}}{n!}\left(\frac{f(re^{it})}{f(r)}\right)^n=\frac{e^{f(re^{it})}}{e^{f(r)}}=\frac{F(re^{it})}{F(r)},$$

vagyis $Z(r)$ eloszlása megegyezik a (3. 14) eloszlással. Ezen az alapon egyszerűen igazolható, hogy $Z(r)$ eloszlása határértékben normális; csak azt kell felhasználni, hogy feltevésünk szerint $\lim\limits_{r\to\infty} f(r)=+\infty$ Bevezetve ugyanis az $A(r)=rf'(r)$ és $B(r)=rf'(r)+r^2 f''(r)$ jelölést, könnyen belátható, hogy

$$\lim_{r\to+\infty}\mathbf{M}\left(e^{it\frac{Z(r)-A(r)}{\sqrt{B(r)}}}\right)=e^{-\frac{t^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

és így, ha $r\to+\infty$, akkor $\dfrac{Z(r)-A(r)}{\sqrt{B(r)}}$ eloszlása konvergál a standard normális eloszláshoz.

Speciálisan, ha $f(z)=z$, $F(z)=e^z$ és így érvényes a következő állítás:

(3. 15) $$\lim_{r\to\infty}\sum_{n<r+x\sqrt{r}}\frac{r^n e^{-r}}{n!}=\Phi(x) \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

A (3. 15) reláció azt a valószínűségszámításból jólismert tényt fejezi ki, hogy a λ várható értékű Poisson eloszlás konvergál a normális eloszláshoz, ha $\lambda\to+\infty$. (3. 15)-ből következik, hogy

(3. 16) $$\lim_{r\to\infty}\sum_{n<rt}\frac{r^n e^{-r}}{n!}=\begin{cases}0 & \text{ha } t<1\\ \frac{1}{2} & \text{ha } t=1\\ 1 & \text{ha } t>1.\end{cases}$$

Legyen $F(x)$ a $0 \leqq x < +\infty$ intervallumban definiált korlátos ingadozású függvény, $F(0)=0$ és

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x) \tag{4. 1}$$

az $F(x)$ függvény Laplace—Stieltjes transzformáltja: $g(s)$ nyilván értelmezve van és analitikus a $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ félsíkban; és ugyanitt

$$(-1)^n g^{(n)}(s) = \int_0^\infty x^n e^{-sx}\, dF(x). \tag{4. 2}$$

Legyenek $\lambda > 0$ és $t > 0$ tetszőleges pozitív számok, akkor tehát

$$\sum_{n<\lambda t} \frac{(-\lambda)^n g^{(n)}(\lambda)}{n!} = \int_0^\infty \left(\sum_{n<\lambda t} \frac{(\lambda x)^n e^{-\lambda x}}{n!} \right) dF(x). \tag{4. 3}$$

(3. 16)-ból leolvasható, hogy

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sum_{n<\lambda t} \frac{(\lambda x)^n e^{-\lambda x}}{n!} = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x > t \\ \frac{1}{2} & \text{ha} \quad x = t \\ 1 & \text{ha} \quad 0 \leqq x < t. \end{cases} \tag{4. 4}$$

Könnyen belátható hogy a határátmenet és az integráció felcserélhető, és így ha az $x = t$pontban $F(x)$ folytonos

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \sum_{n<\lambda t} \frac{(-\lambda)^n g^{(n)}(\lambda)}{n!} = \int_0^t dF(x) = F(t). \tag{4. 5}$$

Ilyen módon tehát a Laplace—Stieltjes transzformáció egyik jólismert inverziós formuláját nyertük, a Poisson eloszlásra vonatkozó (3. 16) relációból.

Legyen $F(x)$ abszolút folytonos, $F'(x) = f(x)$ és $f(x)$-ről tegyük fel, hogy a $[0, +\infty)$ intervallumban folytonos és korlátos. Akkor a (4. 1) által definiált $g(s)$ függvény a

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx \tag{4. 6}$$

alakban írható fel, és így $g(s)$ az $f(x)$ függvény Laplace-transzformáltja. (4. 6)-ból

$$\frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{t}\right)^n g^{(n-1)}\left(\frac{n}{t}\right)}{(n-1)!} = \int_0^\infty \frac{\left(\frac{n}{t}\right)^n x^{n-1} e^{-\frac{nx}{t}}}{(n-1)!} f(x)\, dx. \tag{4. 7}$$

Mármost ismeretes, hogy ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ t várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, vagyis $P(\zeta_k < y) = 1 - e^{-\frac{y}{t}}$ ha $y \geqq 0$ és $k = 1, 2, \ldots, n$ és a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ változók függetlenek, akkor $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ n-edrendű gamma-eloszlású valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $\dfrac{x^{n-1} e^{-\frac{x}{t}}}{t^n n!}$ ha $x > 0$.

Mármost a nagy számok gyenge törvénye szerint ζ_n/n sztochasztikusan konvergál t-hez; ennélfogva, ha $f(x)$ folytonos és korlátos függvény, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\left(f\left(\frac{\zeta_n}{n}\right)\right) = f(t). \tag{4.8}$$

Mivel a mondottak szerint

$$\mathbf{M}\left(f\left(\frac{\zeta_n}{n}\right)\right) = \int_0^\infty f(x) \frac{\left(\frac{n}{t}\right)^n x^{n-1} e^{-\frac{nx}{t}}}{(n-1)!}\, dx \tag{4.9}$$

a (4. 7), (4. 8) és (4. 9) képleteket összevetve azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n}{t}\right)^n (-1)^{n-1} g^{(n-1)}\left(\frac{n}{t}\right)}{(n-1)!} = f(t). \tag{4.10}$$

(4. 10) a Laplace-transzformáció jólismert ún. *Post—Widder-féle inverziós képlete*, amelyre tehát egy egyszerű valószínűségszámítási bizonyítást adtunk. (E bizonyítás megtalálható már [18]-ban. lásd továbbá [8] és [9].)

5. §. HILLE TÉTELE

E §-ban $f(x)$ az $x \geqq 0$ félegyenesen definiált folytonos és korlátos függvényt jelöl. Jelölje Δ_h a $h > 0$ differenciájú differencia-hányados képzés operátorát, vagyis legyen

$$\Delta_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{5.1}$$

és D a differenciálás operátorát, vagyis legyen

$$Df(x) = f'(x), \tag{5.2}$$

ha $f(x)$ differenciálható függvény.

Egy operátor n-edik hatványán értjük az operátor n-szeri egymásutáni alkalmazását. Így tehát a differenciaszámításból jólismert képlet szerint

$$\Delta_h^n f(x) = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+kh), \tag{5.3}$$

továbbá

$$D^n f(x) = f^{(n)}(x), \tag{5.4}$$

ha $f(x)$ n-szer differenciálható függvény ($n = 1, 2, \ldots$).

Véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok operátor konstans együtthatókkal képzett összegét a szokásos módon értelmezzük: Ha $A_1, \ldots, A_m, \ldots$ operátorok, $c_1, \ldots, c_m, \ldots$ konstansok

$$\left(\sum_k c_k A_k\right) f(x) = \sum_k c_k \cdot A_k f(x) \tag{5.5}$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló összeg konvergens. Minden A operátorra legyen

$A^0 = E$ az egységoperátor, amelyre $Ef(x) = f(x)$. Ha $g(x)$ analitikus függvény, melynek hatványsora

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{5.6}$$

és A egy operátor, a $g(A)$ operátort az

$$g(A) \cdot f(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n A^n \right) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n A^n f(x) \tag{5.7}$$

képlettel értelmezzük. Az (5. 5) definíció értelmében ha a valós szám,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n D^n f(x)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n f^{(n)}(x)}{n!} = f(x+a) \tag{5.8}$$

feltéve, hogy $f(x)$ analitikus az x pont egy az $x+a$ pontot tartalmazó környezetében.

(5. 7)-re való tekintettel (5. 8) felírható az

$$e^{aD} f(x) = f(x+a) \tag{5.9}$$

alakban is. Vegyük észre, hogy az e^{aD} operátor (5. 9) segítségével tetszőleges $f(x)$ függvényre értelmezhető, nemcsak analitikus függvényekre.

Ha $\{A_t\}$ operátorok a t paramétertől függő serege és A egy operátor, és az F függvényosztályhoz tartozó minden $f(x)$ függvényre érvényes (a pontonkénti konvergencia értelmében), hogy

$$\lim_{t \to t_0} A_t f(x) = Af(x), \tag{5.10}$$

akkor azt mondjuk, hogy az A_t operátorok az A operátorhoz konvergálnak, ha $t \to t_0$. Így például nyilvánvalóan fennáll, hogy

$$\lim_{h \to 0} \Delta_h f(x) = Df(x), \tag{5.11}$$

ha $f(x)$ differenciálható függvény. Tekintettel az (5. 9) relációra, felvetődik a kérdés, hogy igaz-e, hogy

$$\lim_{h \to 0} e^{a\Delta_h} f(x) = e^{aD} f(x), \tag{5.12}$$

mégpedig mivel e^{aD} nemcsak differenciálható függvényekre van értelmezve, kérdezhetjük, hogy igaz-e (5. 12) a differenciálás helyett $f(x)$-re vonatkozó enyhébb (pl. folytonossági) feltevés mellett is.

Alábbiakban bebizonyítjuk, hogy (5. 12) teljesül, ha $f(x)$ tetszőleges folytonos és korlátos függvény. (Ez Hille tétele.)

E célból először állítsuk elő explicit alakban $e^{a\Delta_h} f(x)$-et. (5. 3)-ból könnyen adódik, hogy

$$e^{a\Delta_h} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n \Delta_h^n f(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^k e^{-\frac{a}{h}}}{k!} f(x+kh). \tag{5.13}$$

Így tehát

$$e^{a\Delta_h} f(x) = \mathbf{M}(f(x + h\xi_{\frac{a}{h}})), \tag{5.14}$$

ahol ξ_λ egy λ várható értékű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Mivel $\mathbf{M}(\xi_\lambda)=\lambda$ és $\mathbf{D}(\xi_\lambda)=\sqrt{\lambda}$, tehát $h\xi_{\frac{a}{h}}$ sztochasztikusan tart a-hoz, és így

$$\lim_{h\to 0} e^{a\Delta_h} f(x) = \lim_{h\to 0} \mathbf{M}\big(f(x+h\xi_{\frac{a}{h}})\big) = f(x+a) = e^{aD} f(x).$$

Ezzel bebizonyítottuk Hille azon tételét, hogy ha $f(x)$ tetszőlegesen folytonos és korlátos függvény, és a pozitív szám, akkor

$$\lim_{h\to 0} e^{a\Delta_h} f(x) = e^{aD} f(x).$$

(A bizonyítást illetően lásd [18], [8], [9]).

Megvizsgálva, hogy a fenti bizonyításban tulajdonképpen mit használtunk ki, nem nehéz észrevenni, hogy a bizonyítási módszer a következő általánosabb tétel bizonyításához is elvezet.

3. tétel. Legyen $F(x)$ a $[0, +\infty)$ intervallumban definiált eloszlásfüggvény, amelynek

(5.15) $$g(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dF(t)$$

Laplace—Stieltjes transzformáltja az $s=0$ pont egy környezetében analitikus. Legyen $f(x)$ tetszőleges folytonos és korlátos függvény a valós tengelyen. Akkor

(5.16) $$\lim_{h\to 0} g(-\Delta_h) f(x) = g(-D) f(x).$$

Bizonyítás. Definíció szerint

(5.17) $$g(-D)f(x) = \left(\int_0^\infty e^{Dt}\, dF(t)\right) f(x) = \int_0^\infty f(x+t)\, dF(t).$$

Másrészt

(5.18) $$g(-\Delta_h)f(x) = \int_0^\infty e^{\Delta_h t}\, dF(t) = \int_0^\infty \left[\sum_{k=0}^\infty f(x+kh) \frac{\left(\frac{t}{h}\right)^k e^{-\frac{t}{h}}}{k!}\right] dF(t)$$

és így, ha ξ_λ egy λ várható értékű Poisson eloszlású valószínűségi változót jelöl, akkor

(5.19) $$g(-\Delta_h)f(x) = \int_0^\infty \mathbf{M}\big(f(x+h\xi_{\frac{t}{h}})\big)\, dF(t).$$

Mivel $h\xi_{\frac{t}{h}}$ sztochasztikusan tart t-hez, ha $h\to 0$ és $f(x)$ korlátos és folytonos függvény, minden x-re

(5.20) $$\lim_{h\to 0} \mathbf{M}\big(f(x+h\xi_{\frac{t}{h}})\big) = f(x+t).$$

Mivel $\mathbf{M}\big(f(x+h\xi_{\frac{t}{h}})\big)$ egyenletesen korlátos t-ben és h-ban, (5.20)-ból következik (5.16).

Megjegyzések. A 3. tételből speciális esetként kapjuk Hille tételét, ha az

$F(t)$ eloszlásfüggvény elfajult, $F(t)=0$, ha $0 \leqq t \leqq a$ és $F(t)=1$, ha $t>a$. További érdekes speciális eset a következő: Ha $F(t)=1-e^{-t}$, ha $0 \leqq t<+\infty$, akkor

$$g(s) = \frac{1}{1+s} = \sum_{n=0}^{\infty} (-s)^n$$

és így

$$g(-D)f(x) = \int_0^{\infty} f(x+t)e^{-t}\,dt.$$

Ez esetben

$$g(-\Delta_h)f(x) = \frac{h}{h+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(x+kh)}{(1+h)^k}.$$

Így tehát a 3. tétel szerint ha $f(x)$ folytonos és korlátos függvény

$$\lim_{h\to 0} h \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(x+kh)}{(1+h)^k} = \int_0^{\infty} f(x+t)e^{-t}\,dt.$$

Megjegyzendő, hogy ha $f(x)$ akárhányszor differenciálható és a $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}x$ sor konvergens, $\frac{1}{1-D} f(x)$ egyenlő e sor összegével.

6. §. HATVÁNYSOROK NEMFOLYTATHATÓSÁGA

E §-ban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy ha $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ komplex értékű független valószínűségi változók, az

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \tag{6.1}$$

véletlen hatványsor viselkedéséről, közelebbről konvergenciasugaráról és a konvergencia körén túl való folytathatóságáról mit lehet mondani. Mint látni fogjuk, ezúton igen érdekes, tisztán függvénytani jellegű eredményeket is lehet nyerni.

Az ilyen jellegű vizsgálatokat É. Borel [19] kezdeményezte még 1896-ban, azzal, hogy kimondta (nem egészen pontosan megfogalmazva) azt a sejtését, hogy egy véletlen együtthatójú hatványsor általában nem folytatható a konvergenciakörén túl, azaz a konvergenciakör a hatványsor által előállított függvénynek természetes határa. Ebben az irányban elsőnek H. Steinhaus [20] ért el eredményt, aki bebizonyította, hogy ha $\alpha_n = a_n e^{i\theta_n}$, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ egy pozitív számokból álló számsorozat, amelyre $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ véges pozitív szám, és a θ_n $(n=0, 1, \ldots)$ valószínűségi változók függetlenek és egyenletes eloszlásúak $(0, 2\pi)$-ben, akkor (6. 1) 1 valószínűséggel nem folytatható az R sugarú körön túl, vagyis az $f(z)$ függvénynek a $|z|=R$ körvonal a *természetes határa.* Paley és Zygmund [21] bebizonyították ugyanezt az állítást azon feltevés mellett, hogy $\alpha_n = a_n \cdot \xi_n$, ahol $\{a_n\}$ tetszőleges komplex számokból álló számsorzat, amelyre $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ pozitív véges szám és ξ_n $(n=1, 2, \ldots)$ a $\pm$ értékeket $\frac{1}{2}$ valószínűséggel felvevő független valószínűségi változók. Jelölje $R_n(x)$ az n-edik Rademacher függvényt, vagyis legyen

(6. 2) $$R_n(x) = \text{sign}(\sin 2^n \pi x) \qquad (n=0, 1, \dots; \ 0 \leqq x \leqq 1)$$

és legyen

(6. 3) $$f(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R_n(x) z^n.$$

Paley és Zygmund tételét úgy is ki lehet mondani, hogy azon x-ek halmaza, amelyekre $f(x, z)$ folytatható az R sugarú körön túl, zérus mértékű. E tételből következik, hogy *egy tetszőleges véges R konvergenciasugarú hatványsort lehet úgy előjelezni, hogy az eredményként kapott hatványsor ne legyen folytatható az R sugarú körön túl.* FATOU-nak ezt a sejtését először HURWITZ és PÓLYA GYÖRGY bizonyították be l.[40]

Ez utóbbi állítás már tisztán függvénytani jellegű.

Könnyű észrevenni, hogy Borel sejtése teljes általánosságban nem igaz; így például az

(6. 4) $$f(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{R_n(x)}{2^n}\right) z^n$$

hatványsor konvergenciasugara minden x-re 1, de a függvény folytatható a $|z| < 2$ körbe. E példa alapján D. BLACKWELL Borel sejtését a következőképpen módosította: Ha $\{\alpha_n\}$ független valószínűségi változók egy sorozata, akkor megadhatók olyan b_n állandók, hogy a

(6. 5) $$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n - b_n) z^n$$

hatványsor 1 valószínűséggel nem folytatható a konvergencia körén túl, és a (6. 5) sor konvergencia sugara legalább akkora mint a $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ hatványsoré.

A (6. 4) ellenpéldát ez a módosítás nyilván eliminálja, ugyanis ha $\alpha_n = 1 + \frac{R_n(x)}{2^n}$, és $b_n = 1$ $(n=0, 1, \dots,$ akkor a

(6. 6) $$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n - b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x) \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

hatványsor konvergenciasugara minden x-re 2 és a PALEY—ZYGMUND-tétel szerint a (6. 6) hatványsor majdnem minden x-re nem folytatható e körön túl.

C. RYLL-NARDZEWSKI 1953-ban bebizonyította [22], hogy Blackwell ezen sejtése valóban igaz.

J. P. KAHANE [23[bebizonyította, hogy abban az esetben, ha az α_n együtthatók eloszlása szimmetrikus a 0 pontra (abban az értelemben, hogy $-\alpha_n$ és α_n egyforma eloszlásúak), akkor Borel sejtése az eredeti alakban igaz, vagyis ez esetben Ryll—Nardzewsky tételében az a_n állandó minden n-re zérusnak választható. Kahane e tétele nyilvánvalóan speciális esetként tartalmazza Steinhaus és Paley—Zygmund tételeit, valamint pl. a következő állítást: θ_n vegye fel $1/N_n$ valószínűséggel a $2\pi \frac{k}{N_n}$ értékeket $(k=0, 1, \dots, N_n - 1)$ és a θ_n változók legyenek függetlenek. Legyen

(6. 7) $$\alpha_n = a_n e^{i\theta_n}$$

és

(6. 8) $$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R};$$

akkor a (6. 1) hatványsor 1 valószínűséggel nem folytatható az R sugarú körön túl.

Alábbiakban előbb KAHANE tételét bizonyítjuk be, azután megmutatjuk, hogy ebből már következik RYLL-NARDZEWSKI tétele.*

Először bebizonyítjuk, hogy a (6. 1) véletlen hatványsor konvergenciasugara 1 valószínűséggel állandó. A (6. 1) hatványsor konvergenciasugarát ϱ-val jelölve

$$\varrho = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\alpha_n|}\right)^{-1} = R(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots). \tag{6. 9}$$

ϱ általában egy valószínűségi változó. Az $R(x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots)$ végtelen sok változós függvény nyilván változóinak Baire függvénye és azzal a tulajdonsággal bír, hogy véges sok x_k értéket megváltoztatva a függvény értéke nem változik meg.

Így tehát alkalmazható KOLMOGOROV ún. nulla-vagy-egy törvénye, és így azt kapjuk, hogy ϱ értéke 1 valószínűséggel állandó; legyen ez az állandó érték R, akkor tehát (6. 1) konvergenciakörének sugara 1 valószínűséggel R. Feltesszük most, hogy $0 < R < +\infty$, egyébként ugyanis a tétel állítása semmitmondó. Bebizonyítjuk most a következő állítást. Az R sugarú kör egy tetszőleges $Z_1 = Re^{i\theta_1}$ rögzített pontjában a (6. 1) hatványsor által előállított függvény vagy 1 valószínűséggel reguláris, vagy 1 valószínűséggel szinguláris. E célból fejtsük sorba a (6. 1) függvényt a $Z_0 = \frac{z_1}{2}$ pont körül. Bevezetve a $Z = Z_0 + \zeta$ jelölést,

$$f(z) = f(z_0+\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z_0+\zeta)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \zeta^k, \tag{6. 10}$$

ahol

$$\beta_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} z_0^{n-k} \alpha_n. \tag{6. 11}$$

Így a (6. 10) sor konvergenciasugarát r_{z_1}-el jelölve

$$r_{z_1} = \left(\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|\beta_k|}\right)^{-1}. \tag{6. 12}$$

Mármost r_{z_1} felfogható, mint az $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ változók függvénye:

$$r_{z_1} = S(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots),$$

ahol

$$S(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) = \left(\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} z_0^{n-k} x_n\right|}\right)^{-1}.$$

$S(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ nyilván változóinak Baire-függvénye, amelynek értéke nem változik meg, ha az x_k változók közül véges soknak az értékét megváltoztatjuk, hiszen $\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} z_0^{n-k} x_n$ nem függ a k-nál kisebb j indexű x_j -ktől. Így tehát alkalmazható a nulla-vagy-egy törvény és így r_{z_1} valószínűséggel egyenlő egy R_{z_1} állandóval. Mármost két eset lehetséges: vagy $R_{z_1} = \frac{R}{2}$ vagy $R_{z_1} > \frac{R}{2}$ ($R_{z_1} < \frac{R}{2}$ nyilván nem

* Ujabban *Kahane* is észrevette, hogy tételéből *Ryll-Nardzewski* általánosabb tétele levezethető; sajtó alatt levő könyvében (l. [39]) már így bizonyítja *Ryll-Nardzewski* tételét.

lehetséges, hiszen a $|z-z_0|<\frac{R}{2}$ kör teljes egészében benne van a $|z|<R$ körben). Ha $R_{z_1}=R$, akkor a z_1 pontban $f(z)$ szinguláris, feltéve, hogy $\varrho=R$ és $\varrho_{z_1}=R_{z_1}$, tehát 1 valószínűséggel, hiszen egy hatványsor konvergenciakörének kerületén van legalább egy szinguláris pontja az előállított függvénynek és a $|z-z_0|=\frac{R}{2}$ körnek az összes z_1-től különböző pontjai a $|z|=R$ kör belsejében fekszenek, tehát nem lehetnek szinguláris pontok. Ha viszont $R_{z_1}>\frac{R}{2}$, akkor a z_1 pontban $f(z)$ 1 valószínűséggel reguláris, hiszen ez esetben z_1 1 valószínűséggel belső pontja a (6. 10) hatványsor konvergenciakörének. Mármost kimutatjuk, hogy ha α_n és $-\alpha_n$ egyforma eloszlásúak, az utóbbi lehetőség egyetlen z_1-re sem következhet be. Tegyük fel ugyanis, hogy a $z_1=Re^{i\theta_1}$ pontban a (6. 1) függvény 1 valószínűséggel reguláris volna; ez esetben, mint láttuk, tehát $R_{z_1}>\frac{R}{2}$ és így megadható egy $\theta_1-\frac{\pi}{N}\leqq\theta\leqq$ $\leqq\theta_1+\frac{\pi}{N}$ intervallum, ahol N egy elegendő nagy rögzített természetes egész szám, úgy, hogy a (6. 1) függvény a $z=Re^{i\theta}$, $\theta_1-\frac{\pi}{N}\leqq\theta\leqq\theta_1+\frac{\pi}{N}$ íven 1 valószínűséggel mindenütt reguláris.

Vizsgáljuk most a (6. 1) hatványsor helyett az

$$f_k(z)=\sum_{n\not\equiv k \bmod N}\alpha_n z^n-\sum_{n\equiv k \bmod N}\alpha_n z^n \tag{6. 13}$$

hatványsorokat ($k=0, 1, \ldots, N-1$). Mivel $f_k(z)$ hatványsorában z^n együtthatója minden n-re vagy α_n (ha $n\not\equiv k \bmod N$), vagy $-\alpha_n$ (ha $n\equiv k \bmod N$), tehát $f_k(z)$ minden egyes együtthatója ugyanolyan eloszlású, mint $f(z)$ megfelelő együtthatója. Ennélfogva az $f_k(z)$ függvény 1 valószínűséggel ugyanolyan tulajdonságokkal bír, mint az $f(z)$ függvény, tehát az $f_k(z)$ függvény is 1 valószínűséggel reguláris lesz a $z=Re^{i\theta}$, $\theta_1-\frac{\pi}{N}\leqq\theta\leqq\theta_1+\frac{\pi}{N}$ íven; így az

$$g_k(z)=\frac{f(z)-f_k(z)}{z^k}=2\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{Nj+k}Z^{Nj} \tag{6. 14}$$

hatványsor is reguláris lesz az említett íven. Azonban

$$g_k\left(ze^{\frac{2\pi ir}{N}}\right)=g_k(z) \qquad (r=1, 2, \ldots, N-1)$$

és így $g_k(z)$ reguláris lesz a teljes R sugarú körön, tehát konvergenciasugara nagyobb lesz, mint R.

Mivel ez k minden értékére igaz, ($k=0, 1, \ldots, N-1$) tehát a

$$\sum_{k=0}^{N-1}z^k g_k(z)$$

függvény is reguláris lesz egy $R'>R$ sugarú körben. Mivel azonban

$$\sum_{k=0}^{N-1}z^k g_k(z)=2f(z) \tag{6. 15}$$

ebből következik, hogy $f(z)$ is reguláris az $R' > R$ sugarú körben, ami viszont ellentmond R definíciójának. Így tehát ellentmondásra vezet az a feltevés, hogy van olyan z_1, amelyre $R_{z_1} > \frac{R}{2}$; ezzel bebizonyítottuk, hogy a $|z| = R$ kör kerületének minden pontja 1 valószínűséggel szinguláris pontja $f(z)$-nek. Vegyünk most a $|z| = R$ körön egy tetszőleges megszámlálható és mindenütt sűrű pontsorozatot. Akkor 1 valószínűséggel $f(z)$-nek ezen pontok mind egyidejűleg szinguláris pontjai, tehát $f(z)$-nek a $|z| = R$ kör 1 valószínűséggel természetes határa. Ezzel KAHANE tételét bebizonyítottuk.

Most bebizonyítjuk RYLL-NARDZEWSKI tételét. Az α_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ valószínűségi változók legyenek az $\mathscr{F} = [\Omega, \mathscr{A}, P]$ valószínűségi mezőn értelmezve, vagyis legyen $\alpha_n = \alpha_n(\omega)$ ahol $\omega \in \Omega$. Legyen $\mathscr{F}^* = [\Omega^*, \mathscr{A}^*, P^*]$ egy $\mathscr{F}$-fel izomorf másik valószínűségi mező és legyenek $\alpha_n^* = \alpha_n^*(\omega^*)$ az α_n-nek megfelelő valószínűségi változók: akkor tehát α_n^* ugyanolyan eloszlású, mint α_n és az α_n^* változók is függetlenek. Tekintsük most az $\mathscr{F}$ és $\mathscr{F}^*$ valószínűségi mezők direkt szorzatát, és azon a $\delta_n = \alpha_n(\omega) - \alpha_n(\omega^*)$ valószínűségi változókat. A δ_n $(n = 0, 1, \ldots)$ valószínűségi változók nyilván függetlenek és szimmetrikus eloszlásúak lesznek.

Így tehát KAHANE tétele alkalmazható a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n z^n \tag{6. 16}$$

véletlen hatványsorra, tehát ha $r = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\delta_n|}\right)^{-1}$, akkor a (6. 16) által definiált függvény 1 valószínűséggel nem folytatható a $|z| = r$ sugarú körön túl. (Könnyen belátható, hogy $r \geqq R$.) Ez azt jelenti, hogy azon (ω, ω^*) pontok halmazának mértéke, amelyekre a (6. 16) függvénynek a $|z| = r$ kör a természetes határa, a szorzattérben 1-gyel egyenlő. Így tehát (Fubini tétele szerint) majdnem minden rögzített ω^*-ra (Ω^*-ban) a (6. 16) sornak majdnem minden ω-ra a $|z| = r$ kör a természetes határa. Ha tehát ω^* egy az említett tulajdonságú rögzített elem és $a_n = \alpha_n^*(\omega^*)$, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n - a_n) z^n \tag{6. 17}$$

sornak a $|z| = r \geqq R$ kör 1 valószínűséggel a természetes határa. Ezzel RYLL-NARDZEWSKI tételét bebizonyítottuk.

Újabban L. ARNOLD [24] hasonló eredményeket bizonyított be véletlen egész függvényekre.

Legyenek α_n $(n = 0, 1, \ldots)$ független valószínűségi változók és legyen (1 valószínűséggel)

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = 0. \tag{6. 18}$$

Akkor a (6. 1) véletlen hatványsor 1 valószínűséggel egész függvényt állít elő. Az $f(z)$ egész függvény ϱ rendje nyilván 1 valószínűséggel állandó lesz, hiszen egy ismert képlet szerint (lásd [27])

$$\varrho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|\alpha_n|}} \tag{6. 19}$$

és így a nulla-vagy-egy törvényből következik, hogy 1 valószínűséggel ϱ állandó. (Persze ez az állandó érték $+\infty$ is lehet!)

Tegyük fel, hogy az $f(z)$ véletlen egész függvény rendje 1 valószínűséggel a *véges* ϱ számmal egyenlő. Ez esetben $f(z)$ *típusa* a

$$\tau = \frac{1}{e\varrho} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\sqrt[n]{|\alpha_n|^\varrho} \tag{6.20}$$

képlettel határozható meg, így tehát a nulla-vagy-egy törvény szerint τ is 1 valószínűséggel állandó. Ha az α_n együtthatók valószínűségeloszlásáról konkrét feltevéseket teszünk, a ϱ és τ értékeket explicite kiszámíthatjuk. Így pl. ARNOLD megmutatta, hogy ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} z^n, \tag{6.21}$$

ahol $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots$ független valószínűségi változók, abszolút értékeik egyforma eloszlásúak, és közös

$$F(x) = \mathbf{P}(\gamma_n < x) \tag{6.22}$$

eloszlásfüggvényük eleget tesz az

$$\int_0^{\infty} (1 - F(x^x))\, dx < +\infty \tag{6.23}$$

feltételnek, akkor $f(z)$ 1 valószínűséggel elsőrendű egész függvény, amelynek típusa 1 valószínűséggel 1-gyel egyenlő, ha $\int_1^{\infty} \log x\, dF(x)$ véges és $+\infty$-nel, ha $\int_1^{\infty} \log x\, dF(x) = +\infty$.

E kérdéskörben számos probléma vár még megoldásra.

7. §. EGYENLETESEN, DE NEM ABSZOLÚT KONVERGENS HATVÁNYSOROK

Legyen a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{7.1}$$

hatványsor konvergenciaköre az egységkör. Tegyük fel, hogy a (7. 1) sor magán az egységkörön is konvergens, mégpedig egyenletesen. Ez a helyzet természetesen, ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty, \tag{7.2}$$

vagyis ha a (7. 1) sor az egységkörön abszolút konvergens. H. BOHR vetette fel a kérdést 1910-ben, hogy a (7. 2) feltétel szükséges-e ahhoz, hogy (7. 1) egyenletesen konvergáljon, ha $|z| = 1$, vagyis hogy *létezik-e olyan hatványsor, amely az egységkörön egyenletesen konvergens, de nem abszolút konvergens?*

FEJÉR LIPÓT azt sejtette, hogy a $\sqrt{1-z}\,e^{\frac{1}{z-1}}$ függvény hatványsora rendelkezik ezzel a tulajdonsággal; RIESZ MARCELL bebizonyította, hogy ez valóban így van. Később G. H. HARDY és maga FEJÉR LIPÓT más, egyszerűbb példákat adtak erre (lásd [25]). A. ZYGMUND viszont bebizonyította [26], hogy Hadamard-hézagos hatványsoroknál ez a jelenség nem léphet fel, amennyiben kimutatta, hogy ha $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq q > 1$, akkor a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k} \tag{7.3}$$

hatványsor csak úgy lehet konvergens a $|z|=1$ egységkör minden pontjában, ha abszolút konvergens, vagyis ha a (7. 2) teljesül.

G. PIRANIAN vetette fel a kérdést, hogy természetes számok mely $\{n_k\}$ sorozataira létezik olyan $\{a_k\}$ számsorozat, amelyre $\sum |a_k| = +\infty$, azonban a (7. 3) sor ennek ellenére egyenletesen konvergens, ha $|z|=1$. Ez irányban a legmesszebbmenő eredményt ERDŐS PÁL érte el [28], aki valószínűségszámítási módszerrel bebizonyította, hogy ahhoz, hogy létezzék olyan (7. 3) alakú hatványsor, amely az egységkörön egyenletesen konvergens, de amelyre $\sum |a_k| = +\infty$, elegendő feltenni, hogy az n_k számok eleget tesznek az alábbi feltételnek: Megadható egy olyan $j_1 < j_2 < \ldots < \ldots < j_r < \ldots$ számsorozat, hogy

$$\liminf_{r\to\infty} \sqrt[r]{n_{j_r+r} - n_{j_r}} = 1. \tag{7.4}$$

A (7. 4) feltétel teljesül például, ha

$$\liminf_{k\to+\infty} \sqrt[k]{n_k} = 1. \tag{7.5}$$

Ugyanis ez esetben van olyan k_h $(h=1, 2, \ldots)$ számsorozat, hogy $k_h \to +\infty$ és

$$\lim_{h\to\infty} \sqrt[k_h]{n_{k_h}} = 1. \tag{7.6}$$

Válasszunk egy r számot a $\left[\frac{k_h}{3}, \frac{2k_h}{3}\right]$ intervallumban, azaz legyen $\frac{k_h}{3} \leqq r < \frac{2k_h}{3}$ és legyen $j_r = k_h - r$, akkor

$$\sqrt[r]{n_{j_r+r} + n_{j_r}} \leqq \sqrt[r]{n_{j_r+r}} = \sqrt[r]{n_{k_h}} \leqq \left(\sqrt[k_h]{n_{k_h}}\right)^3,$$

tehát (7. 6) miatt (7. 4) teljesül. A (7. 4) feltétel azonban (7. 5)-nél jóval kevesebbet kíván meg. Teljesül például (7. 4), ha az $\{n_k\}$ számsorozat a következő:

$$3;\ 17, 18;\ 513, 514, 515;\ \ldots;\ 2^{r^2}+1, 2^{r^2}+2, \ldots, 2^{r^2}+r;\ \ldots. \tag{7.7}$$

E sorozatra (7. 5) nem teljesül, mivel

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{n_k} = 4.$$

A (7. 4) feltétel viszont teljesül, hiszen a sorozat k-adik tagja a következőképpen állítható elő:

$$n_k = 2^{r^2} + k - \binom{r}{2} \quad \text{ha} \quad \binom{r}{2} < k \leqq \binom{r+1}{2}, \qquad r = 1, 2, \ldots,$$

tehát ha $j_r = \binom{r+1}{2} + 1$, akkor

$$n_{j_r+r} = n_{\binom{r+2}{2}} = 2^{(r+1)^2} + r + 1 \quad \text{és} \quad n_{j_r} = 2^{(r+1)^2} + 1,$$

tehát

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{n_{j_r+r} - n_{j_r}} = \lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{r} = 1.$$

Erdős tételének bizonyítási módszere sok más rokon problémában is jól alkalmazhatónak bizonyult, ezért alábbiakban részletesen ismertetjük Erdős tételének bizonyítását.* Abból a célból, hogy a bizonyítás alapgondolata minél jobban kidomborodjék, a tételt nem teljes általánosságban, hanem csak a (7. 7) alatti speciális sorozatra ismertetjük. Az általános eset lényegében ugyanúgy tárgyalható.

A bizonyításhoz szükségünk lesz a következő — önmagában is érdekes — valószínűségszámítási segédtételre.**

Lemma. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, amelyek a ± 1 értékeket $\frac{1}{2}$ valószínűséggel veszik fel. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Akkor

$$\mathbf{P}\left(\operatorname*{Max}_{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^{ik\varphi} \right| \geqq 4\sqrt{(5+\varepsilon) n \log n} \right) < \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}, \tag{7. 8}$$

ha $n \geqq n_0$.

A lemma bizonyítása. A Markov-egyenlőtlenség szerint, ha $b_1, b_2, \dots, b_n$ tetszőleges valós számok, melyekre $|b_k| \leqq 1$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ továbbá $\delta > 0$ és $A > 0$ tetszőleges pozitív számok,

$$\mathbf{P}\left(\left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k \right| \geqq A \right) = 2\mathbf{P}\left(e^{\delta \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k} > e^{\delta A} \right) \leqq 2\mathbf{M}\left(e^{\delta \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k} \right) e^{-\delta A}. \tag{7. 9}$$

Másrészt a ξ_k változók függetlensége miatt

$$\mathbf{M}\left(e^{\delta \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k} \right) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{\delta b_k} + e^{-\delta b_k}}{2} \right). \tag{7. 10}$$

Mivel $2k! \geqq 2^k \cdot k!$ $(k = 0, 1, \dots)$, tehát

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!} \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2/2)^k}{k!} = e^{\frac{x^2}{2}}. \tag{7. 11}$$

Ennélfogva (7. 10)-ből

$$\mathbf{M}\left(e^{\delta \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k} \right) \leqq e^{\frac{\delta^2}{2} \sum_{k=1}^{n} b_k^2} \tag{7. 12}$$

* E bizonyítás gondolatmenete azonos *Erdős* eredeti bizonyításával, azonban részleteiben valamivel egyszerűbb.

** A segédtétel bizonyításának módszere azonos a Csebisev-féle egyenlőtlenség Bernstein-féle élesítésének (1. [8], 319—321. o.) bizonyításával, azonban a minket itt érdeklő speciális esetre a tétel valamivel egyszerűbben bizonyítható, mint az általános esetben, ezért közöljük itt a bizonyítást. Egyébként a segédtételhez hasonló, komplex értékű valószínűségi változókra vonatkozó Bernstein-típusú egyenlőtlenségek szerepelnek a [31], [34] és [38] dolgozatokban is.

és így $A=\frac{\lambda}{2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$, $\delta=\frac{\lambda}{2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}}$ helyettesítéssel, (ahol $\lambda>0$), azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k b_k\right|>\frac{\lambda}{2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)\leqq 2e^{-\frac{\lambda^2}{8}}. \tag{7.13}$$

Mármost legyen φ tetszőleges rögzített érték ($0\leqq\varphi\leqq 2\pi$), akkor

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi}\right|\leqq 2\max\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\cos k\varphi\right|,\ \sum_{k=1}^{n}\xi_k\sin k\varphi\right)$$

és így

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi}\right|>\lambda\sqrt{n}\right)\leqq \tag{7.14}$$

$$\leqq\mathbf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\cos k\varphi\right|>\frac{\lambda}{2}\sqrt{n}\right)+\mathbf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\sin k\varphi\right|>\frac{\lambda}{2}\sqrt{n}\right).$$

Mivel $\sum_{k=1}^{n}\cos^2 k\varphi\leqq n$ és $\sum_{k=1}^{n}\sin^2 k\varphi\leqq n$, (7. 13)-ból és (7. 14)-ből azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi}\right|>\lambda\sqrt{n}\right)\leqq 4e^{-\frac{\lambda^2}{8}}. \tag{7.15}$$

Alkalmazzuk most a (7. 15) egyenlőtlenséget a $\varphi=\varphi_j=\frac{2\pi j}{N}$ értékekre ($j=0, 1, \ldots, N-1$); azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left(\max_{0\leqq j\leqq N-1}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi_j}\right|>\lambda\sqrt{n}\right)\leqq 4Ne^{-\frac{\lambda^2}{8}}. \tag{7.16}$$

Ha $\varphi_j<\varphi<\varphi_j+1$, akkor

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi}-\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi_j}\right|\leqq\frac{2\pi n^2}{N}.$$

Így tehát

$$\max_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi}\right|\leqq\frac{2\pi n^2}{N}+\max_{0\leqq j\leqq N-1}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi_j}\right|$$

és ezért (7. 16)-ból

$$\mathbf{P}\left(\max_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi}\right|>\lambda\sqrt{n}+\frac{2\pi n^2}{N}\right)\leqq 4Ne^{-\frac{\lambda^2}{8}}. \tag{7.17}$$

Legyen

$$\frac{2\pi n^{\frac{3}{2}}}{\lambda}\leqq N<\frac{2\pi n^{\frac{3}{2}}}{\lambda}+1, \tag{7.18}$$

akkor tehát

$$\mathbf{P}\left(\max_{0\leqq\varphi\leqq 2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e^{ik\varphi}\right|>2\lambda\sqrt{n}\right)\leqq\left(\frac{8\pi n^{\frac{3}{2}}}{\lambda}+4\right)e^{-\frac{\lambda^2}{8}}. \tag{7.19}$$

λ helyébe a $\lambda = 2\sqrt{(5+2\varepsilon)\log n}$ értéket helyettesítve, kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left(\max_{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^{ik\varphi} \right| > 4\sqrt{(5+2\varepsilon) n \log n}\right) \leqq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}},$$

ha $\dfrac{4\pi}{\sqrt{5\log n}} + \dfrac{4}{n^{\frac{3}{2}}} < 1$, vagyis ha $n \geqq n_0$.

Ezzel lemmánkat bebizonyítottuk.

Mármost vizsgáljuk az

(7.20) $$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \sum_{k=2^{r^2}+1}^{2^{r^2}+r} \xi_k z^k$$

véletlen hatványsort, ahol a ξ_k valószínűségi változók függetlenek és a $\pm$ értékeket $\frac{1}{2}$ valószínűséggel veszik fel. Más szóval legyen

$$\alpha_k = \begin{cases} \dfrac{\xi_k}{r^2}, & \text{ha } \quad 2^{r^2}+1 \leqq k \leqq 2^{r^2}+r;\ r = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ez esetben

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} = +\infty,$$

tehát a (7. 20) alatti hatványsor nem abszolút konvergens az egységkörön. Másrészt $f(z)$ nyilván felírható az

(7.21) $$f(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{z^{2^{r^2}}}{r^2} Q_r(z)$$

alakban, ahol

(7.22) $$Q_r(z) = \sum_{j=1}^{r} z^j \xi_{2^{r^2}+j}.$$

Ilymódon lemmánk szerint, ha $r \geqq n_0$

(7.23) $$\mathbf{P}\left(\operatorname*{Max}_{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi} |Q_r(e^{i\varphi})| > 4\sqrt{(5+2\varepsilon) r \log r}\right) < \frac{1}{r^{1+\varepsilon}}.$$

Tehát a Borel—Cantelli lemma szerint 1 valószínűséggel véges sok r kivételével érvényes a

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi} |Q_r(e^{i\varphi})| \leqq 4\sqrt{(5+2\varepsilon) r \log r}$$

egyenlőtlenség és így a

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\operatorname*{Max}_{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi} |Q_r(e^{i\varphi})|}{r^2}$$

sor 1 valószínűséggel konvergens, hiszen tagjai 1 valószínűséggel valahonnan kezdve kisebbek a

$$4\sqrt{5+2\varepsilon} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\log r}}{r^{\frac{3}{2}}}$$

konvergens numerikus sor megfelelő tagjainál. Másrészt viszont, ha $2^{s^2} \leqq M < 2^{(s+1)^2}$

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi} \left| \sum_{k=M}^{\infty} \alpha_k e^{ik\varphi} \right| \leqq \frac{1}{s} + \sum_{r=s+1}^{\infty} \frac{\operatorname{Max} |Q_s(e^{i\varphi})|}{s^2}.$$

Tehát a (7. 22) sor 1 valószínűséggel egyenletesen konvergál a $|z| = 1$ körön.

Tehát a (7. 22) hatványsor 1 valószínűséggel bír azzal a tulajdonsággal, hogy az egységkörön egyenletesen konvergens, de nem abszolút konvergens. Így tehát léteznek a kívánt tulajdonságú hatványsorok, ha $\{n_k\}$ a (7. 22) alatti számsorozat. Ezzel Erdős tételét a szóban forgó speciális esetre bebizonyítottuk. Mint fentebb hangsúlyoztuk, az általános esetben a bizonyítás lényegében ugyanígy végezhető el.

8. §. HATVÁNYSOROK SZINGULÁRIS SUGARAIRÓL

E §-ban az egységkörben reguláris és ott nem korlátos analitikus függvények D osztályával foglalkozunk. Ha $f(z)$ ilyen függvény, és φ egy rögzített értékére $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$ $f(z)$ semmilyen pozitív ε-ra nem korlátos a $\varphi - \varepsilon \leqq \arg z \leqq \varphi + \varepsilon$, $|z| < 1$ szögtérben, akkor a $z = re^{i\varphi}$ $(0 < r < 1)$ sugarat ($f(z)$-re nézve) *szinguláris sugár*nak, ellenkező esetben *reguláris sugár*nak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy minden D-beli $f(z)$ függvénynek van legalább egy szinguláris sugara. D. GAIER és W. MEYER-KÖNIG, akik e fogalmat bevezették [29], megmutatták, hogy ha a D osztályba tartozó $f(z)$ függvény hatványsora Hadamard-hézagos, vagyis

(8. 1)
$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k},$$

ahol

(8. 2)
$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq q > 1,$$

akkor minden sugár szinguláris $f(z)$-re nézve. Ha egy $\{n_k\}$ sorozatnak megvan az a tulajdonsága, hogy ha a (8. 1) alatti hatványsorú $f(z)$ függvény a D osztályba tartozik, akkor $f(z)$-re nézve minden sugár szinguláris, nevezzük az $\{n_k\}$ sorozatot S-sorozatnak. Így tehát minden a (8. 2) feltételnek eleget tevő $\{n_k\}$ sorozat S-sorozat.

Könnyen belátható, hogy ha (8. 2) helyett csak azt tesszük fel, hogy a (8. 1) sor Fabry-hézagos, vagyis, hogy

(8. 3)
$$\lim_{k \to +\infty} \frac{n_k}{k} = +\infty,$$

akkor még az is lehetséges, hogy $f(z)$-nek csak egyetlen egy szinguláris sugara legyen. Így például, ha

(8. 4)
$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{j=1}^{k^2} z^{k^3+j},$$

akkor $f_1(z)$ nyilván a D osztályba tartozik és a $\varphi = 0$ sugár $f_1(z)$-nek szinguláris sugara (hiszen $\lim_{r \to 1} f(r) = +\infty$). Másrészt azonban, ha $z = re^{i\varphi}$, ahol $0 < \varphi < 2\pi$ és $0 < r < 1$, akkor

(8. 5)
$$|f_1(z)| \leqq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) \frac{2}{|1-z|} \leqq \frac{\pi^2}{3|1-e^{i\varphi}|}$$

és így minden $z=re^{i\varphi}$ sugár $(0<\varphi<2\pi)$ reguláris sugár $f_1(z)$-re nézve. Így tehát nem minden a (8. 3) feltételnek eleget tevő $\{n_k\}$ sorozat S-sorozat.

ERDŐS PÁL bebizonyította [30], hogy (8. 3) helyett még az erősebb

$$\lim_{k\to+\infty}(n_{k+1}-n_k)=+\infty \tag{8.6}$$

feltétel sem biztosítja azt, hogy $\{n_k\}$ S-sorozat legyen. Könnyen belátható, hogy viszonylag lassan növekvő $\{n_k\}$ sorozatok is lehetnek S-sorozatok, mert az, hogy egy $\{n_k\}$ sorozat S-sorozat-e vagy nem, nemcsak az $\{n_k\}$ sorozat növekedésének sebességétől, hanem számelméleti tulajdonságaitól is függ. Ha például az $\{n_k\}$ sorozat azzal a tulajdonsággal bír, hogy megadható olyan végtelenhez tartó d_j $(j=1, 2, \ldots)$ egész számokból álló sorozat, hogy minden j-re az n_k számok véges sok kivétellel oszthatók d_j-vel, akkor $\{n_k\}$ S-sorozat. Egy $\{n_k\}$ sorozat tehát két okból lehet S-sorozat: azért, mert gyorsan növekszik, vagy a sorozat számelméleti tulajdonságai folytán.

A nagyságrend és a számelméleti tulajdonságok hatását úgy lehet szétválasztani, hogy vizsgáljuk azokat az $\{n_k\}$ S-sorozatokat, amelyek azzal a tulajdonsággal bírnak, hogy megadható hozzájuk egy ω_k számsorozat úgy, hogy $\lim\limits_{k\to+\infty}\omega_k=+\infty$ és ha $\{n_k'\}$ egy tetszőleges olyan számsorozat, amelyre $|n_k'-n_k|<\omega_k$, akkor $\{n_k'\}$ is S-sorozat. Nevezzük a rövidség kedvéért e sorozatokat *stabilis S-sorozatok*nak.

Mármost ERDŐS PÁLlal írt dolgozatunkban [31] bebizonyítottuk azt, hogy ha az $\{n_k\}$ sorozat eleget tesz a (7. 4) feltételnek, akkor $\{n_k\}$ nem stabilis S-sorozat.

Ezt a tételt valószínűségszámítási úton bizonyítottuk be. A bizonyítás módszere hasonlít a 7. §-ban bemutatott módszerhez; az eltérés abban áll, hogy véletlen együtthatójú hatványsorok helyett *véletlen kitevőjű hatványsorokat* vizsgáltunk. Más szóval

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k z^{v_k} \tag{8.7}$$

alakú hatványsorokat vizsgáltunk, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ megadott számok, viszont $v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots$ pozitív egész értékű valószínűségi változók. A részleteket illetően utalunk az idézett [31] dolgozatra.

9. §. HÉZAGOS FOURIER-SOROK

N. WIENER [32] bebizonyította, hogy ha egy

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos n_k x+b_k\sin n_k x \tag{9.1}$$

alakú trigonometrikus sor a $[-\pi, +\pi]$ intervallum egy tetszőlegesen kicsiny $[a, b]$ részintervallumában Abel-szummábilis és szummája az $[a, b]$ intervallumban négyzetesen integrálható, akkor (9. 1) egy a teljes $[-\pi, +\pi]$ intervallumban négyzetesen integráható $f(x)$ függvény Fourier-sora, vagyis

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2+b_k^2<+\infty \tag{9.2}$$

feltével, hogy az $\{n_k\}$ (természetes egész számokból álló) számsorozat eleget tesz a

$$\lim_{k\to+\infty}(n_{k+1}-n_k)=+\infty \tag{9.3}$$

hézagossági feltételnek.

A. ZYGMUND vetette fel még 1941-ben a következő problémát: (lásd [33], 380. l.). Lehet-e Wiener tételét általánosítani az L^2 tér helyett az L^q térre, ahol $q \neq 2$? ERDŐS PÁLlal együtt, valószínűségszámítási módszerrel, sikerült bebizonyítanunk [34], hogy ZYGMUND kérdésére a válasz negatív, ha $q > 2$. Pontosabban a következő tételt bizonyítottuk be: Létezik olyan $f(x)$ a $[-\pi, +\pi]$ intervallumban négyzetesen integrálható függvény, amelynek Fourier sora (9. 1) alakú, ahol az $\{n_k\}$ számsorozat eleget tesz a (9. 3) feltételnek, és amely függvény a következő tulajdonságokkal bír:

$f(x)$ korlátos a $-\pi \leqq x \leqq -\delta$ és $\delta \leqq x \leqq \pi$ intervallumokban minden $\delta > 0$- ra.
$f(x)$ nem tartozik L^q függvényosztályba semmilyen $q > 2$-re.

Tételünk bizonyításának alapgondolata az volt, hogy vizsgáltunk bizonyos

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos v_k x \tag{9. 4}$$

alakú Fourier-sorokat, ahol a_k egy megadott számsorozat, amelyre $\sum a_k^2 < +\infty$ (ez garantálta, hogy a (9. 4) sor egy L^2-beli függvény Fourier-sora legyen) és a v_k-k független, pozitív egész értékű valószínűségi változók, és megmutattuk, hogy a (9. 4) *véletlen Fourier-sor* 1 valószínűséggel rendelkezik a fent említett a) és b) tulajdonságokkal. A bizonyítási módszer ez esetben is hasonló volt a 7. §-ban ismertetett módszerhez.

Megjegyzendő, hogy később TURÁN PÁLnak [37] és Y. KATZNELSONnak (szóbeli közlés) valószínűségszámítási módszer nélkül is sikerült bebizonyítani, hogy létezik olyan (9. 1) alakú Fourier-sor, amely eleget tesz a (9. 2) és (9. 3) feltételeknek, és amelynek összege elég nagy q-ra (Turánnál $q > 6$) egy részintervallumban az L^q osztályhoz tartozik, de az egész $[-\pi, +\pi]$ intervallumban nem tartozik az L^q osztályba. Valószínűségszámítási módszer nélkül azonban eddig nem sikerült ezt *tetszőleges* $q > 2$-re megmutatni.

10. §. A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS EGYÉB ANALÍZISBELI ALKALMAZÁSAIRÓL

A valószínűségszámítás módszerei az analízis még számos más ágában és problémakörében is sikerrel alkalmazhatók, így pl. az alábbi kérdéskörökben: Határozott integrálok kiszámítása, θ-függvények elmélete, abszolút monoton függvények elmélete, momentumprobléma, polinomok és egész függvények gyökeinek eloszlása, divergens sorok szummációelmélete, Tauber-tételek, közönséges és parciális differenciálegyenletek elmélete, sajátértékek eloszlása, potenciálelmélet,* ortogonális sorok elmélete.**

E kérdéskörök közül egyeseket e dolgozat II. részében fogunk ismertetni.

IRODALOM

[1] J. KUBILIUS, Probabilistic methods in the theory of numbers, Amer. Math. Soc. Translation Series, Vol. 11. Providence, 1964.

[2] A. RÉNYI, Probabilistic methods in number theory, Proc. Internat. Congr. Math. (Edinburgh, 1958), pp. 529—539. Cambridge Univ. Press, 1960.

* E témakört illetően lásd [35].

** E témakört illetően lásd a [36] dolgozatot.

[3] M. KAC, Probability methods in some problems of analysis and number theory, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949) 641—665.
[4] P. ERDŐS—A. RÉNYI, Probabilistic methods in group theory, Journal d'Analyse Math. **14** (1965) 127—138.
[5] P. ERDŐS—P. TURÁN, On some problems of a statistical group theory, I. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie **4** (1965) 175—186, II—III. Acta Math. Acad. Sci. Hung. (sajtó alatt).
[6] M. G. KENDALL—P. A. P. MORAN, Geometrical probability, Griffin, London, 1963.
[7] P. A. P. MORAN, A note on recent research in geometric probability, Journal Appl. Probability **3** (1966) 453—463.
[8] RÉNYI, A.: Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, 2. kiad. Bp. 1966.
[9] W. FELLER, Introduction to probability theory and its applications, Vol. II. Wiley, New York, 1966.
[10] S. BERNSTEIN, Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités, Kharkow Szoobcs. Mat. Obscsesztva, **13** (1912) 1—20.
[11] I. P. NATANSZON, Konstruktív függvénytan, Akad. Kiadó, Bp. 1952, 184. o.
[12] A. WIMAN, Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zugehörigem Taylorschen Reihe, Acta Math. **37** (1914) 305—326.
[13] G. VALIRON, Lecons sur la théorie générale des fontions entières Toulouse, 1923.
[14] G. PÓLYA, Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylorschen Reihe, Acta Math. **40** (1916) 311—319.
[15] P. C. ROSENBLOOM, Probability and entire functions, Studies in Mathematical Analysis and related topics, Essays in Honor of G. Pólya, Stanford Univ. Press, Stanford, 1962, p. 325—332.
[16] HINCSIN, A. J.: A statisztikus mechanika analitikus módszerei. Akad. Kiadó, Bp.
[17] HAYMAN, W. K.: A generalisation of Stirling's formula, Journal für die reine u. angew. Math. **196** (1956) 67—95.
[18] RÉNYI, A.: Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, Bp. 1954.
[19] É. BOREL, Sur les séries de Taylor, Comptes Rendus **123** (1896) 1051—1052.
[20] H. STEINHAUS, Über die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grenze ist, Math. Zeitschrift, **31** (1930) 408—416.
[21] R. PALEY—A. ZYGMUND, On some series of functions, Proc. Cambridge Phil. Soc. **26** (1930) 337—357 és **28** (1932) 190—205.
[22] C. RYLL-NARDZEWSKI: D. Blackwell's conjecture on power series with random coefficients, Studia Math. **13** (1953) 30—36.
[23] J. P. KAHANE, Series de Fourier aléatoires, Université de Montréal, 1963, 1—174.
[24] L. ARNOLD, Wachstumseigenschaften zufälliger ganzen Funktionen. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, **5** (1966) 336—347.
[25] L. FEJÉR, Über Potenzreihen, deren Summe im abgeschlossenen Konvergenzkreise überall stetig ist. Sitzungsber. Bayer. Akad. Math.-Phys. Kl. 1917, 33—50.
[26] A. ZYGMUND: Quelques théorèmes sur les séries trigonométriques et celles de puissances. Studia Math. **3** (1931) 77—91.
[27] B. JA. LEVIN: Raszpredelenije kornej celüch funkcii. Moszkva, Gosztehizdat, 1956.
[28] P. ERDŐS, On uniform but not absolute convergence of power series with gaps, Annales Soc. Pol. Math. **25** (1952) 162—168.
[29] D. GAIER—W. MEYER-KÖNIG, Singuläre Radien bei Potenzreihen. Jahresber. Deutschen Math. Vereinigung **59** (1956) 36—48.
[30] P. ERDŐS, Über eine Fragestellung von Gaier und Meyer-König. Jahresber. Deutschen Math. Vereinigung **60** (1957) 89—92.
[31] P. ERDŐS—A. RÉNYI, On singular radii of power series, Publications Math. Inst. Hung. Acad. Sci. **3** (1958) 159—168.
[32] N. WIENER, A class of gap theorems, Annali di Pisa **3** (1934) 367—372.
[33] A. ZYGMUND, Trigomonetric series, Cambridge Univ. Press. 1959.
[34] P. ERDŐS—A. RÉNYI, On a problem of A. Zygmund. Studies in Math. Analysis and Related Topics, Essays in honor of G. Pólya, Stanford Univ. Press, 1962, 110—116.
[35] PAUL A. MEYER, Probability and potentials, Blaisdell, Waltham, 1966.
[36] RÉVÉSZ, P.: Ortogonalitás és függetlenség, MTA III. O. K. **15** (1965) 411—425.
[37] P. TURÁN, On a certain problem in the theory of power series with gaps, Studies in Math.

Analysis and Related Topics, Essays in honour of G. Pólya, Stanford Univ. Press, 1962. 404—409.
[38] P. Erdős—A. Rényi, A probabilistic approach to problems of diophantine approximation Illinois Journal Math. **1** (1957) 303—315.
[39] J. P. Kahane, Some random series of functions (sajtó alatt.)
[40] A. Hurwitz und G. Pólya, Zwei Beweise eines von Herrn Fatou vermuteten Satzes, Acta Math. **40** (1915) 179—181.

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В АНАЛИЗЕ I.

А. РЕНЪИ

PROBABILISTIC METHODS IN ANALYSIS I.

A. RÉNYI