A MAJDNEM BIZTOS INVARIANCIAELV ÉS ANNAK MÉLYEBB HÁTTERE

Major Péter
MTA Matematikai Kutató Intézete

Az MTA 1999 május 5-én tartott közgyülés tudományos (matematikai) ülésszakán tartott előadás írásos változata

Idézzük fel a következő valószínűségszámítási eredményt:

1. Tétel. *Legyen $X_n(\omega)$, $EX_n=0$, $EX_n^2=1$, $n=1,2,\dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, és jelölje $S_n(\omega)=\sum\limits_{j=1}^n X_j(\omega)$, $n=1,2,\dots$ a belőlük készített részletösszegek sorozatát. Ekkor*

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} I\left(\frac{S_k(\omega)}{\sqrt{k}}<x\right)\to\Phi(x) \quad \textit{egy valószínűséggel} \tag{$*$}$$

minden valós x számra, ahol $I(A)$ az A halmaz indikátorfüggvényét jelöli, és $\Phi(\cdot)$ a standard normális eloszlásfüggvény.

Tegyünk néhány megjegyzést ezzel az eredménnyel kapcsolatban.

A centrális határeloszlástétel szerint

$$P\left(\frac{S_k}{\sqrt{k}}<x\right)\sim\Phi(x) \quad \text{nagy } k \text{ számokra.}$$

Tehát a fent idézett eredmény azt jelenti, hogy az $A_k=\left\{\frac{S_k}{\sqrt{k}}<x\right\}$ események bekövetkezésének súlyozott átlaga alkalmas súlyokkal egy valószínűséggel létezik, és megegyezik a $\lim\limits_{k\to\infty}P(A_k)$ számmal. (Jegyezzük meg, hogy $\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{1}{k}\sim\log n$.) Felmerülnek a következő kérdések:

1. Mi az oka a fent idézett eredménynek?
2. Miért éppen az 1. Tételben említett súlyozást tekintettük?
3. A megfogalmazott tétel egy partikuláris állítás vagy annak hátterében egy mélyebb, általánosabb eredmény áll?

Előadásomban ezeket a kérdéseket és néhány hozzájuk kapcsolódó problémát tárgyaltam.

Ha az 1. Tételben tekintett súlyozott átlag helyett a közönséges, súlyozás nélküli átlagot, azaz az

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n I\left(\frac{S_k}{\sqrt{k}}<x\right)$$

kifejezéseket tekintjük, és elvégezzük az $n\to\infty$ határátmenetet, akkor ezeknek a kifejezéseknek nem elfajuló határeloszlásuk van ($x=0$ esetén a limeszt a valószínűségszámítás egyik híres eredménye, az arcus-sinus törvény írja le). Ez azt is jelenti, hogy ebben az esetben nem érvényes az 1. Tételben megfogalmazott eredmény természetes analogonja.

A későbbi tárgyalás érdekében érdemes megfogalmazni a $(*)$ relációnak egy általánosabb alakját. Definiáljuk a következő $S_k(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, $k = 1, 2, \dots$, (véletlen) töröttvonalfüggvényeket.

$$S_k\left(\frac{j}{k},\omega\right) = \frac{S_j(\omega)}{\sqrt{k}}, \quad 0 \le j \le k, \quad \text{és } S_k(t,\omega) \text{ lineáris függvény a } \left[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}\right] \text{ intervallumban.}$$

Legyen $\mathcal{F}$ folytonos (vagy kissé általánosabban a Wiener mérték szerint egy valószínűséggel folytonos), korlátos funkcionál a $C([0,1])$ téren, azaz a $[0,1]$ intervallumon folytonos függvények terén a szuprémum normával. Ekkor

$$\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \mathcal{F}(S_k(\cdot,\omega)) \to \int \mathcal{F}(u(\cdot))\, d\mu_w(u) \quad \text{egy valószínűséggel,} \tag{$**$}$$

ahol μ_w a Wiener mérték, azaz a Wiener folyamat eloszlása a $C([0,1])$ téren. Speciálisan, az

$$\mathcal{F}(u(\cdot)) = \begin{cases} 1 & \text{ha } u(1) < x \\ 0 & \text{ha } u(1) \ge x \end{cases}$$

választással kapjuk, hogy a $(*)$ formula a $(**)$ reláció speciális esete.

Következő célunk az, hogy megértsük: Miért érvényes a $(**)$ formula? A következő a.) és b.) észrevételt tesszük.

a.) Ha $W(t)$, $t \ge 0$ Wiener folyamat a $[0,\infty)$ félegyenesen, $\mathcal{F}$ folytonos funkcionál a $C([0,1])$ téren, akkor érvényes a

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\log T} \int_1^T \frac{1}{t} \mathcal{F}(W_t(\cdot))\, dt = \int \mathcal{F}(x)\, d\mu_w(x) \quad \text{egy valószínűséggel}$$

reláció, ahol $W_t(s,\omega) = \dfrac{W(st,\omega)}{\sqrt{t}}$, $0 \le s \le 1$, $t \ge 1$, a Wiener folyamat a t paramétertől függő alkalmas átskálázása.

b.) A valószínűségszámítás egyik klasszikus eredménye szerint (invariancia elv) a korábban már definiált $S_k(\cdot)$ töröttvonalfüggvények teljesítik az

$$S_k(\cdot) \Rightarrow \mu_w, \quad \text{ha } k \to \infty$$

relációt, ahol μ_w a Wiener mérték, és $\Rightarrow$ a gyenge konvergenciát (az eloszlásbeli konvergencia általánosítását) jelöli általánosabb terekben. Ez az eredmény azt sugallja, hogy a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^{k} \frac{1}{k} \mathcal{F}(S_k(\cdot,\omega))$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\log T} \int_1^T \frac{1}{t} \mathcal{F}(W_t(\cdot,\omega))\, dt$$

kifejezések hasonló törvényszerűségeknek tesznek eleget.

A később részletesebben megmagyarázandó a.) és b.) állítások a következő képet sugallják: Az a.) állításban a határfolyamatra fogalmaztunk meg valamilyen törvényszerűséget. A b.) állítás azt sugallja, hogy az ilyen törvényszerűségek öröklődnek azokra a folyamatokra is, melyek a határfolyamat vonzási tartományában vannak.

Az a.) állítást a következő módon magyarázhatjuk meg, illetve általánosíthatjuk. Legyen $W(t,\omega)$, $t \geq 0$, Wiener folyamat. Ekkor a valószínűségszámítás egyik klasszikus eredménye szerint az

$$U(t,\omega) = \frac{W\left(e^t,\omega\right)}{e^{t/2}}$$

transzformációt alkalmazva az úgynevezett Ornstein–Uhlenbeck folyamatot kapjuk, és ez egy stacionárius, ergodikus folyamat. Ezért alkalmazható rá a matematikai analízis egyik alapvető eredménye, az ergod-tétel, mely szerint

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\log T} \int_0^{\log T} \mathcal{G}(\mathbf{T}_s U(\cdot,\omega))\, ds = E\mathcal{G}(U(\cdot,\omega)) \quad \text{egy valószínűséggel,}$$

ahol $\mathbf{T}_s U(t,\omega) = U(t+s,\omega)$, az $U(\cdot,\omega)$ trajektória eltolása s-sel, és $\mathcal{G}$ tetszőleges korlátos funkcionál a $[0,\infty)$ félegyenesen értelmezett függvények terén. Ezt az Ornstein–Uhlenbeck folyamatról szóló relációt átírva a $W(t,\omega) = t^{1/2}U(\log t,\omega)$ Wiener folyamatra, és a $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{F})$ funkcionált alkalmasan választva megkapjuk az a.) állítás eredményét.

Felmerül a kérdés: Mennyire kötődik a fenti érvelés, illetve annak eredménye a Wiener folyamathoz, illetve a Wiener folyamat transzformáltjaként kapott Ornstein–Uhlenbeck folyamathoz? Részletesebb vizsgálat megmutatja, hogy ez az érvelés, illetve az a.) állítás megfelelőjének a bizonyítása elvégezhető az úgynevezett önhasonló (az angol nyelvű irodalomban self-similar-nek hívott) folyamatokra is.

Egy $X(t,\omega)$, $t \geq 0$, sztochasztikus folyamat akkor önhasonló $\alpha > 0$ paraméterrel, ha az $X(t,\omega)$ és az $s^{-1/\alpha}X(st,\omega)$ folyamatok eloszlása minden $s > 0$ esetén megegyezik. Ezek a folyamatok azért játszanak fontos szerepet a valószínűségszámításban, mert ezek eloszlásai lépnek fel határeloszlástételek limeszeként. Megadjuk ennek a ténynek egy informális, vázlatos magyarázatát.

Ha független valószínűségi változók normalizált összegeire érvényes határeloszlástételeket vizsgálunk, akkor az ilyen állítások átfogalmazhatóak, mint ezen független valószínűségi változók eloszlásainak a konvolucióira, illetve azok átskálázására felírt alkalmas relációk. Egy természetes határátmenetet elvégezve azt kapjuk, hogy azok az eloszlások lépnek fel határeloszlásként, melyek teljesítenek egy bizonyos fix-pont egyenletet. Ha nem feltétlenül független valószínűségi változók alkalmasan normalizált összegeinek lehetséges határeloszlásait akarjuk leírni, akkor nem elegendő az egydimenziós eloszlásokat tekinteni, mert azok nem adnak teljes információt. Ekkor az egész folyamat eloszlását kell tekinteni, és azt érdemes vizsgálni, hogy mely folyamatok eloszlásai jelenhetnek meg, mint határértékek. Ebben az esetben is adaptálhatjuk a független valószínűségi változók esetében végrehajtott határátmenetet, és azt kapjuk, hogy a határfolyamat eloszlása teljesít bizonyos szimmetriatulajdonságot. Kidolgozva a részleteket azt kapjuk, hogy a lehetséges határértékek megegyeznek a önhasonló folyamatok eloszlásaival.

Másrészt nem nehéz belátni a következő lemmát.

Lemma. *Egy $X(t,\omega)$ szochasztikus folyamat akkor és csak akkor önhasonló $\alpha > 0$ paraméterrel, ha az*

$$Y(t,\omega) = \frac{X\left(e^t,\omega\right)}{e^{t/\alpha}}, \quad t \ge 0$$

sztochasztikus folyamat stacionárius.

Vegyük észre, hogy a Lemmában definiált $Y(t,\omega)$ folyamat definiciója nagyon hasonló az Ornstein–Uhlenbeck folyamatnak a Wiener folyamat segítségével megadott konstrukciójához. Mivel az ergod-tétel alkalmazható tetszőleges stacionárius folyamatra, ezért az a.) állítás érvelése általánosítható önhasonló folyamatokra is. Ilyen módon azt kapjuk, hogy ha $X(\cdot,\omega)$ önhasonló folyamat $\alpha > 0$ paraméterrel, akkor enyhe feltételek mellett (azt kell feltenni, hogy az $Y(t,\omega)$ stacionárius folyamat egyben ergodikus is, és az $X(\cdot,\omega)$ folyamat trajektóriái simák)

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\log T} \int_1^T \frac{1}{t} \mathcal{F}\left(X_t(\cdot,\omega)\right) dt = E\mathcal{F}X_1(\cdot,\omega) \quad \text{egy valószínűséggel,} \qquad (+)$$

ahol $X_t(u,\omega) = \dfrac{X(ut,\omega)}{t^{1/\alpha}}$, $0 \le u \le 1$, $t > 0$, és $\mathcal{F}$ $C([0,1])$ (vagy a valószínűségszámításban szintén gyakran használt nagyobb $D([0,1])$) térbeli folytonos korlátos funkcionál. Sőt, ez az állítás némileg élesíthető. Megadható ω elemi eseményeknek olyan egy valószínűségű halmaza, melyekre a (+) reláció teljesül minden folytonos és korlátos $\mathcal{F}$ funkcionálra. (Ez az állítás megfogalmazható úgy is, mint egy majdnem biztos funkcionális határeloszlástétel.)

Ilyen módon azt a figyelemreméltó eredményt kapjuk, hogy az egy valószínűségű határeloszlástételben ugyanazok a folyamatok lépnek fel határfolyamatként mint a valószínűségszámítás klasszikus határeloszlástételeiben.

A b.) részben megfogalmazott állítás bizonyításához érdemes belátni a (+) formulában megfogalmazott állítás következő diszkrét változatát.

2. Tétel. *Legyen B_n pozitív számoknak olyan monoton sorozata, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \infty$, és $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{B_{n+1}}{B_n} = 1$. Tegyük fel továbbá, hogy a (+) formula bizonyításának a feltételei teljesülnek. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log \frac{B_{n+1}}{B_1}} \sum_{k=1}^{n} \log \frac{B_{k+1}}{B_k} \mathcal{F}\left(X_{B_k}(\cdot,\omega)\right) = E\mathcal{F}(X_1(\cdot,\omega)) \quad \text{egy valószínűséggel} \quad (++)$$

minden a $C([0,1])$ téren folytonos és korlátos $\mathcal{F}$ funkcionálra, ahol $X_t(s,\omega) = \dfrac{X(st,\omega)}{t^{1/\alpha}}$, $t > 0$, $0 \le s \le 1$.

Megjegyzés: A (+) állítás bizonyításának hátterében az ergod-tétel áll. Az ergod-tételnek létezik időben diszkrét változata is, és természetes gondolat lenne megpróbálni azt, hogy a (++) relációt az ergod elmélet diszkrét változatának a segítségével bizonyítsuk be. Ez a módszer azonban nem működik, mert az ergod-tétel diszkrét változatában az időpontokat speciálisan kell megválasztani. A 2. Tétel bizonyításának a kulcsa mégis az ergodtétel. Az ergod-tétel és az $X(t,\omega)$ trajektóriáinak folytonossága segítségével ugyanis megmutatható, hogy a (+) formulában szereplő integrált jól közelíti a (++) formulában szereplő összeg. Ezért a két kifejezésnek ugyanaz a limesze. Egy részletesebb tárgyalásban el kellene magyarázni pontosabban, hogy milyen értelemben van ez a két kifejezés közel egymáshoz. Ennek kifejtésére azonban egy rövid, bevezető jellegű előadásban nem volt lehetőségem.

A b.) részben megfogalmazott állítás azt sugallja, hogy próbáljuk meg a következő állítást belátni. Ha $X(t,\omega)$ α paraméterű önhasonló folyamat, melyre érvényes a 2. Tétel, és $Z(t,\omega)$, $t \ge 0$, olyan sztochasztikus folyamat, melyre a $Z_n(t,\omega) = \dfrac{Z(B_n t,\omega)}{B_n^{1/\alpha}}$, $0 \le t \le 1$, folyamat teljesíti a $Z_n(t,\omega) \Rightarrow X_1(t,\omega)$ relációt $n \to \infty$ esetén alkalmas B_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozattal, ahol $\Rightarrow$ gyenge konvergenciát jelent, akkor érvényes a (++) formula azon modósítása is, melyben az $\mathcal{F}\left(X_{B_k}(\cdot,\omega)\right)$ kifejezést az $\mathcal{F}\left(Z_k(\cdot,\omega)\right)$ kifejezéssel helyettesítjük.

Ez az állítás közvetlenül nem bizonyítható, mivel a bizonyításban a fent definiált $X_n(t,\omega)$ és $Z_n(t,\omega)$ folyamatoknak a $Z_n(t,\omega) \Rightarrow X(t,\omega)$ relációtól eltérő közelségét kell alkalmazni. A bizonyítás komolyabb analízist igényel. Sikerült belátni, hogy ha független egyforma eloszlású valószínűségi változók normalizált részletösszegei teljesítenek valamilyen határeloszlástételt, akkor ezek a részletösszegek teljesítik a megfelelő egy valószínűségű határeloszlástételt, illetve annak funkcionális változatát is. Ennek a vizsgálatnak a részleteiről nem volt időm beszélni. Természetes azt várni, hogy ennek az eredménynek a megfelelője érvényes függő valószínűségi változók részletösszegeire is. Ez az állítás azonban jelenleg még nincs bebizonyítva, és a bizonyítás sok munkát és új gondolatokat igényel.

Végül jegyezzük meg, hogy a fenti eredmények azt is megmagyarázzák, hogy miért természetes az előadás illetve az itteni ismertetésés elején megadott $(*)$ formulában szereplő súlyozott átlagot az ott tekintett súlyozással tekinteni. Ugyanis független, egyforma eloszlású valószínűségi változók részletösszegei hasonlóan viselkednek, mint független, standard normális eloszlású valószínűségi változók részletösszegei. Ezekre viszont alkalmazható a 2. Tétel eredménye $B_n = n$ és $\alpha = 2$ választással. Ez az érvelés $(*)$ formulához hasonló eredményt szolgáltat. Az egyetlen különbség az, hogy jelen esetben a $\dfrac{1}{\log n}\dfrac{1}{k}$ súlyok helyett a $\dfrac{1}{\log n}\log\dfrac{k-1}{k}$ súlyokat kell választani. De mivel $\log\dfrac{k-1}{k} = \dfrac{1}{k} + O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$, nem nehéz belátni, hogy a két reláció ekvivalens egymással.

Az előadásban csak rövid betekintést tudtam adni az egy valószínűségű határeloszlástétel témakörébe. Egy részletesebb tárgyalás és az itt megfogalmazott állítások teljes bizonyítása megtalálható a következő két részből álló cikkemben:

Hivatkozás:

Major Péter: Almost sure functional limit theorems. Part I. The general case. *Studia Scientarum Mathematicarum Hungarica* **34** (1998) 273–304

Major Péter: Almost sure functional limit theorems. Part II. The case of independent random variables. *Studia Scientarum Mathematicarum Hungarica* **36** (2000) 231–273