Über die Iteration einer eindimensionalen Transformation

Péter Major, *Mathematisches Institut der Ungarischen Akademie der Wissenschaften*
Ungarn, Budapest H–1364 P.O.B. 127

In dieser Arbeit diskutieren wir das folgende Problem: Betrachtet wird die Folge, definiert durch die Rekursion

$$x_{n+1} = \mathbf{T}_a x_n = 1 - a x_n^2 , \qquad n = 0, 1, \dots$$

mit einem Anfangswert $-1 \le x_0 \le 1$. Dabei sei a ein Parameter, mit $0 < a \le 2$, so daß $\mathbf{T}_a x$ eine Transformation des Intervals $[-1, 1]$ in sich selbst ist. Wie verhält sich die "Trajektorie" x_n, $n = 0,\ 1,\ \dots$, wenn man einen "typischen" Anfangswert x_0 betrachtet? Wie hängt es von dem Parameter a ab?

Bei dem ersten Blick scheint diese Frage sehr speziell und unbedeutend zu sein, interessant nur für eine kleine Gruppe von Theoretikern. Jedoch untersuchten dieses Problem hervorragende Mathematiker und Physiker. In diesem Aufsatz wollen wir nur einen kurzen Überblick über dieses Problem geben. Insbesondere wollen wir erklären, daß bei der Untersuchung dieses Problems ein sehr komplexes Bild entsteht, dessen Verstehen wichtig ist. Man kann dieses Problem als einen Testfall interpretieren, mit dessen Hilfe wir verstehen möchten, wie die Trajektorien sich in der Nähe eines Fixpunktes des Operators verhalten, und wie sie von der Stabilitätseigenschaften des Operators abhängen.

Wenn der Anfangswert x_0 die Lösung der Fixpunktgleichung $\mathbf{T}_a \bar{x} = \bar{x}$ ist, dann nimmt die Folge x_n den Wert $\bar{x}$ für jedes n. Wenn das Parameter a klein ist, genauer wenn die Ableitung $\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{T}_a x = -2ax$ in dem Fixpunkt $\bar{x}$ ($\mathbf{T}_a \bar{x} = \bar{x}$) größer oder gleich -1 und kleiner als 0 ist, dann strebt die Folge x_n gegen $\bar{x}$ für jedes $-1 \le x_0 \le 1$, wenn $n \to \infty$. Für andere Parameter ist die Situation verschieden. Es ist aufschlußreich, den Extremfall $a = 2$ d.h. $\mathbf{T}_2 x = 1 - 2x^2$ speziell zu betrachten.

Um diesen Fall besser zu verstehen, kann man die Transformation $y = 1 - 2x^2$ in ein anderes Koordinatensystem (u, v), $x = \cos u$, $y = \cos v$, $0 \le u, v \le \pi$, umschreiben. In diesem neuen System und mit $x_n = \cos u_n$ gilt die Rekursion $u_{n+1} = G(u_n)$ mit der Funktion

$$G(u) = \begin{cases} \pi - 2u & \text{für } 0 \le u \le \frac{\pi}{2} \\ 2u - \pi & \text{für } \frac{\pi}{2} \le u \le \pi \end{cases} .$$

Diese Formel kann man relativ einfach mit Hilfe der Überlegung

$$\cos v = y = 1 - 2x^2 = 1 - 2\cos^2 u = \cos(\pi - 2u)$$

und $0 \le u, v \le \pi$ beweisen. Es ist einfach zu sehen, daß unter der Transformation G das Lebesguesche Maß λ invariant ist, d.h. es gilt: $\lambda(u\colon G(u) \in A) = \lambda(u\colon u \in A)$ für jede Menge A. Diese Überlegungen haben zur Folge, daß das Maß mit der Dichtefunktion $\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ invariant unter der Transformation $\mathbf{T}_2$ ist.

Dieses ziemlich abstrakte Resultat zusammen mit einem klassischen Resultat, dem Ergoden-Satz, kann das Verhalten der typischen Trajektorien x_n erklären, die durch die Iteration der Transformation $\mathbf{T}_2$ definiert sind. Es folgt aus der allgemeinen Theorie, daß das System $([-1,1], \mathcal{B}, \mu)$, wobei $\mathcal{B}$ die Borel σ-Algebra in $[-1,1]$ und $\mu(dx) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ist, ein ergodishes System ist. So besagt der Ergoden-Satz, daß für große n das Verhältnis der Indices k in der Folge $x_1, \dots, x_n$ durch $\mu(A) = \int_A \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ gegeben ist. Man kann noch mehr sagen. Es folgt aus der allgemeinen Theorie, daß das betrachtete dynamische System gute Mischungseigenschaften besitzt. Dies hat zur Folge, daß wenn man die Werte x_k in einem Zeitinterval $0 \le k \le T$ nur mit einem kleinen Fehler betrachten kann (und in praktischen Situationen ist das immer der Fall) und wenn $N \gg T$, die Folge x_n, $n \ge N$, dasselbe statistische Verhalten besitzt. So können wir über das Verhalten der Iterationen $\mathbf{T}_2$ für große Indices nur statistische Aussagen machen. Dies zeigt, daß die Iterationen der Transformation $\mathbf{T}_a$ mit kleinem Parameter a, wenn die Trajektorie gegen einen Fixpunkt strebt, und mit dem Parameter $a = 2$ ganz anders sich verhalten. Man möchte über das Verhalten der Trajektorie der Transformation mit verschiedenem Parameter a ein vollständiges Bild bekommen. Wir sind weit von diesem Ziel, aber bereits die bewiesenen Resultate können zeigen, was für ein komplexes Bild entsteht.

Diskutieren wir, was passiert wenn der Parameter a wächst. Für kleine a ist der Fixpunkt $\bar{x} = \bar{x}_a$, der von dem Parameter a stetig abhängt, stabil, und die Trajektorien streben für jeden Startpunkt gegen $\bar{x}_a$. Diese Eigenschaft hört auf, wenn $a > \mu_1$, wobei μ_1 durch die Gleichung $\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{T}_a\bar{x}_a = -1$ für $a = \mu_1$ definiert ist. Wenn $a > \mu_1$, dann ist diese Ableitung kleiner als -1, und der Fixpunkt instabil ist. Andererseits gilt $\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{T}_a^2\bar{x}_a = 1$ für $a = \mu_1$ mit $\mathbf{T}_a^2(x) = \mathbf{T}_a(\mathbf{T}_a(x)$. Darum kann man, wenn man den Fixpunkt der Transformation $\mathbf{T}_a^2$ betrachtet, die Bifurkationstheorie anwenden. Eine tiefere Analyse zeigt das folgende: Der Parameter $\bar{x}_a$ ist ein Fixpunkt auch der Transformation $\mathbf{T}_a^2$, aber für $a > \mu_1$ gibt es noch zwei andere Fixpunkte $x_a(1)$ und $x_a(2)$ dieser Transformationen. Sie sind, betrachtet als Funktion des Parameters a, zwei Kurven, die sich bei $a = \mu_1$ in dem Punkt $(a, \bar{x}_a)$ verzweigen. Dies bedeutet, daß $\mathbf{T}_a\bar{x}_a(1) = \bar{x}_a(2)$ und $\mathbf{T}_a\bar{x}_a(2) = \bar{x}_a(1)$ ist, und daß wenn der Startpunkt x_0 der Iteration $\bar{x}_a(1)$ oder $\bar{x}_a(2)$ ist, die Trajektorie x_n abwechselnd diese zwei Punkte annimt. Man kann noch mehr sagen. Die Formel $-1 < \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{T}_a^2\bar{x}_a < 1$ gilt für $x = \bar{x}_1(a)$, $\bar{x}_2(a)$ wenn a ein bißchen größer ist als μ_1. Somit sind diese Fixpunkte von $\mathbf{T}_a^2$ stabil. Wenn die Iteration $x_{n+1} = \mathbf{T}_a x_n$ von einem beliebigen Startpunkt beginnt, mit der Ausnahme $x_0 = \bar{x}_a$, dann strebt die Trajektorie x_n, $n = 1, 2, \dots$ gegen die Trajektorie $\dots, \bar{x}_1(a), \bar{x}_2(a), \bar{x}_1(a) \dots$. Dies bedeutet, daß für $a > \mu_1$ der Fixpunkt $\bar{x}_a$ keine große Bedeutung hat, und die andere Fixpunkte $\bar{x}_1(a)$ und $\bar{x}_2(a)$ physikalische Bedeutung besitzen.

Wenn der Parameter a weiter wächst, dann verliert auch der Fixpunkt der Transformation $\mathbf{T}^2$ seine Stabilität. Es gibt einen Parameter μ_2, so daß durch eine zweite Bifurkation eine stabile Trajektorie der Länge $2^2 = 4$ für $a > \mu_2$ (ein neuer Fixpunkt von $\mathbf{T}_a^4$) entsteht. Und so folgt weiter: Es gibt eine Sequenz von Parametern $\mu(n)$, $n = 1, 2, \dots$, so daß für $\mu_n < a \le \mu_{n+1}$ eine stabile periodische Trajektorie der Länge 2^n entsteht, und für jeden typischen Startpunkt x_0 strebt die Trajektorie x_n gegen diese periodische Trajektorie. Die Parameter μ_n haben einen Limes $\mu_\infty < 2$, wenn $n \to \infty$. Das Verhalten der Trajektorien bei $a = \mu_\infty$ weist eine besondere Merkwürdigkeit auf. Dynamische Systeme mit solchen Eigenschaften haben in der Literatur einen speziellen Namen, nämlich "Strange Attractors". In diesem Fall strebt eine typische Trajektorie gegen eine Cantor–Menge. Man müßte genauer erklären, was diese Konvergenz bedeutet, aber wegen der Kürze dieses Aufsatzes müssen wir darauf verzichten. Es gibt vielmehr andere interessante und wichtige Fakten, die mit dem Parameter μ_∞ verbunden sind. Wir möchten nur die berühmte Feigenbaum–Universalität kurz erwähnen.

Man kann statt der Klasse der Funktionen $F_a(x) = 1 - ax^2$ andere Klassen $G_a(x)$ von unimodularen Funktionen in dem Interval $[-1, 1]$ betrachten. (Die Funktion $G_a(x)$ heißt unimodular, wenn es einen Punkt $x(a)$ gibt, so daß sie in dem Interval $[-1, x(a)]$ monoton wächst und in dem Interval $[x(a), 1]$ monoton fällt.) Die erwähnten Resultate sind richtig unter sehr allgemeinen Bedingungen, aber die Werte der Konstanten μ_n hängen davon ab, welche Klasse von Funktionen $G_a(x)$ wir betrachten. Auch gilt die Relation

$$\mu_\infty - \mu_n \sim \text{const.}\, \lambda^{-n}.$$

Dabei ist bemerkenswert, daß der Wert von λ unabhängig von der Klasse $G_a(x)$ ist. Für eine weite Klasse erscheint dieselbe Konstante $\lambda = 4.66920\ldots$. Es ist der einzige instabile (größer als 1) Eigenwert eines unendlich dimensionalen Operators. Die genauere Erklärung dieses Operators und des Grundes für ihre Erscheinung würde viel Zeit und Energie verlangen, so verzichten wir darauf. Man erwartet, daß das Auftreten solcher universellen Konstanten mit allgemeinen Gesetzen in der Physik verknüpft ist. Dies erklärt den Interesse für solche Resultate.

Das Verhalten der Trajektorien von $\mathbf{T}_a x = 1 - ax^2$ für $\mu_\infty < a < 2$ ist noch viel komplexer, und bis heute sind nur partielle Resultaten bekannt. Man kann fragen, ob es Parameter a gibt, für welche die typischen Trajektorien gegen eine periodische Trajektorie streben wie bei $a < \mu_\infty$, ob "Strange Attractors" existieren wie bei $a = \mu_\infty$, und ob ein solches "stochastisches Verhalten" möglich ist wie bei dem Parameter $a = 2$. Es ist zwar bewiesen, daß alle diese Möglichkeiten bestehen, aber eine genaue analytische Beschreibung, bei welchem Parameter welches Verhalten eintritt, ist nicht bekannt. Es kann sein, daß diese Unkenntnis einen tiefen prinzipiellen Grund hat, und daß es unmöglich ist, durch eine endliche analytische Formel die verschiedenen Klassen der Parameter a zu beschreiben. Auch andere natürliche Fragen tauchen in diesem Fragenkomplex auf. In dem Fall $0 < a < \mu_\infty$ existieren nur Perioden der Länge 2^n. Gibt es Parameter, für welche andere Periode erscheinen? Können bei gewissen Parameter viele verschiedene Perioden auftreten? Können auch mehrere verschiedene stabile Perioden bei demselben Modell zugleich auftreten? Diese letzte Frage bedeutet, ob es möglich ist, daß verschiedene Mengen von positivem Maß existieren, so daß die Trajektorien mit einem Startpunkt in diesen Mengen gegen verschiedene periodische Trajektorien streben. Die Antworten auf diese Fragen sind bekannt.

Allgemein gilt: Die Transformation $\mathbf{T}_a$ kann viele periodische Trajektorien besitzen, aber nur eine von ihnen kann stabil sein. Ein Resultat von Sharkovskii, das für beliebige stetige Transformation eines Intervals gilt, besagt, daß aus der Existenz von Perioden gewisser Länge die Existenz von Perioden anderer Länge folgt. Wir formulieren dieses

Resultat nicht in seiner allgemeiner Form, wir erwähnen nur eine Konsequenz daraus: Wenn die Transformation eine Trajektorie der Länge 3 besitzt (es gibt solche Parameter a, bei denen $\mathbf{T}_a$ diese Bedingung erfüllt), dann hat diese Transformation Perioden jeder Länge. Auf der anderen Seite existieren für die Transformationen $\mathbf{T}_a$ nicht mehrere stabile Trajektorien. Im Fall der Existenz einer stabilen periodischen Trajektorie strebt die Trajektorie x_n für fast alle Startpunkte x_0 gegen diese Trajektorie. Dieses Resultat bedeutet unter anderem, daß es nicht möglich ist, daß ein positiver Teil der Trajektorie gegen eine periodische Trajektorie konvergiert, und ein anderer positiver Teil stochastisches Verhalten zeigt. Diese Ergebnisse sind auch für die Iteration einer allgemeinen Klasse von Funktionen bewiesen. Sie gelten für jede unimodulare Funktion mit negativer Schwarzscher Ableitung. Es ist eine Eigenschaft, die auch die Funktionen $1 - ax^2$ erfüllen.

Der Grund warum man sich für die Iterationen der Funktion $1 - ax^2$ sich interessiert, liegt darin, daß es ein relativ einfacher Spezialfall eines allgemeinen Problems ist. Wenn der Parameter a nicht zu klein ist (d.h. zumindenst größer als 1), dann ist der absolute Wert von der Ableitung der Funktion $1 - ax^2$ für gewisse Werte von x, $-1 \leq x \leq 1$, größer als 1, für andere Werte kleiner als 1. Die Theorie der hyperbolischen Systeme sagt viel über die Iterationen von Transformationen deren Ableitung überall einen Abstandsbetrag größer als 1 besitzt. Solche Systeme zeigen stochastisches Verhalten wie im Beispiel der Transformation $\mathbf{T}_2 x = 1 - 2x^2$. Wenn die Ableitung der Transformation kleiner als 1 ist, dann stellt sie eine Kontraktion dar, und die Trajektorien streben gegen den Fixpunkt der Transformation. In dem hier diskutierten Modell tauchen beide gegensätzlichen Effekte auf. Wegen des Wettbewerbs dieser Effekte entsteht ein sehr kompliziertes Bild. Eine kleine Veränderung des Parameters kann eine radikale Veränderung des Verhaltens des Systems verursachen. Unser Ziel ist es, dieses Bild zu verstehen. Dies kann auch bei der Untersuchung von physikalischen Phänomenen wie die Turbulenz hilfreich sein.

In diesem kleinen Aufsatz könnten wir nur eine informelle kurze Erklärung geben. Eine detaillierte Diskussion zusammen mit einem umfangreichen Literaturverzeichnis findet man in dem Buch von Pierre Collet und Jean–Pierre Eckmann "Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems".