# TÖBB-VÁLTOZÓS VÉLETLEN INTEGRÁLOK ÉS $U$-STATISZTIKÁK BECSLÉSE.

Akadémiai székfoglaló előadás ismertetése

*Major Péter*
*MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutató Intézete*

Ez az írás akadémiai székfoglaló előadásom bővített változata. Először megfogalmazom az előadásban tárgyalt problémákat és röviden jelzem azokat a kérdéseket, amelyek ezek vizsgálatához vezettek. Ezután leírom a kérdések vizsgálatában kapott matematikai eredményeket. Részletesen ismertetem azok hátterét, és tárgyalom azokat a képeket, matematikai gondolatokat, fogalmakat, amelyek az eredményeket jobban megmagyarázzák.

## 1. Bevezetés. A problémák megfogalmazása.

A problémák megfogalmazása érdekében először bevezetek néhány jelölést.

Legyen $\xi_1,\dots,\xi_n$ független, egyforma, $\mu$ eloszlású valószínűségi változók sorozata valamely $(X,\mathcal{X})$ téren, és jelölje $\mu_n$,

$$\mu_n(A)=\frac{1}{n}\#\{j\colon\ \xi_j\in A,\ 1\le j\le n\},\quad A\in\mathcal{X},$$

e sorozat empirikus eloszlásfüggvényét. Legyen adva egy mérhető $f(x_1,\dots,x_k)$ $k$-változós függvény az $(X^k,\mathcal{X}^k)$ szorzattéren. Vegyük a $\mu_n$ empirikus mérték $\sqrt{n}(\mu_n-\mu)$ normalizáltjának $k$-szoros direkt szorzatát az $(X^k,\mathcal{X}^k)$ téren, és tekintsük az $f$ függvény integrálját ezen előjeles szorzatmérték szerint. Azaz, definiáljuk a következő (véletlen) integrált:

$$J_{n,k}(f)=\frac{n^{k/2}}{k!}\int' f(x_1,\dots,x_k)(\mu_n(\,dx_1)-\mu(\,dx_1))\dots(\mu_n(\,dx_k)-\mu(\,dx_k)),\tag{1.1}$$

ahol a vessző az $\int'$ formulában azt jelöli, hogy az $x_j=x_l$, $1\le j<l\le k$, átlókat kihagytuk az integrálási tartományból.

A következő két problémát vizsgálom:

*Probléma A).* Adjunk jó becslést a $P(J_{n,k}(f)>u)$ valószínűségekre az $f$ függvényre tett alkalmas feltételek mellett.

(A felmerülő alkalmazásokban természetesnek bizonyult az $x_j=x_l$, $j\ne l$, átlók kihagyása az integrálási tartományból.)

A második, általánosabb itt vizsgált probléma a következő:

*Probléma B).* Legyen $\mathcal{F}$ bizonyos $f(x_1,\dots,x_k)$ alakú függvények egy szép osztálya az $(X^k,\mathcal{X}^k)$ téren. Adjunk jó becslést a $P\left(\sup\limits_{f\in\mathcal{F}}J_{n,k}(f)>u\right)$ valószínűségekre, ahol $J_{n,k}(f)$ ismét az $f$ függvény (1.1) formulában definiált integrálját jelöli.

Kiderült, hogy a fenti két problémát érdemes együtt vizsgálni azok úgynevezett $U$-statisztikákról szóló anologonjaival. Ezek megfogalmazása érdekében bevezettem az $U$-statisztikák fogalmát:

**$U$-statisztikák definiciója.** *Legyen adva $\xi_1,\dots,\xi_n$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, melyek értékeiket egy $(X,\mathcal{X})$ mérhető téren veszik fel, valamint egy $f(x_1,\dots,x_k)$ $k$-változós függvény az $(X^k,\mathcal{X}^k)$ szorzattéren, $n\ge k$. Ekkor az*

$$I_{n,k}(f)=\frac{1}{k!}\sum_{\substack{1\le j_s\le n,\ s=1,\dots,k\\ j_s\ne j_{s'} \text{ if } s\ne s'}} f\left(\xi_{j_1},\dots,\xi_{j_k}\right) \tag{1.2}$$

*kifejezés $k$-ad rendű $U$-statisztika az $f$ magfüggvénnyel.*

Ezután megfogalmaztam a fenti két probléma alábbi változatait.

*Probléma A′).* Adjunk jó becslést a $P(n^{-k/2}I_{n,k}(f)>u)$ valószínűségekre az $f$ függvényre tett alkalmas feltételek mellett.

*Probléma B′).* Legyen $\mathcal{F}$ bizonyos $f(x_1,\dots,x_k)$ alakú függvények egy szép osztálya az $(X^k,\mathcal{X}^k)$ téren. Adjunk jó becslést a $P\left(\sup\limits_{f\in\mathcal{F}} n^{-k/2}I_{n,k}(f)>u\right)$ valószínűségekre, ahol $I_{n,k}(f)$ ismét a (1.2) formulában definiált $k$-ad rendű $U$-statisztikát jelöli az $f$ magfüggvénnyel.

Érdemes megjegyezni, hogy egy $k$-ad rendű $U$-statisztikát az $f$ magfüggvénnyel az

$$I_{n,k}(f)=\frac{n^k}{k!}\int' f(x_1,\dots,x_k)\mu_n(\,dx_1)\dots\mu_n(\,dx_k).$$

alakban is fel lehet írni. Ez azt mutatja, hogy a lényeges különbség az (1.1) formulában bevezetett véletlen integrálok és $U$-statisztikák között az, hogy a véletlen integrálokban a 'normalizált' $\mu_n-\mu$, míg az $U$-statisztikákban a 'nem normalizált' $\mu_n$ mérték szerint integrálunk.

A fent megfogalmazott problémák úgy jelentek meg számomra, hogy egy a maximum likelihood becslések aszimptotikus viselkedésének vizsgálatában jól működő egyszerű módszert megpróbáltam alkalmazni nehezebb problémák esetében is. A maximum likelihood becslés aszimptotikus viselkedésének vizsgálatában az úgynevezett maximum likelihood egyenlet megoldásának jó becslésére van szükség. Ez megkapható a maximum likelihood egyenletben szereplő függvény egy olyan közelítésének a segítségével, amelyet e függvény Taylor-sor fejtésének, és a sorfejtés magas rangú tagjainak elhagyásával kapunk. Be kell látni, hogy ez a közelítés csak elhanyagolhatóan kis hibát okoz, de ennek a bizonyítása viszonylag egyszerű.

Ilyen módszert próbáltam használni úgynevezett nem-paraméteres maximum likelihood becslések aszimptotikus viselkedésének a vizsgálatában is. Ez hasznosnak bizonyult például olyan problémákban, amelyekben egy ismeretlen eloszlás-függvényt kívánunk megbecsülni bizonyos részleges ismeretek segítségével. Az eloszlásfüggvény egy adott pontbeli értékének a becslésében a paraméteres esetben alkalmazott Taylor-sor fejtés alapján végzett közelítés adaptációját alkalmazhatjuk. Ekkor azonban annak bizonyítása, hogy az így kapott közelítés elhanyagolhatóan kis hibát okoz, lényegesen nehezebb. Ennek igazolásához a Probléma A)-ban megfogalmazott becslési probléma jó megoldására van szükség. Abban az esetben, ha az eloszlásfüggvény becslés hibáját minden pontban egyszerre kívánjuk megbecsülni, akkor a Probléma B) jó megoldására van szükségünk.

Általános nem-paraméteres problémák megoldásában számos egyéb problémát meg kell oldani, de a Probléma A) és Probléma B) vizsgálata különösen fontos. Ráadásul ezek a kérdések néhány alapvető valószínűségi jelenség jobb megértésével is kapcsolatosak. Ezért tartottam érdemesnek az e dolgozatban megfogalmazott kérdések részletes tárgyalását.

## 2. A probléma áttekintése. Az egyváltozós eset vizsgálata.

Az eredmények részletesebb vizsgálata előtt érdemes meggondolni azt, hogy milyen eredményt várhatunk. Vegyük észre, hogy a $\sqrt{n}(\mu_n-\mu)$ normalizált előjeles mértékek egy Gauss mezőhöz konvergálnak, ha $n\to\infty$. Ezért azt várhatjuk, hogy a Probléma A) és Probléma B) megoldásában nagyon általános feltételek mellett olyan becslések érvényesesek, mint amilyeneket azok normális megfelelője sugall. De meg kell értenünk a választ a következő két kérdésre.

1.) Milyen becslést sugall e problémák normális megfelelője?

2.) Mit jelent a 'nagyon általános feltételek mellett' kifejezés?

A fenti kérdések tisztázása érdekében érdemes először a Probléma A)-t vizsgálni a $k=1$ esetben, amikor független valószínűségi változók összegének eloszlását kell becsülni. Erről szól az alábbi klasszikus, Bernstein egyenlőtlenségnek hívott eredmény.

**Bernstein egyenlőtlenség.** *Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ független valószínűségi változók, amelyekre $P(|\xi_j|\le 1)=1$, $E\xi_j=0$, $1\le j\le n$. Vezessük be a $\sigma_j^2=E\xi_j^2$, $1\le j\le n$, $S_n=\sum\limits_{j=1}^n\xi_j$ and $V_n^2=\operatorname{Var}S_n=\sum\limits_{j=1}^n\sigma_j^2$ jelöléseket. Ekkor*

$$P(S_n>u)\le\exp\left\{-\frac{u^2}{2V_n^2\left(1+\frac{u}{3V_n^2}\right)}\right\}\qquad \textit{minden } u>0 \textit{ számra.} \tag{2.1}$$

A Bernstein egyenlőtlenség a centrális határeloszlástétel által sugallt eredményhez hasonló becslést ad független valószínűségi változók összegeinek az eloszlására, bár a nevezőben megjelenő $1+\frac{u}{3V_n^2}$ tényező kissé módosítja a képet. A következő észrevételben ennek a tényezőnek a hatását tekintem át különböző esetekben.

a) Ha $u \le \varepsilon V_n^2$ valamely kis $\varepsilon > 0$ számmal, akkor $P(S_n > u) \le e^{-(1-\varepsilon)u^2/2V_n^2}$. Ez majdnem olyan jó becslés, mint amilyet a centrális határeloszlástétel sugall.
b) Ha $u \le 3V_n^2$, akkor $P(S_n > u) \le e^{-\text{const.}\, u^2/2V_n^2}$. Ez a centrális határeloszlástétel által sugallt eredményhez hasonló becslés, némileg rosszabb konstanssal az exponensben.
c) Ha $u \gg V_n^2$, akkor

$$P(S_n > u) \le e^{-u}. \tag{2.2}$$

Ez nagyon rossz becslés. Speciálisan, az itt felírt felső korlát nem függ az összeg szórásnégyzetétől.

Felmerül a kérdés, hogy lehet-e a Bernstein egyenlőtlenséget javítani a 'rossz' $u \gg V_n^2$ esetben? Erre a kérdésre igenlő választ lehet adni . Az alább ismertetett Bennett egyenlőtlenség a Bernstein egyenlőtlenség enyhe javítását biztosítja ebben az esetben.

**Bennett egyenlőtlenség.** *Legyen $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók sorozata, amelynek tagjai teljesítik a $P(|\xi_j| \le 1) = 1$, $EX_j = 0$, $1 \le j \le n$, azonosságokat. Vezessük be a $\sigma_j^2 = E\xi_j^2$, $1 \le j \le n$, $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$ és $V_n^2 = \operatorname{Var} S_n = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$ jelöléseket. Ekkor*

$$P(S_n > u) \le \exp\left\{-V_n^2\left[\left(1+\frac{u}{V_n^2}\right)\log\left(1+\frac{u}{V_n^2}\right)-\frac{u}{V_n^2}\right]\right\}$$

*minden $u > 0$ számra.*

*Ezért létezik olyan $B = B(\varepsilon) > 0$ szám minden $\varepsilon > 0$-ra, amelyre*

$$P(S_n > u) \le \exp\left\{-(1-\varepsilon)u\log\frac{u}{V_n^2}\right\} \quad \text{ha } u > BV_n^2,$$

*és létezik olyan $K > 0$ szám, amelyre*

$$P(S_n > u) \le \exp\left\{-Ku\log\frac{u}{V_n^2}\right\} \quad \text{ha } u \ge 3V_n^2. \tag{2.3}$$

A (2.3) formula a (2.2) képlet enyhe javítását biztosítja, de ez a becslés is nagyon távol van a centrális határeloszlás által sugallt becsléstől. Ugyanakkor a következő példa azt mutatja, hogy ez az eredmény nem javítható.

**Alsó becslés független egyforma eloszlású valószínűségi változók eloszlására egy alkalmas példában.** *Rögzítsünk egy $n$ pozitív egész és két $u$ és $\sigma^2$ pozitív valós számot, úgy, hogy $0 < \sigma^2 \le \frac{1}{8}$, $n > 3u \ge 6$ és $u > 3n\sigma^2$. Vezessük be a $V_n^2 = n\sigma^2$ mennyiséget, és tekintsük olyan független, egyforma eloszlású $\xi_1, \dots, \xi_n$*

*valószínűségi változók sorozatát, amelyek eloszlását a* $P(\xi_j = 1) = P(\xi_j = -1) = \frac{\sigma^2}{2}$ *és* $P(\xi_j = 0) = 1-\sigma^2$ *képletek adják meg. Legyen* $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$*. Ekkor* $ES_n = 0$*,* $\operatorname{Var} S_n = V_n^2$*, és*

$$P(S_n \ge u) > \exp\left\{-Bu \log \frac{u}{V_n^2}\right\} \tag{2.4}$$

*alkalmas* $B > 0$ *számmal.*

A (2.4) becslés hasonló alsó becslést ad egy speciális esetben, mint az ugyanolyan valószínűség vizsgálatában megjelenő (2.3) felső becslés. Az egyetlen különbség a két becslés között az, hogy a bennük megjelenő $K > 0$ és $B > 0$ konstansok más értékeket vehetnek fel. A fenti eredményeket a következőképp foglalhatjuk össze.

A $P(S_n > u)$ valószínűség egy a (centrális határeloszlástétel alapján sugallt) jó becslést teljesít kis $u > 0$ számokra, (akkor, ha $u \le \varepsilon V_n^2$). Ez a mennyiség egy némileg rosszabb becsést teljesít nem túl nagy $u$ számokra, (akkor, ha $\varepsilon V_n^2 \le u \le CV_n^2$ valamely fix $C > 0$ számra), és csak egy nagyon gyenge becslést teljesít nagy $u$ számokra, (akkor, ha $u \gg V_n^2$).

## 3. Néhány az általános eset vizsgálatában hasznos eredmény.

A Probléma A) vizsgálatában a $k \ge 1$ esetben is hasonló eredmények érvényesek, mint az előbb tárgyalt $k = 1$ esetben. Annak érdekében, hogy ezt a hasonlóságot jobban megértsük, először a következő két kérdést érdemes részletesebben tárgyalni.

*1. kérdés:* A $k = 1$ esetben *nulla várható értékű* független valószínűségi változók összegét tekintettük. Milyen normalizálás felel meg e feltételnek a $k \ge 2$ esetben?

*2. kérdés:* A $k = 1$ esetben a centrális határeloszlástétel és a normális eloszlás viselkedése volt a becslések hátterében. Milyen határeloszlástétel és becslő függvény veszi át ezek szerepét a $k \ge 2$ esetben?

*Az első kérdés tárgyalása.*

Érdemes először a minket érdeklő véletlen mennyiségek második momentumát tekinteni. Mivel nulla várható értékű független valószínűségi változókat adtunk össze, a $k = 1$ esetben a következő azonosság teljesül:

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var} \xi_k,$$

mert $E\xi_i\xi_j = 0$ minden $i \ne j$ párra ebben az esetben.

Ennek az azonosságnak a többváltozós megfelelője ($U$-statisztikákra) a következő azonosság lenne:

$$
\begin{aligned}
I_{n,k}(f) &= \operatorname{Var}\left(\frac{1}{k!}\sum_{\substack{1\le j_s\le n,\ s=1,\dots,k,\\ j_s\ne j_{s'} \text{ ha } s\ne s'}} f(\xi_{j_1},\dots,\xi_{j_k})\right)\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\substack{1\le j_s\le n,\ s=1,\dots,k,\\ j_s\ne j_{s'} \text{ ha } s\ne s'}} \operatorname{Var} f(\xi_{j_1},\dots,\xi_{j_k})
\end{aligned}
$$

Ez az azonosság érvényes, ha

$$
Ef(\xi_{j_1},\dots,\xi_{j_k})f(\xi_{j'_1},\dots,\xi_{j'_k})=0
$$

szám $k$-asok minden $\{j_1,\dots,j_k\}\ne\{j'_1,\dots,j'_k\}$ párjára. Ez a tulajdonság teljesül az alább definiált elfajuló $U$-statisztikák esetében.

**Elfajuló $U$-statisztikák definiciója.** *Vegyünk egy független, egyforma, $\mu$ eloszlású $\xi_1,\dots,\xi_n$ valószínűségi változók és valamely $f(x_1,\dots,x_k)$ magfüggvény által definiált $I_{n,k}(f)$ $U$-statisztikát. Ez az $U$-statisztika elfajuló, ha*

$$
\begin{aligned}
&Ef(\xi_1,\dots,\xi_k|\xi_1=x_1,\dots,\xi_{j-1}=x_{j-1},\xi_{j+1}=x_{j+1},\dots,\xi_k=x_k)=0\\
&\qquad\qquad \textit{minden } 1\le j\le k \textit{ indexre és } x_s\in X,\ s\in\{1,\dots,k\}\setminus\{j\} \textit{ pontra.}
\end{aligned}
$$

Egy $U$-statisztika elfajuló, ha a magfüggvénye kanonikus függvény, azaz a következő tulajdonsággal rendelkezik.

**Kanonikus függvény definiciója.** *Egy az $(X,\mathcal{X})$ tér $k$-adrendű $(X^k,\mathcal{X}^k)$ direkt szorzatán definiált $f(x_1,\dots,x_k)$ függvény kanonikus egy az $(X,\mathcal{X})$ téren definiált $\mu$ valószínűségi mérték szerint, ha*

$$
\begin{aligned}
&\int f(x_1,\dots,x_{j-1},u,x_{j+1},\dots,x_k)\mu(\,du)=0\\
&\qquad \textit{minden } \ 1\le j\le k \textit{ számra és } x_s\in X,\ s\in\{1,\dots,k\}\setminus\{j\} \textit{ pontra.}
\end{aligned}
$$

Az elfajuló $U$-statisztikák fogalma azért hasznos, mert azok sok tekintetben úgy viselkednek, mint független *nulla várható értékű* valószínűségi változók összegei. Ezenkívül általános $U$-statisztikák vizsgálata visszavezethető elfajuló $U$-statisztikák vizsgálatára a következő Hoeffding-féle dekompozíció segítségével.

**Általános $U$-statisztikák Hoeffding-féle dekompozíciója.** *Minden $k$-ad rendű $I_{n,k}(f)$ $U$-statisztika felírható* elfajuló $U$-statisztikák

$$
I_{n,k}(f)=\sum_{j=0}^{k} n^{k-j} I_{n,j}(f_j) \tag{3.1}
$$

*lineáris kombinációjaként. A (3.1) dekompozicióban szereplő $I_{n,j}(f_j)$, $0 \le j \le k$, elfajuló $U$-statisztikák $f_j$ magfüggvényei explicit módon kiszámíthatóak. Meg lehet mutatni azt is, hogy ezek teljesítik az*

$$\int f_j^2(x_1,\dots,x_j)\mu(\,dx_1)\dots\mu(\,dx_j) \le \int f^2(x_1,\dots,x_k)\mu(\,dx_1)\dots\mu(\,dx_k)$$

*egyenlőtlenséget minden $0 \le j \le k$ indexre.*

Az (1.1) formulában definiált $J_{n,k}(f)$ többváltozós véletlen integrálok viselkedéséről szóló probléma is visszavezethető alkalmas dekompozíció segítségével elfajuló $U$-statisztikák vizsgálatára. Ezek a kifejezések is felírhatóak elfajuló $U$-statisztikák

$$J_{n,k}(f) = \sum_{j=0}^{k} c(n,j)n^{-j/2} I_{n,j}(f_j) \tag{3.2}$$

lineáris kombinációiként a (3.1) formulában szereplő $f_j$ kanonikus függvényekkel, és olyan alkalmas $c(n,j)$ együtthatókkal, melyekre $c(n,j) < K(j)$ valamely univerzális $K(j)$ konstanssal.

A $J_{n,k}(f)$ véletlen integrál definiciójában a $\mu_n - \mu$ előjeles mérték szerint integrálunk, és ez a 'normálás' csökkenti az integrál értékét. Ez a csökkentő hatás a $c(n,j)n^{-j/2}$ együttható viszonylag kis értékében tükröződik.

*A második kérdés tárgyalása.*

Az előző eredmények azt sugallják, hogy $U$-statisztikák és több-változós véletlen integrálok vizsgálatában az elfajuló $U$-statisztikák normalizáltjait megadó határeloszlástételekben megjelenő határeloszlások veszik át a normális eloszlás szerepét. Az elfajuló $U$-statisztikák aszimptotikus viselkedését leíró határeloszlástételek ismertek, és azok egy fehér zaj szerinti több-változós Wiener–Itô integrál segítségével adhatóak meg. Ezen eredmények megfogalmazásához először felidézem a fehér zaj fogalmát.

**A fehér zaj fogalma.** *Legyen adva van egy $\mu$ mérték egy $(X,\mathcal{X})$ téren. Valamely az $A \subset X$, $\mu(A) < \infty$ halmazokkal indexelt együttesen normális eloszlású valószínűségi változók rendszere fehér zaj $\mu$ referencia mértékkel, ha*

$$E\mu_W(A)\mu_W(B) = \mu(A\cap B) \quad \text{és} \quad E\mu_W(A) = 0$$

*minden mérhető $A,B \subset X$, $\mu(A) < \infty$ és $\mu(B) < \infty$ halmazpárra.*

Ha adott egy $\mu$ mértékhez, mint referencia mértékhez tartozó $\mu_W$ fehér zaj és egy a $\mu$ mérték ($k$-ik hatványa) szerint négyzetesen integrálható $f(x_1,\dots,x_k)$ függvény, akkor egyszerű és természetes módon definiálhatjuk ennek a függvénynek a $\mu_W$ fehér zaj szerinti $k$-ad rendű

$$Z_{\mu,k}(f) = \int f(x_1,\dots,x_k)\mu_W(\,dx_1)\dots\mu_W(\,dx_k) \tag{3.3}$$

Wiener–Itô integrálját. (Először egyszerű, véges sok téglatesten konstans értéket felvevő, másutt eltűnő úgynevezett lépcsős fügvényekre definiáljuk ezt az integrált, majd alkalmas $L_2$-izomorfia segítségével kiterjesztjük azt általános függvényekre.)

A következő eredmény érvényes:

**Határeloszlástétel elfajuló $U$-statisztikákra.** *Tekintsük $I_{n,k}(f)$, $n = k, k+1, \dots$, elfajuló $U$-statisztikák olyan sorozatát, amelyet egy értékeit valamely $(X, \mathcal{X})$ téren felvevő, független, egyforma, $\mu$ eloszlású $\xi_1, \xi_2, \dots$, valószínűségi változók sorozata és egy $k$-változós, az $(X, \mathcal{X})$ téren definiált és a $\mu$ mérték szerint négyzetesen integrálható (kanonikus) $f(x_1, \dots, x_k)$ függvény határoz meg. Az $n^{-k/2} I_{n,k}(f)$ normalizált elfajuló $U$-statisztikák eloszlásban konvergálnak az $f$ függvénynek egy a $\mu$ referencia mértékű $\mu_W$ fehér zaj szerinti*

$$\frac{1}{k!} Z_{\mu,k}(f) = \frac{1}{k!} \int f(x_1, \dots, x_k) \mu_W(\,dx_1) \dots \mu_W(\,dx_k)$$

*Wiener–Itô integráljához, ha $n \to \infty$.*

*Az előző eredmény heurisztikus indoklása:*

Ha $I_{n,k}(f)$ elfajuló $U$-statisztika, akkor felírhatjuk az

$$\begin{aligned} n^{-k/2} I_{n,k}(f) &= n^{k/2} \int' f(x_1, \dots, x_k) \mu_n(\,dx_1) \dots \mu_n(\,dx_k) \\ &= n^{k/2} \int' f(x_1, \dots, x_k)(\mu_n(\,dx_1) - \mu(\,dx_1)) \dots (\mu_n(\,dx_k) - \mu(\,dx_1)), \end{aligned}$$

azonosságot, ahol $\mu_n$ az $\xi_1, \dots, \xi_n$ sorozat empirikus eloszlásfüggvénye. Továbbá a $\sqrt{n}(\mu_n(\cdot) - \mu(\cdot))$ normalizált empirikus eloszlások konvergálnak egy $\mu$ referencia mértékű $\mu_W$ fehér zajhoz. Ez azt sugallja, hogy a határátmenet során a $\sqrt{n}(\mu_n(\cdot) - \mu(\cdot))$ normalizált empirikus eloszlásokat helyettesíthetjük ezzel a $\mu_W(\cdot)$ fehér zajjal. A tényleges bizonyítás ennek a heurisztikus gondolatnak az igazolásából áll.

A bevezetésben megfogalmazott problémákat természetes kiegészíteni azok Wiener–Itô integrálokról szóló megfelelőikkel. Ezek megoldása sugallja azt, hogy milyen eredményeket várhatunk a minket érdeklő problémákban.

Ezért tekintsük egy $k$ változós $f(x_1, \dots, x_k)$ függvény

$$Z_{\mu,k}(f) = \int f(x_1, \dots, x_k) \mu_W(\,dx_1) \dots \mu_W(\,dx_k)$$

Wiener-Itô integrálját egy $\mu$ referencia mértékkel rendelkező $\mu_W$ fehér zaj szerint, és fogalmazzuk meg a következő problémákat:

*Probléma A″).* Adjunk jó becslést a $P(Z_{\mu,k}(f) > u)$ valószínűségre minden $u > 0$ számra.

Probléma B″). Legyen adva $k$-változós $f(x_1,\dots,x_k)$ függvények egy szép $\mathcal{F}$ családja. Vegyük e függvénycsalád mindegyik elemének a Wiener–Itô integrálját a $\mu_W$ fehér zaj szerint. Adjunk jó becslést ezen integrálok szuprémumának az eloszlására, azaz a $P\left(\sup\limits_{f\in\mathcal{F}} Z_{\mu,k}(f)>u\right)$ valószínűségre minden $u>0$ számra.

**4. Véletlen integrálok és $U$-statisztikák eloszlásáról szóló eredmények.**

Érdemes először a Probléma A″)-val, azaz több-változós Wiener–Itô integrálok eloszlásának becslésével foglalkozni. Erről szól a következő eredmény.

**Becslés Wiener–Itô integrálok eloszlásáról.** *Legyen adva egy $\mu$ referencia mértékkel rendelkező $\mu_W$ fehér zaj és egy olyan $k$-változós $f(x_1,\dots,x_k)$ függvény egy $(X,\mathcal{X})$ mérhető téren, amelyre*

$$\frac{1}{k!}\int f^2(x_1,\dots,x_k)\mu(\,dx_1)\dots\mu(\,dx_k)\le\sigma^2$$

*valamely $\sigma^2<\infty$ számmal. A (3.3) formulában bevezetett*

$$Z_{\mu,k}(f)=\int f(x_1,\dots,x_k)\mu_W(\,dx_1)\dots\mu_W(\,dx_k)$$

*Wiener–Itô integrál teljesíti a*

$$P(|Z_{\mu,k}(f)|>u)\le C\exp\left\{-\frac12\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{2/k}\right\}$$

*egyenlőtlenséget minden $u>0$ számra valamely csak az integrál $k$ multiplicitásától függő $C=C(k)>0$ konstanssal.*

A következő példa azt mutatja, hogy ez a becslés éles.

**Alsó becslés egy speciális Wiener–Itô integrál farok eloszlásáról.** *Legyen adva egy $\sigma$-véges $\mu$ mérték valamely $(X,\mathcal{X})$ mérhető téren, valamint egy $\mu_W$ fehér zaj az $(X,\mathcal{X})$ téren ezzel a $\mu$ referencia mértékkel. Legyen $f_0(x)$ olyan valós értékű függvény az $(X,\mathcal{X})$ téren, amelyre $\int f_0(x)^2\mu(\,dx)=1$. Vezessük be az $f(x_1,\dots,x_k)=\sigma f_0(x_1)\cdots f_0(x_k)$ függvényt valamely $\sigma>0$ számmal, és tekintsük a (3.3) formulában bevezetett $Z_{\mu,k}(f)$ Wiener–Itô integrált. Ekkor az*

$$\int f(x_1,\dots,x_k)^2\,\mu(\,dx_1)\dots\,\mu(\,dx_k)=\sigma^2$$

*azonosság érvényes, a $Z_{\mu,k}(f)$ Wiener–Itô integrál pedig teljesíti a*

$$P(|Z_{\mu,k}(f)|>u)\ge\frac{\bar C}{\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{1/k}+1}\exp\left\{-\frac12\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{2/k}\right\}$$

*egyenlőtlenséget minden $u > 0$ számra valamely alkalmas $\bar{C} > 0$ konstanssal.*

A fenti eredményekben szereplő

$$\sigma^2 = \int f(x_1, \dots, x_k)^2 \, \mu(\,dx_1) \dots \mu(\,dx_k)$$

integrál megegyezik a $(k!)^{-1/2} Z_{\mu,k}(f)$ véletlen integrál szórásnégyzetével. Ezért ezeket az eredményeket úgy is lehet interpretálni, hogy

$$P(Z_{k,\mu}(f) > u) \le \text{const.}\, P(\sigma\eta^k > u)$$

minden $u > 0$ számra, ahol $\eta$ standard normális eloszlású valószínűségi változó, és $\sigma^2 = (k!)^{-1/2} E Z_{\mu,k}(f)^2$. Továbbá, ez a becslés éles.

Hasonló, bár némileg gyengébb becslések érvényesek elfajuló $U$-statisztikákra és normalizált empirikus eloszlások szerinti véletlen integrálokra.

**Becslés elfajuló $U$-statisztikák farok eloszlásáról.** *Legyen $\xi_1, \dots, \xi_n$ független egyforma, $\mu$ eloszlású valószínűségi változók sorozata, melyek értékeiket egy $(X, \mathcal{X})$ mérhető téren veszik fel. Vegyünk egy az $(X^k, \mathcal{X}^k)$ téren definiált a $\mu$ mérték szerint kanonikus $f(x_1, \dots, x_k)$ függvényt, amely teljesíti az*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x_j \in X,\, 1 \le j \le k} |f(x_1, \dots, x_k)| \le 1 \tag{4.1}$$

$$\|f\|_2^2 = \int f^2(x_1, \dots, x_k) \mu(\,dx_1) \dots \mu(\,dx_k) \le \sigma^2 \tag{4.2}$$

*feltételeket valamely $0 < \sigma^2 \le 1$ számmal, és tekintsük az e mennyiségek segítségével az (1.2) formulában definiált (elfajuló) $U$-statisztikát. Ekkor léteznek olyan csak az $U$-statisztika $k$ rangjától függő $A = A(k) > 0$ és $B = B(k) > 0$ konstansok, amelyekkel teljesül a*

$$P(k! n^{-k/2} |I_{n,k}(f)| > u) \le A \exp\left\{ -\frac{u^{2/k}}{2\sigma^{2/k} \left(1 + B \left(u n^{-k/2} \sigma^{-(k+1)}\right)^{1/k}\right)} \right\} \tag{4.3}$$

*egyenlőtlenség minden $0 \le u \le n^{k/2} \sigma^{k+1}$ számra.*

A fenti egyenlőtlenség tekinthető a Bernstein egyenlőtlenség több-változós általánosításának. Normalizált empirikus mértékek szerinti több-változós integrálokra a következő, hasonló becslés érvényes.

**Becslés normalizált empirikus mérték szerinti integrál farok eloszlásáról.** *Legyen adva $\xi_1, \dots, \xi_n$ független egyforma, $\mu$ eloszlású valószínűségi változók sorozata, amelyek értékeiket egy $(X, \mathcal{X})$ mérhető téren veszik fel és egy az $(X^k, \mathcal{X}^k)$ szorzattéren definiált $f(x_1, \dots, x_k)$ függvény, amely teljesíti a (4.1) és (4.2) relációkat valamely $0 < \sigma \le 1$ konstanssal. Ekkor léteznek olyan csak az $f$ függvény* *az (1.1) képletben definiált $J_{n,k}(f)$ integrál $k$ multiplicitásától függő $C = C_k > 0$ és $\alpha = \alpha_k > 0$ konstansok, amelyekkel teljesül a*

$$P\left(|J_{n,k}(f)| > u\right) \le C \exp\left\{-\alpha \left(\frac{u}{\sigma}\right)^{2/k}\right\} \quad \textit{minden } 0 < u \le n^{k/2}\sigma^{k+1} \textit{ számra.}$$

*egyenlőtlenség.*

A $k = 1$ esetben láttuk, hogy $n$ független, egyforma eloszlású, korlátos (és nulla várható értékű) valószínűségi változók $n^{-1/2}S_n$ normalizált összegének

$$P(n^{-1/2}S_n > u)$$

farok eloszlására a $u \gg n^{1/2}\sigma^2$ esetben csak rossz, a normális eloszlástól nagyon különböző becslést lehet adni. A $k \ge 2$ esetben hasonlóan az $u \gg n^{k/2}\sigma^{k+1}$ értékekre nem lehet jó, a Wiener–Itô integrálok viselkedése által sugallt becslést adni. Ez azt jelenti, hogy az előbb az elfajuló $U$-statisztikákra és normalizált empirikus mértékek szerinti véletlen integrálokra megfogalmazott becslések abban az értelemben is élesek, hogy pontosan megadják azt a tartományt, ahol a Wiener–Itô integrálok viselkedése által sugallt éles becslés érvényes.

A teljesség kedvéért megadok a $k = 2$ esetben olyan elfajuló $U$-statisztikát, amelyre $u \gg n\sigma^3$ esetben a (4.3) formulánál sokkal gyengébb becslés érvényes.

**Alsó becslés elfajuló $U$-statisztika farok eloszlására egy alkalmas példában a $k = 2$ esetben.** *Legyen $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, amelyek értékeiket a síkon veszik fel. Legyen $\xi_j = (\eta_{j,1}, \eta_{j,2})$, $1 \le j \le n$, ahol $\eta_{j,1}$ és $\eta_{j,2}$ független valószínűségi változók, $P(\eta_{j,1} = 1) = P(\eta_{j,1} = -1) = \frac{\sigma^2}{8}$, $P(\eta_{j,1} = 0) = 1 - \frac{\sigma^2}{4}$, $P(\eta_{j,2} = 1) = P(\eta_{j,2} = -1) = \frac{1}{2}$ minden $1 \le j \le n$ indexre. Vezessük be az $f(x, y) = f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$, $x = (x_1, x_2) \in R^2$, $y = (y_1, y_2) \in R^2$, függvényt, és definiáljuk az*

$$I_{n,2}(f) = \sum_{1 \le j,k \le n,\, j \ne k} (\eta_{j,1}\eta_{k,2} + \eta_{k,1}\eta_{j,2})$$

*másodrendű $U$-statisztikát az előbb bevezetett $f$ magfüggvénnyel és $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változókkal. Ekkor $I_{n,2}(f)$ elfajuló $U$-statisztika. Továbbá, ha $u \ge B_1 n\sigma^3$ valamely alkalmas $B_1 > 0$ konstanssal, $B_2^{-1}n \ge u \ge B_2 n^{-2}$ egy elég nagy alkalmas $B_2 > 0$ konstanssal, és $\frac{1}{n} \le \sigma \le 1$, akkor a*

$$P(n^{-1}I_{n,2}(f) > u) \ge \exp\left\{-Bn^{1/3}u^{2/3}\log\left(\frac{u}{n\sigma^3}\right)\right\}$$

*egyenlőtlenség teljesül valamely $B > 0$ konstanssal, amely nem függ sem az $n$ sem a $\sigma$ paramétertől.*

## 5. Az eredmények rövid magyarázata.

Azt érdemes megmutatni, hogy az $I_{n,k}(f)$ elfajuló $U$-statisztikáknak (magas) páros kitevőjű $EI_{n,k}(f)^{2M}$ momentumai olyan becsléseket teljesítenek, mint egy 0 várható értékű, alkalmas szórásnégyzetű $\eta$ normális eloszlású valószínűségi változó $E\eta^{2kM}$ momentumai. Ilyen becslésekből ugyanis egyrészt egyszerűen (a Markov egyenlőtlenség segítségével) be lehet bizonyítani a minket érdeklő egyenlőtlenségeket, másrészt létezik egy olyan módszer, amely lehetővé teszi az ilyen momentumok becslését.

A többváltozós véletlen integrálok (és a matematikai fizika) elméletében fontos szerepet játszó úgynevezett diagram formulát érdemes alkalmazni. Ezt használva ki lehet számolni a minket érdeklő momentumokat bizonyos diagramok segítségével definiált integrálok összegeként. Azt kell megmutatni, hogy általában a "Gauss eloszlás hatásának megfelelő diagramok" által definiált integrálok adják a momentumok kiszámolásában a fő hozadékot. Ez a tény ad magyarázatot arra, hogy elfajuló $U$-statisztikák és normalizált empirikus mértékek szerinti véletlen integrálok eloszlásának becslésében miért kapunk olyan eredményeket, mint amilyeneket a több-változós Wiener–Itô integrálok viselkedése, (azaz a Gauss eset) sugall.

Többváltozós véletlen integrálok, illetve $k \ge 2$ rangú elfajuló $U$-statisztikák momentum becsléseinek az elmagyarázása meglehetősen bonyolult jelölésrendszer kidolgozását igényli, amire ebben a rövid áttekintésben nincs lehetőségem. Viszont érdemes a legegyszerűbb $k = 1$ esetben megjelenő független, egyforma eloszlású valószínűségi változók összegeinek, illetve ezek momentumainak a becslését röviden áttekinteni. Ez ugyanis sokat elmagyaráz a momentumok viselkedéséről az általános esetben is.

Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyekre $E\xi_1 = 0$, $\operatorname{Var}\xi_1 = \sigma^2$, és becsüljük meg az $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$ összeg momentumait. Felírhatjuk az

$$ES_n^{2M} = \sum_{\substack{(j_1,\dots,j_s,l_1,\dots,l_s)\\ j_1+\cdots+j_s=2M,\ j_u\ge 2,\ \text{minden } 1\le u\le s \text{ indexre}\\ l_u\ne l_{u'} \text{ ha } u\ne u'}} E\xi_{l_1}^{j_1}\cdots E\xi_{l_s}^{j_s} \tag{5.1}$$

azonosságot.

Egyszerű kombinatorikai meggondolások azt adják, hogy az (5.1) azonosság jobboldalán szereplő összegben a tagok jelentős része olyan $(j_1, \dots, j_M, l_1, \dots, l_M)$ vektorral van indexelve, amelyre $j_u = 2$ minden $1 \le u \le M$ számra. Az ilyen tagok száma $\binom{n}{M}\frac{(2M)!}{2^M} \sim n^M \frac{(2M)!}{2^M M!}$. Ezért azt várjuk, hogy tipikus esetekben $ES_n^{2M} \sim \left(n\sigma^2\right)^M \frac{(2M)!}{2^M M!}$ Ez a meggondolás a

$$\sum_{1\le l_1<l_2<\cdots<l_M\le n} E\xi_{l_1}^2\cdots E\xi_{l_M}^2 = \binom{n}{M}\frac{(2M)!}{2^M}\sigma^{2M} \sim \frac{(2M)!}{2^M M!}(n\sigma^2)^M = E\eta^{2M}$$

becslést sugallja a $ES_n^{2M}$ mennyiségre, ahol $\eta$ olyan normális eloszlású valószínűségi változó, amelynek várható értéke 0 és szórásnégyzete $\operatorname{Var} S_n$.

A fenti gondolatmenet megmutatja, hogy miért várhatunk olyan becsléseket független, nulla várható értékű valószínűségi változók összegeinek momentumaira, mint a Gauss esetben. Szép esetekben ez a heurisztikus érvelés helyes eredményt ad.

Viszont a részletek kidolgozásakor finomabb meggondolásokat is kell alkalmazni. Nem elég csak a különböző típusú tagok számát jól megbecsülni, azt is figyelembe kell venni, hogy a különböző típusú tagoknak mi a nagyságrendje. Lehetséges ugyanis, hogy viszonylag kevés, de relatíve nagy összeadandó adja a lényeges hozadékot az (5.1) formula jobboldalán szereplő összegben.

Tekintsük például a következő esetet. Legyenek a vizsgált összeg tagjai a következő alakúak: $P(\xi_1=1)=P(\xi_1=-1)=\frac{\sigma^2}{2}$, $P(\xi_1=0)=1-\sigma^2$. Ha $\sigma^2$ nagyon kicsi és $M$ nagy, akkor

$$\sum_{j=1}^n E\xi_j^{2M}=n\sigma^2\gg\sum_{1\le l_1<l_2<\cdots<l_M\le n}E\xi_{l_1}^2\cdots E\xi_{l_M}^2\sim\frac{(2M)!}{2^M M!}n^M\sigma^{2M}.$$

A fenti példa részleteinek kidolgozása az általános esetben, jelzi hogy csak akkor kaphatunk jó becslést véletlen összegek magas momentumaira, ha az összeadandók szórásnégyzete nem túl kicsi, és nem túl magas momentumokat becsülünk. Az, hogy csak bizonyos megszorítások mellett tudunk jó momentum becsléseket bizonyítani, szoros kapcsolatban van azzal a ténnyel, hogy csak nem túl nagy értékekre tudtunk jó becsléseket adni a normalizált empirikus mérték szerinti több-változós integrálok és elfajuló $U$-statisztikák farok eloszlására.

## 6. Véletlen integrálok és $U$-statisztikák szuprémumának becslése.

Tekintsük függvények egy családjának az integrálját egy normalizált empirikus mérték szerint, vagy olyan (elfajuló) $U$-statisztikák rendszerét, amelyekben ugyanazoknak a független valószínűségi változók sorozatának a segítségével definiáljuk az $U$-statisztikákat, és a lehetséges magfüggvények egy alkalmas függvénycsalád elemei. Véletlen integrálok vagy $U$-statisztikák ilyen családjának a szuprémumára kívánunk jó becslést adni. Azt várjuk, hogy viszonylag nagy függvénycsaládok esetében is olyan becslés kapható, mint akkor ha a szuprémumban szereplő valószínűségi változókat egy kivétellel elhagyjuk, és csak a 'legrosszabb' elemet tartjuk meg; azt amelyikre a leggyengébb becslést tudjuk adni. Az alábbiakban ilyen jellegű eredményeket ismertetek. Először meg kell találnunk az olyan függvény családok definicióját, amelyekre jó és tartalmas eredményeket várhatunk.

Olyan függvénycsaládokat érdemes tekinteni, amelyekből kiválasztható olyan viszonylag kevés függvényből álló részhalmaz, amely valamilyen megfelelő értelemben e család elég sűrű részhalmazát alkotja. A következő két fogalom bevezetése bizonyult hasznosnak.

**Egy mérték szerint $L_2$-sűrű függvénycsalád definiciója.** *Legyen adva egy $(Y,\mathcal{Y})$, mérhető tér, egy az e téren megadott $\sigma$-véges $\nu$ mérték, valamint egy az e téren definiált valós értékű függvényekből álló $\mathcal{G}$ függvénycsalád. Ezt a $\mathcal{G}$ függvénycsaládot a $\nu$ mérték szerint $L_2$-sűrű függvénycsaládnak nevezzük $D$ paraméterrel és $L$ kitevővel, ha minden $0<\varepsilon<1$ számhoz létezik a $\mathcal{G}$ függvénycsaládnak olyan $m\le D\varepsilon^{-L}$ függvényből álló $\mathcal{G}_\varepsilon=\{g_1,\dots,g_m\}\subset\mathcal{G}$ részhalmaza, amely teljesíti a következő tulajdonságot:*

$$\inf_{g_j\in\mathcal{G}_\varepsilon}\int |g-g_j|^2\,d\nu<\varepsilon^2$$

*minden $g\in\mathcal{G}$ függvényre.*

A másik hasznosnak bizonyult definició:

**$L_2$-sűrű függvényosztályok definiciója.** *Legyen adva egy mérhető függvényekből álló $\mathcal{G}$ függvénycsalád egy $(Y,\mathcal{Y})$ mérhető téren. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{G}$ $L_2$-sűrű függvénycsalád $D$ paraméterrel és $L$ kitevővel, ha $\mathcal{G}$ $L_2$-sűrű függvénycsalád $D$ paraméterrel és $L$ kitevővel minden az $(Y,\mathcal{Y})$ téren definiált $\nu$ valószínűségi mérték szerint.*

Jelen esetben is érdemes a minket érdeklő Probléma B) és Probléma B$'$) előtt azt a Probléma B$''$)-t vizsgálni, amelyben Wiener–Itô integrálok szuprémumára kívánunk jó becslést adni. Azután érdemes a különböző problémákról kapott eredményeket összehasonlítani.

**Becslés Wiener–Itô integrálok szuprémumának az eloszlásáról.** *Tekintsünk valamely $(X,\mathcal{X})$ mérhető teret egy ezen a téren definiált $\sigma$-véges $\mu$ mértékkel együtt. Vegyünk egy olyan $\mu_W$ fehér zajt az $(X,\mathcal{X})$ téren, amelynek $\mu$ a referencia mértéke. Legyen továbbá adva egy olyan megszámlálható sok k-változós $f(x_1,\dots,x_k)$ függvényből álló $\mathcal{F}$ függvénycsalád, amely $L_2$-sűrű függvényosztályt alkot az $(X^k,\mathcal{X}^k)$ téren a $\mu^k$ szorzatmérték szerint valamely $D$ paraméterrel és $L$-kitevővel. Teljesítsék e függvényosztály elemei az alábbi egyenlőtlenséget is:*

$$\int f^2(x_1,\dots,x_k)\mu(\,dx_1)\dots\mu(\,dx_k)\le\sigma^2$$

*valamely $0<\sigma\le1$ számmal minden $f\in\mathcal{F}$ függvényre.*

*Tekintsük mindegyik $f\in\mathcal{F}$ függvénynek a (3.3) képletben bevezetett $Z_{\mu,k}(f)$ Wiener–Itô integrálját a $\mu_W$ fehér zaj szerint. Ezen integrálok szuprémuma teljesíti a*

$$P\left(\sup_{f\in\mathcal{F}}|Z_{\mu,k}(f)|>u\right)\le C(D+1)\exp\left\{-\alpha\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{2/k}\right\}$$

*egyenlőtlenséget, ha*

$$\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{2/k}\ge ML\log\frac{2}{\sigma} \tag{6.1}$$

*alkalmas $C = C(k) > 0$, $M = M(k) > 0$ és $\alpha = \alpha(k) > 0$ konstansokkal.*

A fenti tételben — a becslésben megjelenő univerzális konstansok értékétől eltekintve — ugyanazt a becslést kaptuk Wiener–Itô integrálok maximumának az eloszlására (alkalmas feltételek mellett), mint egyetlen Wiener–Itô integrál eloszlására. Az egyetlen lényeges különbség a két eredmény között az, hogy jelen esetben egy a (6.1) formulában megfogalmazott feltételt is előírtunk. Nem nehéz egy alkalmas példa segítségével megmutatni, hogy a fenti becslés csak ezen feltétel teljesülése esetén érvényes. Egy ilyen példa ismertetését azonban itt elhagyom.

A következő eredmény az (1.1) képletben definiált véletlen $J_{n,k}(f)$ integrálok szuprémumának a viselkedéséről szól.

**Becslés normalizált empirikus mértékek szerint több-változós integrálok szuprémumának az eloszlásáról.** *Legyen adva egy $\mu$ valószínűségi mérték egy $(X, \mathcal{X})$ mérhető téren, valamint $k$-változós $f = f(x_1, \dots, x_k)$ függvényeknek olyan megszámlálható $L_2$-sűrű $\mathcal{F}$ családja valamely $D$ paraméterrel és $L$, $L \ge 1$, kitevővel az $(X^k, \mathcal{X}^k)$ szorzattéren, amelynek elemei teljesítik a következő tulajdonságokat:*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x_j \in X,\ 1 \le j \le k} |f(x_1, \dots, x_k)| \le 1,$$

*és*

$$\int f^2(x_1, \dots, x_k)\mu(\,dx_1) \dots \mu(\,dx_k) \le \sigma^2$$

*minden $f \in \mathcal{F}$ függvényre valamely $0 < \sigma \le 1$ számmal. Ekkor léteznek olyan $C = C(k) > 0$, $\alpha = \alpha(k) > 0$ és $M = M(k) > 0$ csak a $k$ paramétertől függő számok úgy, hogy véve az $f \in \mathcal{F}$ függvényeknek valamely $\mu$ eloszlású $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók $\mu_n$ empirikus mértékének a normalizáltjai segítségével definiált $J_{n,k}(f)$ (véletlen) integráljait, ezen integrálok szuprémuma teljesíti a következő egyenlőtlenséget:*

$$P\left(\sup_{f \in \mathcal{F}} |J_{n,k}(f)| \ge u\right) \le CD \exp\left\{-\alpha \left(\frac{u}{\sigma}\right)^{2/k}\right\},$$

*feltéve, hogy*

$$n\sigma^2 \ge \left(\frac{u}{\sigma}\right)^{2/k} \ge M(L+\beta)^{3/2} \log \frac{2}{\sigma},$$

*ahol $\beta = \max\left(\frac{\log D}{\log n}, 0\right)$, a $D$ és $L$ számok pedig az $L_2$-sűrű $\mathcal{F}$ függvénycsalád paramétere és exponense.*

Hasonló becslés érvényes $I_{n,k}(f)$, $f \in \mathcal{F}$, $U$-statisztikák szuprémumára is. Az egyetlen újdonság ebben a becslésben az, hogy az előző tételben szereplő $\mathcal{F}$ függvénycsaládra tett feltételeket ki kell egészíteni azzal a megkötéssel, hogy az $I_{n,k}(f)$ $U$-statisztikák elfajulóak.

Egy lényeges különbség a $Z_{\mu,k}(f)$ Wiener–Itô és $J_{n,k}(f)$ normalizált empirikus mértékek szerint vett integrálok szuprémumára adott becslések között az, hogy az első esetben azt követeltük meg, hogy a $\mathcal{F}$ függvénycsalád $L_2$-sűrű legyen a $\mu^k$ szorzatmérték szerint, míg a második esetben az $L_2$-sűrű tulajdonságot követeltük meg az általános esetben, azaz minden valószínűségi mérték szerint. Mi ennek a különbségnek az oka?

Wiener–Itô integrálok szuprémumát meg lehet becsülni egy egyszerű és természetes módszer, az úgynevezett 'chaining argument' segítségével. A $J_{n,k}(f)$ véletlen integrálok esetében ez a módszer nem oldja meg a problémát, az csak részeredményeket ad. A teljes bizonyítás kidolgozásához más eszközök is szükségesek, és ezek alkalmazásához szigorúbb feltételek teljesülése szükéges.

A részletek kidolgozása sok munkát igényelne, és az eddigi problémák vizsgálatától lényegesen eltérő módszerek alkalmazását tenné szükségessé. Ezért megelégszem e fejezet eredményeinek rendkívül vázlatos indokolásával. A fő hangsúlyt az itt megjelenő új típusú problémák és gondolatok megfogalmazására helyezem. Először röviden ismertetem a 'chaining argument' módszerét.

*A 'chaining argument' módszer alkalmazása és e módszer korlátai.*

Alkalmazzuk a Wiener–Itô integrálok szuprémumának az eloszlásáról megfogalmazott becslés jelölésrendszerét. Vegyük minden $N = 1, 2, \dots$ indexre az $\mathcal{F}$ függvényosztály olyan viszonylag kis számosságú egymásba skatulyázott részhalmazainak $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_N \subset \cdots \subset \mathcal{F}$ rendszerét, amelyre teljesül az

$$\inf_{g\in\mathcal{F}_N} \int (f(x_1,\dots,x_k) - g(x_1,\dots,x_k))^2 \, \mu(\,dx_1)\dots\mu(\,dx_k) \le 2^{-2N}\sigma^2.$$

reláció minden $f \in \mathcal{F}$ függvényre. A

$$P\left(\sup_{g\in\mathcal{F}_N} Z_{\mu,k}(g) > u\left(1-2^{-N}\right)\right)$$

valószínűségeket jól lehet $N = 1, 2, \dots$ szerinti rekurzióval becsülni, mert minden $g \in \mathcal{F}_{N+1}$ függvényhez lehet találni olyan (hozzá közeli) $g' \in \mathcal{F}_N$ függvényt, amelyre

$$\int (g(x_1,\dots,x_k) - g'(x_1,\dots,x_k))^2 \, \mu(\,dx_1)\dots\mu(\,dx_k) \le 2^{-2N}\sigma^2.$$

Ezért a

$$P(|Z_{\mu,k}(g) - Z_{\mu,k}(g')| > 2^{-N}u) = P(|Z_{\mu,k}(g-g')| > 2^{-N}u)$$

valószínűséget jól becsülhető a Wiener–Itô integrálok farok-eloszlásának becsléséről szóló korábban ismertetett eredmény segítségével. E gondolatmenet részleteinek kidolgozásával viszonylag egyszerűen megkaphatjuk az itt tárgyalt becslés bizonyítását.

Az előbb tekintett 'chaining argument' nem elég erős normalizált empirikus mértékek szerinti véletlen integrálok vagy elfajuló $U$-statisztikák eloszlásának a becslésére. Ez csak azt teszi lehetővé, hogy a problémát arra az esetre redukáljuk, amikor

$$\sigma^2(f) = \int f^2(x_1, \dots, x_k)\mu(\,dx_1)\dots\mu(\,dx_k)$$

minden $f \in \mathcal{F}$ függvényre kicsi.

A 'chaining argument' módszer gyengeségének ebben az esetben a következő az oka: A

$$P(I_{n,k}(f) > u) \quad \text{vagy} \quad P(J_{\mu,k}(f) > u)$$

alakú valószínűségekre csak nagyon gyenge becslést kapunk, ha $\sigma^2(f)$ nagyon kicsi, és az $u$ szám viszonylag nagy. Itt annak a korábban tárgyalt jelenségnek a hatása jelenik, hogy kis szórásnégyzetű $U$-statisztikákra és normalizált empirikus mértékek szerinti véletlen integrálokra nem lehet olyan jó becsléseket kapni, mint amilyeneket a normális közelítés sugallna.

Ezt a nehézséget egy más módszerrel, egy úgynevezett szimmetrizációs eljárás segítségével lehet legyőzni. Ez a módszer a

$$P\left(\frac{1}{k!}\sup_{f\in\mathcal{F}} \sum_{\substack{1\le j_s\le n,\ s=1,\dots,k,\\ j_s\ne j_{s'} \text{ if } s\ne s'}} f(\xi_{j_1},\dots,\xi_{j_k}) > u\right)$$

alakú valószínűségek becslését visszavezeti

$$P\left(\frac{1}{k!}\sup_{f\in\mathcal{F}} \sum_{\substack{1\le j_s\le n,\ s=1,\dots,k,\\ j_s\ne j_{s'} \text{ if } s\ne s'}} \varepsilon_{j_1}\dots\varepsilon_{j_k} f(\xi_{j_1},\dots,\xi_{j_k}) > u\right), \tag{6.2}$$

alakú valószínűségek becslésére, ahol $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyekre $P(\varepsilon_j = 1) = P(\varepsilon_j = -1) = \frac{1}{2}$ minden $1 \le j \le n$ indexre, (és függetlenek az $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változóktól is).

A (6.2) formulában felírt valószínűséget jól lehet becsülni egy alkalmas 'conditioning argument' segítségével. Ennek a módszernek az alkalmazásakor a (6.2) formulában szereplő események feltételes valószínűségét kell jól megbecsülni a $\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n$ feltételek teljesülése esetén minden lehetséges $x_1, \dots, x_n$ értékre. Az ilyen feltételes valószínűségek kiszámítására jó (itt nem ismertetett módszerek) léteznek, de ezek csk $L_2$-sűrű függvényosztályokra alkalmazhatóak.

A fent vázlatosan ismertetett módszerek tárgyalásában a következő részletre érdemes felhívni a figyelmet. Normalizált empirikus mértékek és $U$-statisztikák szuprémumának becslésében más módszert alkalmaztunk a vizsgálatben megjelenő viszonylag nagy és kis szórású valószínűségi változók becslésében. Viszonylag nagy szórású valószínűségi változók esetében a 'chaining argument'-et alkalmaztuk a 4. fejezetben ismertetett eredményekkel együtt. Kis szórású valószínűségi változók esetében egy más módszert, egy szimmetrizációs eljárást használtunk. Annak, hogy a két esetben különböző eljárást alkalmaztunk mélyebb oka van.

A 'chaining argument' csak nem túl kis szórású $U$-statisztikák vagy normalizált empirikus mértékek szerinti véletlen integrálok vizsgálatában működik jól, akkor ha a vizsgált $U$-statisztikák vagy véletlen integrálok eloszlásai olyan becsléseket teljesítenek, mint amilyet az ilyen véletlen funkcionálok 'Gauss jellegű határfolyamatai' sugallnak. Lehet olyan 'irreguláris eseményeket' definiálni, amelyek megjelenése esetén a vizsgált $U$-statisztikák vagy véletlen integrálok nagyon nagy értéket vesznek fel. De az ilyen irreguláris események valószínűsége kicsi, és tipikus esetekben ezek hatása elhanyagolható. Viszont kis szórású $U$-statisztikák és véletlen integrálok esetében előfordul, hogy az ilyen irregularitások megjelenésének a valószínűsége viszonylag nagy, és ezek hatása a domináns.

A 'chaining argument' akkor működik jól, amikor az irregularitások hatása még elhanyagolható, és szép 'Gauss típusú' becslések érvényesek. A szimmetrizációs módszereket viszont akkor érdemes használni, ha az irreguláris hatások nem elhanyagolhatóak, és ezeket kell jól megbecsülni.

Jelen írásban egy fontos kérdéskör alapvető eredményeit próbáltam viszonylag röviden ismertetni az eredmények mögött rejlő heurisztikus képpel együtt. A téma részletesebb tárgyalása megtalálható az [1] munkámban. Továbbá egy Lecture Note-t készülök megjelentetni, amely tartalmazza a különböző részletek precíz, részletes kidolgozását. Ez a Lecture Note [2] jelenleg csak az interneten, a homepage-emen érhető el. Mind az [1] mind a [2] munka részletes irodalomjegyzéket tartalmaz.

## Irodalom


1.) Major Péter: Tail behaviour of multiple random integrals and $U$-statistics. *Probability Reviews.* 448–505, (2005)

2.) Major Péter: On the tail bevaviour of multiple random integrals and degenerate $U$-statistics. http://www.renyi.hu/~major