Az április 11-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

Tekintsük át valószínűségi változók várható értékének, szórásnégyzetének, eloszlásának általános definicióját, a várható érték és szórásnégyzet kiszámítását, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény definiciójának általános alakját, annak leírását, hogy hogyan számíthatjuk ki független valószínűségi változók összegének az eloszlásfüggvényét az eredeti eloszlásfüggvények ismeretében.

Egy valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett (mérhető) függvény. Ennek várható értéke e valószínűségi változó (Lebesgue értelemben vett) integrálja. Ennél a definiciónál sokkal fontosabb az alább ismertetendő eredmény, mely megadja, hogy hogyan kell a várható értéket effektive kiszámítani konkrét feladatokban. Általában nem adják meg konkrétan a valószínűségi mezőt, amelyen dolgozunk, csak a vizsgálandó valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Nagyon fontos, hogy egy valószínűségi változó várható értéket ennek az eloszlásfüggvénynek a segítségével is kiszámíthatjuk. Ennek az eredménynek az ismertetése érdekében bevezetünk előbb néhány fogalmat.

Eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény definiciója. *Egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye az $F(x)$ függvény, ha $P(\xi < x) = F(x)$ minden $-\infty < x < \infty$ számra. Azt mondjuk, hogy az $F(x)$ eloszlásfüggvénynek létezik $f(x)$, $-\infty < x < \infty$ sűrűségfüggvénye, ha $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ minden $-\infty < x < \infty$ számra.*

Megjegyzés: *Az eloszlásfüggvény definiciója az irodalomban nem teljesen egyértelmű. Van ahol ezt az $F(x) = P(\xi \le x)$ formulával definiálják, azaz a $<$ reláció helyett $\le$ relációt írnak. Ez a két definició akkor tér el, ha olyan valószínűségi változókat tekintünk, melyek bizonyos értékeket pozitív valószínűséggel is felvehetnek. Nem lehet e két lehetséges definició egyikét sem jobbnak tekinteni a másiknál. Viszont a finomabb vizsgálatokban fontos az egyik definicó rögzítése, és aztán annak következtetes alkalmazása.*

1. Ha ismert egy ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénye, akkor ezen $F(x)$ eloszlásfüggvény segítségével kiszámítható annak valószínűsége, hogy ez a valószínűségi változó egy $[a, b)$ balról zárt jobbról nyilt egy zárt intervallumba, egy zárt $[a, b]$ egy nyílt (a, b) intervallumba vagy mondjuk két (diszjunkt) $[a, b]$ és $[c, d]$ intervallum $[a, b] \cup [c, d]$ egyesítésébe esik. Általában kiszámítható annak valószinűsége, hogy ξ egy "természetes módon definiálható halmazba essék.

   $P(\xi \in [a, b)) = P(\{\omega\colon \xi(\omega) < b\} \setminus \{\omega\colon \xi(\omega) < a]|) = P(\xi < b) - P(\xi < a) = F(b) - F(a)$. $P(\xi \in [a, b]) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\xi \in \left[a, b + \frac{1}{n}\right)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(F\left(b + \frac{1}{n}\right) - F(a)\right)$. (Ebben a relációban kihasználtuk, hogy ha adva vannak egymásba skatulyázott $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ halmazok az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, akkor $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$. Ez mint megbeszéltük azzal függ össze, hogy a valószínűség nem csak additiv hanem σ-additiv is.) Hasonlóan $P(\xi \in (a, b)) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\xi \in \left[a + \frac{1}{n}, b\right)\right) =$

$\lim_{n\to\infty}\left(F(b)-F\left(a+\frac{1}{n}\right)\right)$. Végül $P(\xi\in[a,b]\cup[c,d])=P(\xi\in[a,b])+P(\xi\in[c,d])=\lim_{n\to\infty}\left(F\left(b+\frac{1}{n}\right)-F(a)\right)+\lim_{n\to\infty}\left(F\left(d+\frac{1}{n}\right)-F(c)\right)$.

Házi feladat:

Fejezzük ki annak valószínűségét, hogy egy $F(x)$ eloszlású valószínűségi változó egész értéket vesz fel az $F(x)$ eloszlásfüggvény segítségével.

Tétel. *Legyen ξ egy valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Ekkor a ξ valószínűségi változó várható értéke kiszámítható az*

$$E\xi=\int_{-\infty}^{\infty}xF(\,dx)$$

képlet segítségével. Ha az $F(x)$ eloszlásfüggvénynek létezik $f(x)$ sűrűségfüggvénye, akkor

$$E\xi=\int_{-\infty}^{\infty}xF(\,dx)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx.$$

Általánosabban, ha $h(x)$ (mérhető) függvény a számegyenesen, akkor a $h(\xi)$ valószínűségi változó kiszámítható az

$$Eh(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)F(\,dx)$$

képlet segítségével. Ha az $F(x)$ eloszlásfüggvénynek létezik $f(x)$ sűrűségfüggvénye, akkor

$$Eh(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)F(\,dx)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)f(x)\,dx.$$

Valószínűségi változó szórásnégyzetének a definiciója. *Egy ξ valószínűségi változó szórásnégyzetét az általános esetben is a $\operatorname{Var}\xi=E\left((\xi-E\xi)^2\right)$ képlet határozza meg. Továbbá igaz, hogy $\operatorname{Var}\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$. Ezért az előző eredmény alapján egy $F(x)$ eloszlású ξ valószínűségi változó szórásnégyzete*

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\xi&=\int_{-\infty}^{\infty}x^2F(\,dx)-\left(\int_{-\infty}^{\infty}xF(\,dx)\right)^2\\&=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\,dx-\left(\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx\right)^2\end{aligned}$$

ha az $F(x)$ eloszlásfüggvénynek létezik $f(x)$ sűrűségfüggvénye.

Tétel. *Ha ξ és η két* tetszőleges *valószínűségi változó, a és b valós számok, akkor $E(a\xi+b\eta)=aE\xi+bE\eta$.*

Ha ξ és η két független valószínűségi változó, a és b valós számok, akkor $\mathrm{Var}\,(a\xi + b\eta) = a^2 \mathrm{Var}\,\xi + b^2 \mathrm{Var}\,\eta$.

Ahhoz, hogy a fenti eredményt pontosan értsük tisztázni kell mint jelent valószínűségi változók függetlensége. Ezért felidézzük a következő definiciót:

Valószínűségi változók függetlensége. *Legyen $\xi_1, \dots, \xi_n$ n valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók (teljesen) függetlenek, ha minden (mérhető) $B_1, \dots, B_n$ halmazra a számegyenesen teljesül a*

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdots P(\xi_n \in B_n)$$

azonosság.

Igaz a következő tétel.

Tétel. *Legyen $\xi_1, \dots, \xi_n$ n valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. A $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók akkor és csak akkor (teljesen) függetlenek, ha minden $x_1, \dots, x_n$ valós számra*

$$P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = P(\xi_1 < x_1) \cdots P(\xi_n < x_n)$$

1. Adva egy B esemény ennek indikátor függvénye az a $\chi_B(\omega)$ valószínűségi változó, melyre $\chi_B(\omega) = 1$, ha $\omega \in B$, $\chi_B(\omega) = 0$, ha $\omega \notin B$. Az $A_1, \dots, A_n$ események akkor és csak akkor függetlenek, ha ezek $\chi_{A_1}(\omega), \dots, \chi_{A_n}(\omega)$ indikátorfüggvényei függetlenek.

   Lássuk először azt be, hogy amennyiben a $\chi_{A_1}(\omega), \dots, \chi_{A_n}(\omega)$ valószínűségi változók függetlenek, akkor az $A_1, \dots, A_n$ események is azok, azaz tetszőleges $\mathcal{J} = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ halmazra $P\left(\bigcap\limits_{j \in \mathcal{J}} A_j\right) = \prod\limits_{j \in \mathcal{J}} P(A_j)$. Valóban, legyen $x_j = \frac{1}{2}$, ha $j \in \mathcal{J}$, és $x_j = -\frac{1}{2}$, ha $j \notin \mathcal{J}$. Ekkor $\left\{\omega \colon \bigcap\limits_{j=1}^{n} \{\chi(A_j) > x_j\}\right\} = \bigcap\limits_{j \in \mathcal{J}} A_j$, ezért

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{j \in \mathcal{J}} A_j\right) &= P\left(\left\{\omega \colon \bigcap_{j=1}^{n} \chi(A_j)(\omega) > x_j\right\}\right) \\ &= P\left(\chi(A_j) > x_j, \text{ minden } j = 1, \dots n \text{ számra}\right) \\ &= \prod_{j=1}^{n} P(\chi(A_j > x_j) = \prod_{j \in \mathcal{J}} P(A_j). \end{aligned}$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy az $A_1, dots, A_n$ események függetlenek. Ekkor ezek komplementerei az $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$ események is függetlenek, és kényelmesebb lesz ezt a tényt felhasználni a továbbiakban. Adva valós számok valamely $x_1, \dots, x_n$ rendszere, akkor legyen $\mathcal{J} = \mathcal{J}(x_1, \dots, x_n) = \{j\colon 1 \le j \le n,\ x_j < 1\}$. Ekkor

$$\begin{aligned} P(\{\omega\colon \chi(A_j) < x_j,\ 1 \le j \le n\}) &= P\left(\bigcap_{j\in\mathcal{J}} \bar{A}_j\right) \\ &= \prod_{j\in\mathcal{J}} P(\bar{A}_j) = \prod_{j=1}^{n} P(\{\omega\colon \chi(A_j) < x_j\}), \end{aligned}$$

és ezt kellett bizonyítani.