Az április 25-i gyakorlat témája

Először megbeszéljük az eloszlásfüggvény tulajdonságait.

1. Ha $F(x)$ eloszlásfüggvény, akkor

   (i) $F(x)$ monoton növekvő függvény

   (ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$,

   (iii) $F(x)$ minden $-\infty < x < \infty$ számra balról folytonos, és létezik jobboldali határértéke (mert monoton növekvő függvény), azaz $\lim\limits_{t\to x-0} F(t) = F(x)$, és létezik a $\lim\limits_{t\to x+0} F(t)$ határérték is.

   $\lim\limits_{t\to x-0}$-val azt jelöljük, hogy olyan t_n számsorozatot tekintünk, melyre egyrészt $t_n \to x$, másrészt $t_n \le x$ minden n indexre. Hasonlóan $\lim\limits_{t\to x+0}$-val azt jelöljük, hogy olyan t_n számsorozatot tekintünk, melyre egyrészt $t_n \to x$, másrészt $t_n \ge x$ minden n indexre.

   Ha $f(x)$ sűrűségfüggvény, akkor $f(x) \ge 0$ minden x számra, és $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

   Valóban, ha $F(x)$ egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, akkor $F(x) = P(\xi < x) \le P(\xi < y) = F(y)$ az $x < y$ esetben, mert $\{\omega\colon \xi(\omega) < x\} \subset \{\omega\colon \xi(\omega) < y\}$. Továbbá, $\lim\limits_{t\to x-0} F(t) = \lim\limits_{t\to x-0} P(\xi < t) = P(\xi < x) = F(x)$ a valószínűség (σ-additivitás miatt teljesülő) múlt gyakorlaton megbeszélt tulajdonsága miatt. (A jobboldali határérték létezik az eloszlásfüggvény monotonitása miatt.) Ugyancsak ezen tulajdonság miatt $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} P(\xi < x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty} P(\xi < x) = 1$. $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$,

   Mivel egy $f(x)$ sűrűségfüggvény egy fenti tulajdonságokkal rendelkező eloszlásfüggvény deriváltja (amelyik azt a plusz feltételt is teljesíti, hogy előáll mint egy $f(\cdot)$ függvény integrálja, ezért mint azt nem nehéz belátni, egy sűrűségfüggvény teljesíti a fenti feltételeket.

Megjegyzés: Be lehet bizonyítani, hogy egy a fenti tulajdonságokkal rendelkező $F(x)$ illetve $f(x)$ függvényhez létezik olyan $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, és azon egy ξ valószínűségi változó, melynek ez az $F(x)$ függvény az eloszlásfüggvénye, illetve ez az $f(x)$ függvény a sűrűségfüggvénye.

2. Egy szabályos pénzérmét feldobunk háromszor. Tekintsük azt a valószínűségi változót, mely megadja a fejdobások számát. Adjuk meg ezt a valószínűségi változót.

   Házi feladat:

   Egy szabályos kockát feldobunk, és tekintjük a dobás eredményét megadó valószínűségi változót. Adjuk meg ezt a valószínűségi változót.

   Az eloszlásfüggvény azért rendkívül fontos fogalma a valószínűségszámításnak, mert általában nem tudjuk, hogy melyek azok a véletlen körülmények, melyek meghatározzák egy valószínűségi változó értékét, csak azt hogy milyen valószínűséggel vesz fel különböző értékeket. Ahhoz, hogy ezeket a valószínűségeket meg tudjuk határozni ismernünk kell az eloszlásfüggvényt. Ugyancsak fontos fogalom az eloszlásfüggvény többdimenziós változata, amely megadja több valószínűségi változó együttes eloszlását.

Többdimenziós eloszlásfüggvény definiciója. *Legyen adva k valós értékű $\xi_1, \dots, \xi_k$ valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ezek eloszlásfüggvénye az*

$$F(x_1, \dots, x_k) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_k < x_k),$$

k változós függvény, ahol $-\infty < x_j < \infty$ minden $1 \le j \le k$ indexre.

Azt mondjuk, hogy egy $F(x_1, \dots, x_k)$ eloszlásfüggvénynek létezik $f(x_1, \dots, x_k)$ sűrűségfüggvénye, ha

$$F(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f(u_1, \dots, u_k)\, du_1 \dots du_k$$

minden $-\infty < x_j < \infty$, $1 \le j \le k$ számra.

A valószínűségszámítás problémái arról szólnak, hogy ha adva van valószínűségi változók egy sorozata, melynek ismerjük az együttes eloszlását mondhatunk ezekről, ezek különböző függvényei milyen valószínűséggel jelennek meg. Részletesebb tárgyalás és bizonyítás nélkül megadjuk a többdimenziós eloszlásfüggvény tulajdonságait. Csak annyit jegyezünk meg, hogy a kissé bonyolultabb (iii) tulajdonság azt fejezi ki az eloszlásfüggvény segítségével, hogy annak valószínűsége, hogy olyan $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ valószínűségi változók, melyek eloszlása az $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ eloszlásfüggvény, nem negatív valószínűséggel esik egy $\mathbf{K}$ téglatestbe, azaz $P(a_j \le \xi_j < b_j,$ minden $1 \le j \le k$ indexre$) \ge 0$.

Azt is állítjuk, hogy az alábbi (i)—(iv) tulajdonságokkal rendelkező $F(x_1, \dots, x_k)$ függvényhez létezik k valószínűségi változó, melyeknek ez az eloszlásfüggvénye.

Az $F(u_1, \dots, u_k)$ függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvény, ha teljesíti a következő négy tulajdonságot.

(i) $F(u_1, \dots, u_k)$ minden változójának balról folytonos függvénye.

(ii) $$\lim_{\substack{u_j \to \infty \\ \text{minden } j=1,\dots,k \text{ számra}}} F(u_1, \dots, u_k) = 1.$$

(iii) $$\lim_{\substack{u_j \to -\infty \\ \text{valamely } 1 \le j \le k \text{ számrra}}} F(u_1, \dots, u_k) = 0.$$

Végül definiáljuk egy az R^k téren definiált F függvényre és egy $\mathbf{K} = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_k, b_k)$ téglatestre a

$$\mu(\mathbf{K}) = \mu_F(\mathbf{K}) = \sum_{\substack{u_j = \, a_j \text{ vagy } b_j \\ j=1,\dots,k}} (-1)^{\chi(u_1,\dots,u_k)} F(u_1, \dots, u_k)$$

mennyiséget, ahol $\chi(u_1, \dots, u_k)$ jelöli az a_j-k számát az $u_1, \dots, u_k$ sorozatban. Ekkor

(iv) $\mu_F(\mathbf{K}) \geq 0$ minden $\mathbf{K}$ téglatestre.

Lássunk példát arra, hogyan lehet kiszámítani, felhasználva a múlt órán tárgyalt eredményeket, egy ismert eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Definicó. *Azt mondjuk, hogy egy ξ valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel, $\lambda > 0$, ha eloszlásfüggvénye, $F(x) = P(\xi < x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, és $F(x) = P(\xi < x) = 0$, ha $x < 0$. Ezzel ekvivalens jellemzés: Egy $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényének létezik $f(x)$ sűrűségfüggvénye, és az $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, $f(x) = 0$, ha $x \leq 0$ alakú.*

2. Számoljuk ki egy λ paraméterű ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

   Megoldás: Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$E\xi = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda},$$

$$E\xi^2 = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

   Ezért $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \dfrac{2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Definició Egy ξ valószínűségi változó egyenletes eloszlású az $[a,b]$ intervallumban, ha a sűrűségfüggvénye $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$, ha $a \leq x \leq b$, és $f(x) = 0$, ha $x < a$ vagy $x \geq b$.

Házi feladat.

Számítsuk ki egy a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Legyen adva két ξ és η valószínűségi változó, melyeknek $H(x,y) = P(\xi < x, \eta < y)$ az eloszlásfüggvénye. Ekkor a (ξ,η) vektor $H(x,y) = P(\xi < x, \eta < y)$ az eloszlásfüggvénye meghatározza a $P(\xi + \eta < u) = F(u)$ függvényt is tetszőleges $-\infty < u < \infty$ számra, azaz a $\xi + \eta$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, illetve sűrűségfüggvényét feltéve hogy ez utóbbi is létezik. Felmerül a kérdés, hogyan tudjuk ezeket effektive kiszámítani. A legfontosabb eset, és a továbbiakban ezzel foglalkozunk, az amikor a ξ és η valószínűségi változók függetlenek.

Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, melyek eloszlásai $F(x)$ és $G(x)$ eloszlásfüggvények. Tegyük fel azt is, hogy ezeknek az eloszlásfüggvényeknek létezik $f(x)$ és $g(x)$ sűrűségfüggvényük. A függetlenség miatt a (ξ,η) vektor eloszlásfüggvénye a $H(x,y) = P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x)P(\eta < y) = F(x)G(y)$ függvény. Továbbá a $H(x,y) = F(x)G(y)$ eloszlásfüggvénynek létezik sűrűségfüggvénye, és ez az $f(x)g(y)$ függvény. Megadjuk a következő eredményt, mely megadja a $\xi + \eta$ összeg (létező) sűrűségfüggvényét.

Tétel. *Legyen ξ és η két független valószínűségi változó $F(x)$ és $G(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Tegyük fel, hogy létezik az $F(x)$ eloszlásfüggvénynek $f(x)$ a $G(x)$ eloszlásfüggvénynek pedig $g(x)$ sűrűségfüggvénye. Ekkor a $\xi+\eta$ valószínűségi változónk létezik sűrűségfüggvénye. Ezt az*

$$\begin{aligned} f*g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{2}-y\right)\left(\frac{x}{2}+y\right)\,dy, \end{aligned} \qquad -\infty < x < \infty$$

képlet adja meg. A fenti képlettel definiált $f*g(\cdot)$ függvényt az f és g sűrűségfüggvények konvoluciójának hívják.

Számítsuk ki ismert sűrűségfüggvényű független valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényét a fenti eredmény segítségével.

3. Legyenek ξ_1 és ξ_2 független exponenciális eloszlású valószínűségi változók, azaz legyen sűrűségfüggvényük $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ ha $x\ge 0$, és $f(x)=0$, ha $x>0$. Számítsuk ki $\xi_1+\xi_2$ sűrűségfüggvényét. Általánosabban, legyenek $\xi_1,\dots\xi_m$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda>0$ paraméterrel. Számítsuk ki $\xi_1+\dots+\xi_m$ sűrűségfüggvényét.

   Ki kell számolnunk az $f*f(x)$ illetve $\underbrace{f*\dots*f}_{m}(x)$ konvoluciókat a fenti $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Mivel $f(x)=0$, ha $x\le 0$, a konvoluciót meghatározó integrálban szereplő $f(y)f(x-y)$ integrandus nulla, ha $y\le 0$ vagy $x-y\le 0$. Innen a konvoluciót definiáló integrál csak $x\ge 0$ esetén lehet nulla, az $x\le 0$ esetben $f(y)f(x-y)>0$ minden y-ra nulla, és $x\ge 0$ esetén az $f(y)f(x-y)>0$ integrandus csak $0\le y\le x$ esetén nem nulla. Innen a $\xi_1+\xi_2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_2(x)=f*f(x)$ $x<0$-ra $f_2(x)=0$, és

$$\begin{aligned} f_2(x)=f*f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x-y)\,dy = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\lambda e^{-\lambda(x-y)}\,dy \\ &= \int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda x}\,dy = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \quad \text{ha } x\ge 0. \end{aligned}$$

   Hasonlóan, ha $f_m(x)=\underbrace{f*\dots*f}_{m}(x)$ jelöli $\xi_1+\cdots\xi_m$ sűrűségfüggvényét, akkor $f_m(x)=0$ minden $m\ge 1$ számra, ha $x<0$. Azt állítjuk, hogy $f_m(x)=\dfrac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda x}$, ha $x\ge 0$. Ezen állítás bizonyításához elég belátni teljes indukcióval azt, hogy $f_{m-1}*f(x)=f_m(x)$ a fent definiált f_m függvényekkel. Viszont

$$\begin{aligned} f_{m-1}*f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{m-1}(y)f(x-y)\,dy = \int_0^x \lambda^{m-1}\frac{y^{m-2}}{(m-2)!}\lambda e^{-\lambda y}e^{-\lambda(x-y)}\,dy \\ &= \lambda^m e^{-\lambda x}\int_0^x \frac{y^{m-2}}{(m-2)!}\,dy = e^{-\lambda x}\frac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!}, \quad \text{ha } x\ge 0. \end{aligned}$$

4. Legyenek ξ_1 és ξ_2 független exponenciális eloszlású valószínűségi változók, azaz legyen sűrűségfüggvényük $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ha $x \ge 0$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$. Számítsuk ki a $\xi_1 - \xi_2$ sűrűségfüggvényét.

$\xi_1 - \xi_2 = \xi_1 + (-\xi_2)$, és $-\xi_2$ sűrűségfüggvénye $f^-(x) = f(-x)$, azaz $f^-(x) = \lambda e^{\lambda x}$, ha $x < 0$, és $f^-(x) = 0$, ha $x > 0$. Tehát a minket érdekő $\xi_1 - \xi_2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f * f^-(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(y-x)\,dy.$$

Ha $x \ge 0$, akkor az $f(y)f(y-x)$ integrandus $y \ge 0$ és $y > x$, azaz $y > x$ esetén nagyobb mint 0, ezért

$$\begin{aligned} f * f^-(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(y-x)\,dy = \int_{x}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y} e^{\lambda(x-y)}\,dy \\ &= \lambda^2 e^{\lambda x} \int_{x}^{\infty} e^{-2\lambda y}\,dy = \lambda^2 e^{\lambda x} \frac{e^{-2\lambda x}}{2\lambda} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} \quad \text{ha } x \ge 0. \end{aligned}$$

Ha $x < 0$, akkor az $f(y)f(y-x)$ integrandus $y \ge 0$ és $y > x$, azaz $y > 0$ esetén nagyobb mint 0, ezért

$$\begin{aligned} f * f^-(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(y-x)\,dy = \int_{0}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y} e^{\lambda(x-y)}\,dy \\ &= \lambda^2 e^{\lambda x} \int_{0}^{\infty} e^{-2\lambda y}\,dy = \lambda^2 e^{\lambda x} \frac{1}{2\lambda} = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x} \quad \text{ha } x < 0. \end{aligned}$$

Tömörebb jelöléssel $\xi_1 - \xi_2$ sűrűségfüggvénye $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}$.

Házi feladat

Legyen ξ és η két független és a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen $f(x)$ sűrűségfüggvényük $f(x) = 1$, ha $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$, $f(x) = 0$, ha $x > \frac{1}{2}$ vagy $x < -\frac{1}{2}$. Számítsuk ki $\xi_1 + \xi_2$ sűrűségfüggvényét.

Standard normális eloszlás és sűrűségfüggvény definiciója. *Egy ξ valószínűségi változó standard normális eloszlású, ha $P(\xi < x) = \Phi(X) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du$. Ezen $\Phi(x)$ eloszlás $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$ sűrűségfüggvényét a standard normális sűrűségfüggvénynek hívják.*

Tétel. *A standard normális eloszlásfüggvénynek nevezett*

$$P(\xi < x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du$$

függvény valóban eloszlásfüggvény. Ez azt jelenti, hogy teljesül az $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du =$ *1, (és néhány az adott esetben nyílvánvaló összfüggés, melyek ahhoz kellenek, hogy* $\Phi(x)$ *eloszlásfüggvény legyen.) Egy standard normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke nulla, szórásnégyzete 1, azaz*

$$\int_{-\infty}^{\infty} u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du = 0, \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du = 1.$$

Megjegyzés: *Ha egy* ξ *valószínűségi változó eloszlása a* $\Phi(x)$ *standard normális eloszlásfüggvény, akkor egy* $\sigma\xi + m$ *valószínűségi változó eloszlásfüggvényét* $\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ *eloszlás és* $\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/\sigma^2}$ *sűrűségfüggvényét normális eloszlás illetve normális sűrűségfüggvénynek nevezik tetszőleges* $-\infty < m < \infty$ *és* $\sigma > 0$ *esetén.*

A normális eloszlás rendkívül fontos szerepet játszik a valószinűségszámításban, mert független valószínűségi változók normalizált részletösszegeinek eloszlása nagyon általános feltételek mellett a normális eloszláshoz konvergál. Jegyezzük meg, hogy mint azt az előadáson bebizonyították, két független normális eloszlású valószínűségi változó összege is normális eloszlású.

5. Adva egy ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó számítsuk ki $8\xi^3$ és ξ^4 eloszlás és sűrűségfüggvényét.

a.) $8\xi^3$ eloszás és sűrűségfüggvénye: $P(8\xi^3 < x) = P\left(\xi < \frac{x^{1/3}}{2}\right) = \Phi\left(\frac{x^{1/3}}{2}\right)$, tehát $8\xi^3$ eloszlásfüggvénye $\Phi\left(\frac{x^{1/3}}{2}\right)$, sűrűségfüggvénye pedig ennek deriváltja, azaz $\frac{1}{6}x^{-2/3}\varphi\left(\frac{x^{1/3}}{2}\right) = \frac{x^{-2/3}}{6\sqrt{2\pi}}e^{-x^{2/3}/8}$.

b.) ξ^4 eloszlás és sűrűségfüggvénye: $P(\xi^4 < x) = 0$, ha $x \le 0$, és $P(\xi^4 < x) = P(-x^{1/4} < \xi < x^{1/4}) = P(\xi < x^{1/4}) - P(\xi < -x^{1/4}) = \Phi(x^{1/4}) - \Phi(-x^{1/4})$, ha $x > 0$. Másrészt, mivel a $\Phi(x)$ eloszlásfüggvény $\varphi(x)$ sűrűségfüggvénye páros függvény, ezért $\Phi(-x^{1/4}) = \int_{-\infty}^{-x^{1/4}} \varphi(u)\,du = \int_{x^{1/4}}^{\infty} \varphi(u)\,du = 1 - \int_{-\infty}^{x^{1/4}} \varphi(u)\,du = 1 - \Phi(x^{1/4})$. Ezért a ξ^4 valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $P(\xi^4 < x) = 2\Phi(x^{1/4}) - 1$, ha $x \ge 0$, és nullával egyenlő, ha $x < 0$. Sűrűségfüggvénye pedig ennek deriváltja $\frac{1}{2}x^{-3/4}\varphi(x^{1/4})$, ha $x \ge 0$, és nulla, ha $x < 0$.

Házi feladat:

Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ intervallumban. Számítsuk ki a ξ^2 és ξ^3 valószínűségi változók eloszlás és sűrűségfüggvényét.