DOLGOZAT FELADATOK

Megjegyzés: Abban az esetben, ha egy megkérdezett fogalom definicióját több (egymással ekvivalens) módon lehet megadni, akkor ezek mindegyike jó válasznak minősül.

1. Egy szabályos dobókockát egymás után feldobunk többször egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy a huszadik dobásban jelenik meg a harmadik hatos dobás?
2. Egy szabályos dobókockát feldobunk kétszer egymás után. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy mind a két dobás eredménye osztható hárommal feltéve, hogy legalább az egyik dobás eredménye osztható hárommal?
3. Egy szabályos dobókockát feldobunk százszor egymás után. Mi a páros dobások összegének a várható értéke és szórásnégyzete? (A páratlan dobások eredményét nem vesszük figyelembe.)
4. Egy urnában 10 fehér és 10 piros golyó van. Visszatevés nélkül kihúzunk 10 golyót. Mi a kihúzott piros golyók számának várható értéke és szórásnégyzete?
5. Legyen A, B és C három esemény egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Mikor mondjuk, hogy ezek az események (teljesen) függetlenek?
6. Legyen ξ egy diszkrét, valós értékű, azaz megszámlálható sok $x_1, x_2, \dots$ valós értéket felvevő valószínűségi változó, melyre $P(\xi = x_k) = p_k$, $k = 1, 2, \dots$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. Hogyan számolhatjuk ki a ξ valószínűségi változó szórásnégyzetét?

Megoldások:

1. Annak valószínűsége, hogy egy olyan húsz hosszúságú dobás sorozat jelenik meg, mely három előírt helyen hatost tartalmaz, a maradék 17 helyen pedig nem hatost tartalmaz $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{17}$. Ezek közül olyan sorozatokat kell tekintenünk, melyekben az előírt 3 hely egyike az utolsó, a 20., a maradék két hely pedig tetszőleges lehet. Ilyen sorozat $\binom{19}{2}$ módon lehetséges. Így a kérdezett valószínűség
$$\binom{19}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{17}.$$
2. Legyen A az az esemény, hogy mind a két dobás eredménye osztható 3-mal, B az az esemény, hogy legalább az egyik dobás eredménye osztható hárommal. Ekkor a $P(A|B)$ feltételes valószínűséget kell kiszámítanunk. Mivel $A \subset B$, ezért $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)}$. Legyen A_1 az az esemény, hogy az első A_2 hogy a második dobás eredménye osztható hárommal. Ekkor az A_1 és A_2 események függetlenek, $P(A_1) = P(A_2) = \dfrac{1}{3}$, $A = A_1 \cap A_2$, $B = A_1 \cup A_2$. Ezért $P(A) = P(A_1)P(A_2) = \dfrac{1}{9}$,

$P(B) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$. Ezért $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1}{5}$.

3. Vezessük be a ξ_j, $1 \le j \le 100$, valószínűségi változókat, melyekre $\xi_j = 2$, ha a j-ik dobás eredménye 2, $\xi_j = 4$, ha a j-ik dobás eredménye 4, $\xi_j = 6$, ha a j-ik dobás eredménye 6, $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye 1, 3 vagy 5. A ξ_j valószínűségi változók függetlenek, ezért a minket érdeklő mennyiségek $E\xi = \sum_{j=1}^{100} E\xi_j$, $\operatorname{Var}\xi = \sum_{j=1}^{100} \operatorname{Var}\xi_j$. Másrészt, $E\xi_j = \frac{1}{6}(2+4+6) = 2$, $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2$, $E\xi_j^2 = \frac{1}{6}(4+16+36) = \frac{28}{3}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{16}{3}$. Innen $E\xi = 200$, $\operatorname{Var}\xi = \frac{1600}{3}$.
4. Legyen $\xi_j = 1$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér, $1 \le j \le k$. Ekkor $E\xi_j = E\xi_1 = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = \operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2) = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2 = P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1) - (E\xi_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{9}{19} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{76}$, ha $j \ne k$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{1}{4}$. Ezért $E\xi = \sum_{j=1}^{10} \xi_j = \sum_{j=1}^{10} E\xi_j = 5$, $\operatorname{Var}\xi = \sum_{j=1}^{10} \operatorname{Var}\xi_j + 2\sum_{j=1}^{9}\sum_{k=j+1}^{10} \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = \frac{10}{4} - 90\frac{1}{76} = \frac{100}{76}$.
5. Az A, B és C események akkor (teljesen) függetlenek, ha teljesülnek a

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C),$$
$$P(AB) = P(A)P(B), \quad P(AC) = P(A)P(C), \quad P(BC) = P(B)P(C)$$

azonosságok.
6. $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k\right)^2$.