A február 15-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

A gyakorlat elején mindenki vegyen elő egy papírlapot, és a hallgatóság egyik fel egy pénzdarabot. Mindenki írjon fel egy jelszót a lapjára, melynek segítségével azonosítani tudja a maga lapját. Akinél van pénzdarab, az dobja fel az érmét 100-szor és írja fel az egyes dobások eredményét (fej vagy írás). Akinél nincs érme az próbáljon szimulálni egy minél valószerűbb 100 hosszúságú írás–fej sorozatot. Az én feladatom lesz az összegyüjtött lapok alapján megállapitani, hogy melyek a valódi és melyek a szimulált dobássorozatok.

Feladatok:

1.) Egy pénzdarabot feldobunk 2-szer. Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan 1 fejdobás lesz? Mi annak a valószínűsége, hogy legalább 1 fejdobás lesz?

2.) Feldobunk két szabályos dobókockát. Mi annak a valószínűsége, hogy a dobáseredmények összege pontosan 9 illetve pontosan 10? Hány különböző módon fordulhat elő, hogy a dobások összege 9 és hány különböző módon lehet a dobások összege 10?

3.) Mi egy szabályos pénzdarab 20 egymás utáni dobásának a természetes valószínűségi modellje?

Házi feladat:

Adjuk meg egy szabályos dobókocka 10 egymás utáni dobásának egy lehetséges valószínűségi modelljét.

Az eddigi feladatok megoldása:

1.) A feldobott sorozatok lehetséges kimenetei (F,F), (F,I), (I,F), (I,I), mindegyik kimenetel valószínűsége $\frac{1}{4}$. Az az esemény, hogy legalább egy fejdobás történik az (F,F) (F,I), (I,F) dobássorozat valamelyikének bekövetkezésekor történik meg. Ennek valószínűsége $\frac{3}{4}$. Az az esemény, hogy pontosan két fejdobás lesz, akkor következik be, ha a dobássorozat kimenetele (F,I), (I,F). Ennek valószínűsége $\frac{1}{2}$.

2.) A két dobás eredményének lehetséges kimenetelei (i, j), $1 \le i, j \le 6$, mindegyik kimenetel valószínűsége $\frac{1}{36}$. Az összeg pontosan 10, ha a következő kimenetelek valamelyike következik be: (4,6), (5,5), (6,4). Ennek valószínűge $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Az összeg akkor 9, ha a következő kimenetelek valamelyike következik be: (3,6), (4,5), (5,4), (6,3). Ennek valószínűsége $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

3.) E feladat megtárgyalásánál megbeszéltük részletesebben a valószínűségi mező fogalmát. Definiáljuk az elemi események halmazát. Egy ω elemi eseményt a jelen esetben érdemes úgy definiálni, mint egy 20 hosszúságú fej–írás sorozatot. Egy esemény olyan halmaz, melynek elemei bizonyos ω elemi események. A biztos esemény az összes elemi eseményt tartalmazó halmaz. Egy elemi esemény valószínűségét (egy szabályos) dobókocka 20 egymásutáni feldobása esetén 2^{-20}, egy esemény (halmaz) valószínűsége pedig a halmazban levő elemi események valószínűségének az összege.

Hasonló elvek szerint definiáljuk a valószínűségi mezőt az általános esetben is. Erről is szó volt, és egy példán keresztül megtárgyaltuk, hogy már egyszerű, természetes modellek definiciójához szükséges bizonyos mély mértékelméleti eredmények felhasználása. A tekintett modell a következő volt: A $[0,1]$ intervallumba véletlenül ledobunk egy pontot úgy, hogy az egyenletesen essen le az intervallum valamelyik helyére. Ekkor a természetes modell a következő: Egy elemi esemény a $[0,1]$ intervallum valamelyik pontja, a biztos esemény a $[0,1]$ intervallum. Egy tetszőleges véges vagy megszámlálható pontból álló halmaz valószínűsége nulla. De ilyen módon nem tudjuk definiálni tetszőleges halmaz valószínűségét. Egy $[a,b]$ intervallum, $0 \le a \le b \le 1$, valószínűsége legyen $b-a$. Ezután a halmazok definicióját általános esetben úgy kívánjuk definiálni, hogy a $[0,1]$ intervallum diszjunkt $A_1, A_2, \dots,$ halmazaira, (azaz egymást kizáró eseményekre) teljesüljön a $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ azonosság. Felmerül a kérdés, hogy lehetséges-e ilyen valószínűség definiciója, és egy halmaz definicióját egyértelműen definiáltuk-e ilyen módon. Ezekre a kérdésekre megnyugtató választ lehet adni, de ehhez mély mértékelméleti eredmények felhasználására van szükség. Ugyancsak meg lehet érteni e példa elemzése réven, hogy miért definiáltuk a valószínűségi mezők definicióját látszólag bonyolult módon. Az általános esetben egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt tekintünk, és ebben a valószínűségi mezőben az $\mathcal{A}$ σ-algebra nem tartalmazza az Ω halmaz minden részhalmazát. A $\mathcal{A}$ tartalmazza azokat a halmazokat, melyeknek tudjuk definiálni a valószínűségét. Nem minden halmaz ilyen. Ez mégsem okoz gondot, mert azok a halmazoknak, melyek számunkra érdekesek, melyeket definiálni tudunk, létezik valószínűségük. Számossági meggondolások meggondolásokkal be lehet látni, hogy nem minden halmaz ilyen.

4.) Egy szabályos érmét feldobunk egymás után egészen addig, amíg másodszor megjelenik egy fej. Azután a dobássorozatot abbahagyjuk. Mi ennek a valószínűségi modellje?

Egy lehetséges modell a következő: Tekintsük az összes olyan véges fej–írás sorozatot, mely egy fejjel fejeződik be, és ezen kívül pontosan egy fej jelet tartalmaz. Legyen Ω az összes ilyen sorozatot tartalmazó halmaz, és $\mathcal{A}$ legyen e halmaz összes részhalmaza. Legyen $2^{-\text{a sorozat hossza}}$ egy elemi eseményt leíró sorozat valószínűsége. Egy általános halmaz valószínűsége legyen az ebben a halmaz által tartalmazott elemi események valószínűségének az összege.

Az egyik hallgató megjegyezte, hogy ez a modell nem tartalmazza azt az eseményt, hogy csak egyetlen fej dobás következik be, és utána csupa írás dobás következik be. Ez a megjegyzés jogos, mégsem okoz problémát. Be lehet látni, hogy ennek az eseménynek a valószínűsége nulla, és egy nulla mértékű halmazt jogunk van kihagyni a valószínűségi mezőből. Érdemes megjegyezni, hogy egy valószínűségi problémát leíró valószínűségi mező definicióját többféleképpen meg lehet adni. Így például természetes (talán az előbbi modellnél természetesebb) a következő modell. Tekintsük az összes végtelen fej-írás sorozatot. Minden ilyen sorozat legyen egy elemi esemény. Legyen Ω az összes ilyen sorozatból álló halmaz. Rögzítsünk egy n egész számot és egy rögzített n hosszúságú fej-írás sorozatot. Annak a halmaznak a valószínűsége, mely az összes ilyen kezdetű sorozatot tartalmazza, legyen 2^{-n}. Be lehet látni (néhány mértékelméleti eredmény felhasználásával), hogy ilyen módon a valószínűségi mezőt egyértelműen lehet definiálni.

5.) Egy szabályos érmét feldobunk egymás után egészen addig, amíg másodszor megjelenik egy fej. Azután a dobássorozatot abbahagyjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy az utolsóelőtti dobás eredménye fej?

Megoldás: Azon elemi események unióját kell tekinteni, melyek n írásból és utána két fejből áll. Ennek valószínűsége $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Házi feladat:

Egy szabályos érmét feldobunk egymás után egészen addig, amíg másodszor megjelenik egy fej. Azután a dobássorozatot abbahagyjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy legalább három dobást végzünk, és az utolsót kettővel megelőző dobás eredménye fej?