A február 22-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

De Méré lovag problémája:

Az a;ább megfogalmazott két probléma történetileg érdekes. Ezekkel a kérdésekkel fordult de Méré lovag Pascalhoz. Sokan e feladat megoldásától illetve Pascalnak és Fermat-nak e probléma megoldásáról szóló levelezésétől számítják a valószínűségszámítás megszületését.

a.) Ha egy kockát 4-szer feldobunk, akkor mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy hatos dobás lesz? Ha két kockát 24-szer feldobunk, mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy dupla hatos lesz.

(De Méré lovag arra csodálkozott rá, hogy az első valószínűség $\frac{1}{2}$-nél kicsit kisebb, a második valószínűség pedig $\frac{1}{2}$-nél kicsit nagyobb.)

b.) Két játékos egy igazságos játékot játszik, melynek mindegyik fordulójában az egyes játékosok $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyernek, illetve veszítenek. Megállapodnak, hogy az a játékos nyeri el a tétet, aki először ér el hat nyerést. A játékot félbe kell szakítaniuk akkor, amikor az egyiküknek három a másikuknak pedig öt nyerése volt. Hogyan kell igazságosan osztozkodniuk?

Megoldás:

a.) Annak a valószínűsége, hogy egy dobás eredménye nem hatos $\dfrac{5}{6}$, annak pedig, hogy 4 egymás utáni dobásban nem jelenik meg a hatos $\left(\dfrac{5}{6}\right)^4$. Annak a valószínűsége, hogy négy dobásban megjelenik egy hatos $P_1 = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^4$. Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy két kocka dobásában nem jelenik meg a dupla hatos $\dfrac{35}{36}$, annak a valószínűsége, hogy ez 24 dobásban nem jelenik meg $\left(\dfrac{35}{36}\right)^{24}$. Annak a valószínűsége, hogy 24 dobásban megjelenik egy dupla hatos $P_2 = 1 - \left(\dfrac{35}{36}\right)^{24}$.

Érdemes megérteni, hogy a P_1 és P_2 valószínűségek miért vannak olyan közel egymáshoz. Vezessük be az $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \dots,$ számokat. Ekkor $1 - P_1 = a_6^{2/3}$, $1 - P_2 = a_{36}^{2/3}$. Viszont tanultuk az analízisben, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-1}$, $e = 2.71\dots$. Továbbá ez az a_n sorozat elég gyorsan tart a határértékéhez, ezért az $a_6 \sim e^{-1}$ és $a_{36} \sim e^{-1}$ elég jó közelítés. Ezért mind a P_1 mind a P_2 valószínűség jól közelíthető az $1 - e^{-2/3}$ számmal. Továbbá ismeretes, hogy az a_n sorozat monoton növekvő, és innen adódik, hogy $P_1 > P_2$. Történetesen az $1 - e^{-2/3}$ szám közel van $\frac{1}{2}$-hez, és a P_1 és P_2 valószínűségek ezt a számot közrefogják.

b.) Tekintsük azt az általánosabb problémát, amikor n nyerés kell a tét megszerzéséhez, és az első játékos k a második pedig l alkalommal nyert. Tekintsük a következő $(n-k)+(n-l)-1 = 2n-k-l-1$ fordulót. Az első játékos akkor és csak akkor nyerné el a tétet, ha ezekben a fordulókban legalább $n-k$ alkalommal nyer. Ennek valószínósége $P = 2^{k+l+1-2n} \sum_{j=n-k}^{2n-k-l-1} \binom{2n-k-l-1}{j}$. Jelen esetben az első játékos $\frac{7}{8}$, a második játékos $\frac{1}{8}$ valószínűséggel nyeri el a tétet. Az igazságos tehát a $7:1$ arájú osztozkodás.

További feladatok

1.) Egy urnában húsz piros és tíz fehér golyó van. Visszatevéssel kihúzunk három golyót. Mi annak a valószínűsége, hogy az első húzásban piros golyót húzunk? Mi annak a valószínűsége, hogy a harmadik húzás eredménye piros? Mi a valószínűsége annak, hogy az első és harmadik húzás eredménye piros?

   Az első húzás eredménye $\frac{2}{3}$ valószínűséggel piros. Ugyanez igaz a harmadik húzásra is, (mert a golyókat visszadobtuk) Annak valószínűsége, hogy az első és harmadik húzás eredménye is piros $\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

2.) Egy urnában húsz piros és tíz fehér golyó van. Visszatevés nélkül kihúzunk három golyót. Mi annak a valószínűsége, hogy az első húzásban piros golyót húzunk? Mi annak a valószínűsége, hogy a harmadik húzás eredménye piros? Mi a valószínűsége annak, hogy mind az első mind a harmadik húzás eredménye piros? Mi a valószínűsége annak, hogy az első és második húzás eredménye piros? Mi a valószínűsége annak, hogy mind az első mind a második mind a harmadik húzás eredménye piros?

   Megoldás: Annak valószínűsége, hogy az első huzás eredménye piros $\frac{2}{3}$. Az az esemény, hogy a harmadik húzás eredménye piros úgy következhet be, hogy a három első húzás eredméye a PPP, PFP, FPP, FFP húzássorozat valamelyike. Mindegyik sorozat valószínűségét kiszámoltuk és összeadtuk. Azt kaptuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a harmadik húzásban piros golyót húzunk $\frac{2}{3}$, azaz ugyanannyi, mint annak a valószínűsége, hogy az első húzás eredménye piros. Hasonlóan kiszámitottuk annak a valószínűségét, hogy az első és harmadik húzás eredménye piros. Ez akkor következik be, ha PFP vagy PPP golyót húztunk az első három húzás során. Ennek valószínűsége $\frac{20}{30}\frac{19}{29}$, azaz ugyanannyi, hogy az első két golyó húzásakor két piros golyót húzunk. Annak valószínűsége, hogy az első három húzás mindegyikének eredménye piros $\frac{20}{30}\frac{19}{29}\frac{18}{28}$. Ezen eredmények mélyebb hátterét a következő feladat magyarázza meg.

3.) Egy urnában van k piros és l fehér golyó. Kihuzzúk a golyókat visszatevés nélkül. Készítsük el ennek a feladatnak a valószínűségi modelljét. Lássuk be ennek segítségével azt, hogy annak valószínűsége, hogy az r-ik húzás eredménye piros nem függ az r indextől.

Megoldás: Egy elemi esemény, egy lehetséges húzássorozat, mely egy $k+l$ hosszúságú sorozat, mely k piros és l fehér golyóból áll. Ennek valószínűsége $\dfrac{1}{\binom{k+l}{k}}$.
Ugyanis, ha felírjuk egy előírt sorozat húzásának a valószínűségét egy olyan $k+l$ tört szorzatát kapjuk, melynek $j-ik$ tagjának nevezőjében $k+l-j+1$ van (a j-ik húzás előtt az urnában levő golyók száma), a számllóban pedig a j-ik húzás előtt az urnában levő fehér vagy piros golyók száma attól függően hogy a j-ik húzás eredménye fehér vagy piros. Ezért olyan szorzatot kapunk, melynek nevezőjében $(k+l)!$, a számlálóban pedig $k!l!$ van. Kiszámoltuk hogy $\binom{k+l-1}{k-1}$ olyan sorozat van, melyben az r-ik elem (az r-ik húzás eredménye) piros. Az előbbi eredmények azt jelentik, hogy annak a valószínűsége, hogy az r-ik húzás eredménye piros nem függ az r számtól, azaz megegyezik annak valószínégégével, hogy az első húzás eredménye piros.

Házi feladat:

Egy urnában 50 piros és 50 fehér golyó van. Kihúzzuk a golyókat visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége annak, hogy a 40-ik húzás eredménye piros? Mi annak a valószínűsége, hogy a 60-ik húzás eredménye piros? Mi annak a valószínűsége, hogy a 40-ik húzás eredménye piros? Mi a valószínűsége annak, hogy a 40-ik és 60-ik húzás eredménye is piros?