A február 29-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

1.) Egy urnában 20 fehér és 30 piros golyó van. Ha kihúzunk egy golyót akkor azt visszadobjuk, és vele együtt bedobunk az urnába két ugyanolyan színű golyót. Ezt megismételjük 50-szer. Mi a valószínűsége annak, hogy az 50-ik húzás eredménye piros. Készítsük el a feladat valószínűségi modelljét. Mutassuk meg ennek a modellnek a segítségével, hogy a piros golyó húzásának a valószínűsége minden húzásban ugyanannyi.

2.) Mi a valószínűsége annak, hogy 30 véletlenül kiválasztott ember között van két olyan, akinek ugyanakkor van a születésnapja?

Megoldás: Kérdezzük meg az embereket egymás után, hogy mikor van a születésnapjuk, és számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a k-ik ember mond először olyan napot, melyet már mondtak. Ennek valószínűsége

$$\left(1-\frac{1}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{k-2}{365}\right)\frac{k-1}{365},$$

ezért a vizsgált valószínűség

$$\sum_{k=2}^{30}\left(1-\frac{1}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{k-2}{365}\right)\frac{k-1}{365}.$$

A későbbiekben, ha lesz rá időnk érdemes visszatérni a fenti kérdéshez, és megvizsgálni, hogy körülbelül mennyi a fenti összeg segítségével kifejezett valószínűség.

3.) Egy szabályos pénzdarabot feldobunk többször egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy az 5. dobásban dobunk először fejet? Mi annak a valószínűsége, hogy az 5. dobásban dobunk harmadszor fejet?

Házi feladat:

Egy szabályos dobókockát egymásután többször feldobunk. Mi a valószínűsége annak, hogy a 10-ik dobásban dobunk harmadszor hatost.

Definició. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mező, azon legyen A és B két esemény, azaz $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$. Tegyük fel, hogy $P(B) > 0$. Ekkor az A esemény feltételes valószínűsége feltéve a B eseményt*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

4.) A zsebünkben van 30 kulcs, melyek közül az egyik nyit egy zárat. Egymás után kiprobáljuk véletlenszerűen kipróbálva ezeket a kulcsokat. Mi a valószínűsége annak, hogy a 20. kisérletre sikerül kinyitni a zárat? Mi annak a valószínűsége, hogy a 20. kisérletben sikerül kinyitni a zárat feltéve, hogy az első 19 kisérletben ez nem sikerült?

A következő feladat állítását gyakran hívják teleszkóp szabálynak.

5.) $P(B_1 \cap \dots \cap B_n) = P(B_1 | B_2 \cap \dots \cap B_{n-1} \cap B_n) \cdots P(B_{n-1} | B_n) P(B_n)$, ha $P(B_2 \cap \dots \cap B_n) > 0$.

6.) Egy urnában z zöld és s sárga golyó van. Egymás után kihúzunk négy golyót úgy, hogy minden húzás után a golyót visszadobjuk az urnába, és vele együtt az urnába dobunk 2 ellenkező színű golyót. Mi a valószínűsége egy zöld, zöld, zöld, sárga húzássorozatnak?

7.) Feldobunk egy dobókockát, majd utána annyi dobókockát, amennyi az első dobás eredménye volt. Mi a valószínűsége annak, hogy a második dobássorozatban lesz hatos? Mi annak a feltételes valószínűsége, hogy az első dobás eredménye hatos, ha a második dobássorozatban nem volt hatos?

Házi feladat:

Két különböző fáról leszednek 10 almát, és beteszik két különböző (megkülönböztethetetlen dobozba.) Ez egyik fáról szedett almák $\frac{1}{4}$ a másik fáról szedett almák pedig $\frac{1}{10}$ valószínűséggel férgesek. Kiveszünk az egyik dobozból két almát és mind a kettő férges. Ezek után kiveszünk a másik dobozból egy almát. Mi annak a valószínűsége, hogy ez az alma már nem férges?

Események függetlenségének definiciója: *Az $A_1, \dots, A_n$ események akkor (teljesen) függetlenek, ha az $\{1, \dots, n\}$ indexhalmaz minden $\{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ részhalmazára*

$$P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}) = P(A_{j_1}) \cdots P(A_{j_k}).$$

Események végtelen $A_1, A_2, \dots$ sorozata akkor és csak akkor független, ha tetszőleges pozitív n egész számra az $A_1, \dots, A_n$ események függetlenek.

8. Lássunk példát arra, hogy például $k = 3$ esetében egy A, B és C halmaz esetében a $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ feltétel teljesülése nem elegendő az A, B és C események függetlenségéhez. Legyen $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, $C = \{2, 3, 4\}$, $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, $P(\{5\}) = 1 - \frac{4}{3\sqrt{3}}$. Ekkor $ABC = \{2\}$, $P(ABC) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $P(AB) = P(\{2, 3\}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Ezért $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$, de $P(AB) \neq P(A)P(B)$.