A február 8-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

A gyakorlat elején mindenki vegyen elő egy papírlapot, és a hallgatóság egyik fel egy pénzdarabot. Mindenki írjon fel egy jelszót a lapjára, melynek segítségével azonosítani tudja a maga lapját. Akinél van pénzdarab, az dobja fel az érmét 100-szor és írja fel az egyes dobások eredményét (fej vagy írás). Akinél nincs érme az próbáljon szimulálni egy minél valószerűbb 100 hosszúságú írás–fej sorozatot. Az én feladatom lesz az összegyüjtött lapok alapján megállapitani, hogy melyek a valódi és melyek a szimulált dobássorozatok.

Feladatok:

1. Egy pénzdarabot feldobunk 2-szer. Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan 1 fejdobás lesz? Mi annak a valószínűsége, hogy legalább 1 fejdobás lesz?
2. Feldobunk két szabályos dobókockát. Mi annak a valószínűsége, hogy a dobáseredmények összege pontosan 9 illetve pontosan 10? Hány különböző módon fordulhat elő, hogy a dobások összege 9 és hány különböző módon lehet a dobások összege 10?
3. Mi egy szabályos pénzdarab 20 egymás utáni dobásának a természetes valószínűségi modellje? Mi a valószínűségi modellje egy szabályos dobókocka 10 egymás utáni dobásának?
4. Egy szabályos érmét feldobunk egymás után egészen addig, amíg másodszor megjelenik egy fej. Azután a dobássorozatot abbahagyjuk. Mi ennek a valószínűségi modellje?
5. Egy szabályos érmét feldobunk egymás után egészen addig, amíg másodszor megjelenik egy fej. Azután a dobássorozatot abbahagyjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy az utolsóelőtti dobás eredménye fej?

Házi feladat:

Egy szabályos érmét feldobunk egymás után egészen addig, amíg másodszor megjelenik egy fej. Azután a dobássorozatot abbahagyjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy legalább három dobást végzünk, és az utolsót kettővel megelőző dobás eredménye fej?

De Méré lovag problémája:

Az utolsó két probléma történetileg érdekes. Ezekkel a kérdésekkel fordult de Méré lovag Pascalhoz. Sokan e feladat megoldásától illetve Pascalnak és Fermat-nak e probléma megoldásáról szóló levelezésétől számítják a valószínűségszámítás megszületését.

a.) Ha egy kockát 4-szer feldobunk, akkor mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy hatos dobás lesz? Ha két kockát 24-szer feldobunk, mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy dupla hatos lesz.

(De Méré lovag arra csodálkozott rá, hogy az első valószínűség $\frac{1}{2}$-nél kicsit kisebb, a második valószínűség pedig $\frac{1}{2}$-nél kicsit nagyobb.)

b.) Két játékos egy igazságos játékot játszik, melynek mindegyik fordulójában az egyes játékosok $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyernek, illetve veszítenek. Megállapodnak, hogy az a játékos nyeri el a tétet, aki először ér el hat nyerést. A játékot félbe kell szakítaniuk akkor, amikor az egyiküknek három a másikuknak pedig öt nyerése volt. Hogyan kell igazságosan osztozkodniuk?

Megoldás:

a.) Annak a valószínűsége, hogy egy dobás eredménye nem hatos $\dfrac{5}{6}$, annak pedig, hogy 4 egymás utáni dobásban nem jelenik meg a hatos $\left(\dfrac{5}{6}\right)^4$. Annak a valószínűsége, hogy négy dobásban megjelenik egy hatos $P_1 = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^4$. Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy két kocka dobásában nem jelenik meg a dupla hatos $\dfrac{35}{36}$, annak a valószínűsége, hogy ez 24 dobásban nem jelenik meg $\left(\dfrac{35}{36}\right)^{24}$. Annak a valószínűsége, hogy 24 dobásban megjelenik egy dupla hatos $P_2 = 1 - \left(\dfrac{35}{36}\right)^{24}$.

Érdemes megérteni, hogy a P_1 és P_2 valószínűségek miért vannak olyan közel egymáshoz. Vezessük be az $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \dots,$ számokat. Ekkor $1 - P_1 = a_6^{2/3}$, $1 - P_2 = a_{36}^{2/3}$. Viszont tanultuk az analízisben, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-1}$, $e = 2.71\dots$. Továbbá ez az a_n sorozat elég gyorsan tart a határértékéhez, ezért az $a_6 \sim e^{-1}$ és $a_{36} \sim e^{-1}$ elég jó közelítés. Ezért mind a P_1 mind a P_2 valószínűség jól közelíthető az $1 - e^{-2/3}$ számmal. Továbbá ismeretes, hogy az a_n sorozat monoton növekvő, és innen adódik, hogy $P_1 > P_2$. Történetesen az $1 - e^{-2/3}$ szám közel van $\frac{1}{2}$-hez, és a P_1 és P_2 valószínűségek ezt a számot közrefogják.

b.) Tekintsük azt az általánosabb problémát, amikor n nyerés kell a tét megszerzéséhez, és az első játékos k a második pedig l alkalommal nyert. Tekintsük a következő $(n-k) + (n-l) - 1 = 2n - k - l - 1$ fordulót. Az első játékos akkor és csak akkor nyerné el a tétet, ha ezekben a fordulókban legalább $n - k$ alkalommal nyer. Ennek valószínósége $P = 2^{k+l+1-2n} \sum\limits_{j=n-k}^{2n-k-l-1} \dbinom{2n-k-l-1}{j}$. Jelen esetben az első játékos $\dfrac{7}{8}$, a második játékos $\dfrac{1}{8}$ valószínűséggel nyeri el a tétet. Az igazságos tehát a $7:1$ arányú osztozkodás.