A március 14-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

Először néhány szó a feladatsor 6. kitűzött feladatáról. A feladat úgy értendő, hogy tíz almát leszedünk az első fáról, melyek egymástól függetlenül férgesek $\frac{1}{4}$ valószínűséggel, és betesszük egy ládába, majd a másik fáról is leszedünk 10 almát, melyek egymástól függetlenül $\frac{1}{10}$ valószínűséggel férgesek, és ezt betesszük egy másik ládába. Számoljuk ki először annak a feltételes valószínűségét, hogy abban az esetben, ha a kiválasztott almák mindegyike férges, akkor az első fáról kiválasztott fa almáit próbáltuk ki. Ezután ennek a feltételes valószínűségnek az ismeretében annak valószínűségét, hogy a másik fáról választott alma férges-e. A feladat célja a feltételes valószínűség fogalmának megértése.

1.) Egy pénzdarabot feldobunk 100-szor egymás után. Számoljuk ki a fej-dobások számának a várható értékét. Számítsuk ki a várható értéket először a definició segítségével. Majd tekintsük a j-ik dobásból származó fejek számát, (mely egy vagy nulla, attól függően, hogy fej vagy írás-e a j-ik dobás eredménye), és számítsuk ki a fenti várható értéket, mint az egyes dobásokból származó fejek számának az összegét.

Beszéljük meg e feladat megoldását részletesebben. Először idézzük fel egy (diszkrét értékű) valószínűségi változó várható értékének a definicióját.

Diszkrét valószínűségi változó várható értékének definiciója. *Legyen ξ egy olyan (diszkrét értékű) valószínűségi változó, mely $x_1, x_2, \dots$ valós értékeket vesz fel, és $P(\xi = x_k) = p_k$, $k = 1, 2, \dots$. Ekkor a ξ valószínűségi várható értéke $E\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k x_k$ feltéve, hogy ez az összeg konvergens. Ha ez az összeg nem konvergens, akkor a ξ valószínűségi változónak nem definiáljuk a várható értékét. (A konvergencia ebben a definicióban abszolut konvergenciát jelent.)*

Valószínűségi változó szórásnégyzetének a definiciója. *Egy ξ valószínűségi változó szórásnégyzete $\operatorname{Var}\xi^2 = E\left[(\xi - E\xi)^2\right]$, feltéve hogy ez a kifejezés értelmes. Be lehet látni, hogy ez a kifejezés $\operatorname{Var}\xi^2 = E\left[(\xi - E\xi)^2\right] = E(\xi^2) - (E\xi)^2$.*

E definició alapján a következőképpen kell számolnunk. Annak valószínűsége, hogy pontosan k fejdobás történik 100 dobás esetében $\binom{100}{k} 2^{-100}$, $0 \le k \le 100$. Ezért a keresett várható érték $E\xi = \sum\limits_{k=0}^{100} k \binom{100}{k} 2^{-100}$. Ezt az összeget ki tudjuk számítani a következő észrevétel segítségével: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, ha $1 \le k \le n$. Innen $n = 100$ választással $E\xi = \sum\limits_{k=0}^{100} k\binom{100}{k} 2^{-100} = 100 \sum\limits_{k=0}^{99} \binom{99}{k} 2^{-100} = 100 \cdot 2^{-100} \cdot (1+1)^{99} = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$.

Ezt az eredményt egyszerűbben is meg lehet kapni, és ez az egyszerűbb módszer mely a heurisztikus elképzeléseinket fordítja le a matematika nyelvére általánosabban is használható. A következő eredményre van szükségünk:

Tétel. *Ha ξ és η két* tetszőleges *valószínűségi változó, melyekre léteznek az $E\xi$ és $E\eta$ várható értékek, akkor $E(\xi+\eta)=E\xi+E\eta$, $E(a\xi+b)=aE\xi+b$, tetszőleges valós a és b számokra.*

Tekintsünk egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőt, mely természetes modellje a 100 dobásból álló fej-írás sorozatoknak. Legyen egy elemi esemény egy lehetséges 100 hosszúságú fej–írás sorozat, $\omega=(F,\cdots,I\cdots)$, $P(\omega)=2^{-100}$, és definiáljuk a következő $\xi_j(\omega)$ valószínűségi változókat: $\xi_j(\omega)=1$, ha az ω 100 hosszúságú fej–írás sorozat j-ik helyén fej van, és $\xi_j(\omega)=0$, ha az ω fej–írás sorozat j-ik jegye írás. Vegyük észre, hogy a minket érdeklő mennnyiség a 100 dobásból álló fej-írás sorozatok száma $\xi(\omega)=\sum\limits_{j=1}^{100}\xi_j(\omega)$. Ezért az előbb kimondott tétel alapján

$$E\xi(\omega)=E\left(\sum_{j=1}^{100}\xi_j(\omega)\right)=\sum_{j=1}^{100}E\xi_j(\omega).$$

Viszont $E\xi_j(\omega)=\frac12\cdot1+\frac12\cdot0=\frac12$, ezért $E\xi=100\cdot\frac12=50$.

2.) Egy pénzdarabot feldobunk 100-szor egymás után. Számoljuk ki a fej-dobások számának a szórásnégyzetét.

Ezt a feladatot is kiszámolhatjuk a szórásnégyzet definiciója segítségével. Eszerint, az előző feladat jelöléseit használva $\mathrm{Var}\,\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\sum\limits_{j=0}^{100}j^2\binom{100}{j}2^{-100}-2500$. Másészt $j^2\binom{n}{j}=j(j-1)\binom{n}{j}+j\binom{n}{j}=n(n-1)\binom{n-2}{j-2}+n\binom{n-1}{j-1}$, ahonnan $n=100$ választással $\sum\limits_{j=0}^{100}j^2\binom{100}{j}2^{-100}=100\cdot99\sum\limits_{j=0}^{98}j^2\binom{100}{j}2^{-100}+100\sum\limits_{j=0}^{99}j^2\binom{100}{j}2^{-100}=$ $100\cdot99\cdot\frac14+50=2525$, és innen $\mathrm{Var}\,\xi=25$.

Ezt a feladatot is meg lehet egyszerűbben oldani a következő eredmény segítségével:

Tétel. *Legyenek $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ független valószínűségi változók. Ekkor*

$$\mathrm{Var}\,(\xi_1+\cdots+\xi_n)=\mathrm{Var}\,\xi_1+\cdots+\mathrm{Var}\,\xi_n,$$

$$\mathrm{Var}\,(a\xi+b)=a^2\mathrm{Var}\,\xi.$$

minden valós a és b számra.

Tekintsük egy 100 hosszúságú dobássorozatnak az előző feladatban elkészített modelljét. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{Var}\,\xi(\omega)=\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{100}\xi_j(\omega)\right)=\sum_{j=1}^{100}\mathrm{Var}\,\xi_j(\omega)=100\mathrm{Var}\,\xi_1(\omega)=100\cdot\frac14=25,$$

mert $\operatorname{Var}\xi_j(\omega) = E\xi_j^2(\omega) - (E\xi_j(\omega))^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

3.) Egy szabályos dobókockát feldobunk tízszer. Számoljuk ki a dobáseredmények összegének a várható értékét.

4.) Egy szabályos dobókockát feldobunk egymás után 10-szer. Mi a dobások összegének a várható értéke és szórásnégyzete? Ezeket a feladatokat az előző két feladat (egyszerűbb) megoldásához hasonlóan oldhatjuk meg. Tekintsük a feladat egy természetes valószínűségi modelljét. Legyenek az elemi események a 10 hosszúságú 1,2,3,4,5 vagy 6 számot tartalmazó sorozatok, minden elemi esemény valószínűsége legyen $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$. Definiáljuk a $\xi_j(\omega)$ valószínűségi változókat, ahol $\xi_j(\omega) = k$, ha az ω sorozat j-ik jele k, azaz a j-ik dobás eredménye k. Ekkor a $\xi_j(\omega)$ valószínűségi változók függetlenek, és minket a $\xi(\omega) = \sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j(\omega)$ összeg várható értéke és szórásnégyzete érdekel

$$E\xi = \sum_{j=1}^{10} E\xi_j = 10 \cdot E\xi_1 = 35$$

$$\operatorname{Var}\xi = \sum_{j=1}^{10} \operatorname{Var}\xi_j = 10 \cdot \operatorname{Var}\xi_1 = 10\left(\frac{91}{6} - 3.5^2\right) = \frac{350}{3},$$

mert $E\xi_j = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$, $E\xi_j^2 = \frac{1}{6}(1+4+5+16+25+36) = \frac{91}{6}$.

Házi feladat:

Egy dobókockát feldobunk tízszer. Számítsuk ki a páratlan dobáseredmények összegének a várható értékét. (A páros dobáseredményeket nem vesszük figyelembe).

5. Egy urnában 20 piros és 10 fehér golyó van. Kihúzunk visszatevéssel 10 golyót. Mi a kihúzott piros golyók számának a várható értéke és szórásnégyzete?

Ezt a feladat is hasonlóan tárgyalható az előzőekhez. Egy visszatevéses urnamodellt tekintünk, és abban definiáljuk a ξ_j, $1 \le j \le 10$, valószínűségi változókat úgy, hogy $\xi_j(\omega) = 1$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j(\omega) = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér. Ekkor a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, $E\xi_j = \frac{2}{3}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$. Minket a $\xi = \sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j$ várható értéke és szórásnégyzete érdekel. $E\xi = \frac{20}{3}$, $\operatorname{Var}\xi = \frac{20}{9}$.