A március 21-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

1. Egy urnában 20 piros és 10 fehér golyó van. Kihúzunk visszatevés nélkül 10 golyót. Mi a kihúzott piros golyók számának a várható értéke és szórásnégyzete?

Ezt a feladat is hasonlóan tárgyalható mint az előző gyakorlaton tárgyalt feladatok. Egy visszatevéses urnamodellt tekintünk, és abban definiáljuk a ξ_j, $1 \le j \le 10$, valószínűségi változókat úgy, hogy $\xi_j(\omega)$ jelöli a j-ik húzásban kihúzott piros golyók számát, azaz $\xi_j(\omega) = 1$, ha a j-ik húzás eredménye piros, a $\xi_j(\omega) = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér. Minket a $\xi = \sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j$ várható értéke és szórásnégyzete érdekel. A ξ_j valószínűségi változók nem függetlenek, és azt akarjuk megérteni, hogy ilyen esetben hogyan lehet kiszámolni a várható értéket és a szórásnégyzetet. Tudjuk, hogy $E\xi = E\left(\sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{10} E\xi_j$, és $E\xi_j = P(\xi_j = 1)$, ami annak a valószínűsége, hogy a j-ik húzás eredménye piros. Megtárgyaltuk korábbi feladatokban, hogy ez a valószínűség nem függ a j indextől, ezért annak valószínűsége, hogy a j-ik (az első húzás eredménye) piros $\frac{2}{3}$ értéke és $E\xi_j = \frac{2}{3}$. Ezért $E\xi = E\left(\sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{10} E\xi_j = \frac{20}{3}$. A szórásnégyzet kiszámítása érdekében idézzük fel, hogy

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var} \xi = \operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{10} \xi_j\right) &= E\left(\sum_{j=1}^{10} \xi_j\right)^2 - \left(E\left(\sum_{j=1}^{10} \xi_j\right)\right)^2 \\
&= E\left(\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{10} \xi_j\xi_k\right) - \left(E\left(\sum_{j=1}^{10} \xi_j\right)\right)^2 .
\end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var} \xi &= \sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{10} E\xi_j\xi_k - \sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{10} E\xi_j E\xi_k \\
&= \sum_{j=1}^{10} \left(E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2\right) + 2\sum_{j=1}^{9}\sum_{k=j+1}^{10} (E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k).
\end{aligned}$$

Adva két η és ζ valószínűségi változó, ezek kovarianciafüggvényét úgy definiáljuk mint $\operatorname{Cov}(\eta, \zeta) = E\eta\zeta - E\eta E\zeta$. Ekkor az előző számolások alapján

$$\operatorname{Var} \xi = \sum_{j=1}^{10} \operatorname{Var} \xi_j + 2\sum_{j=1}^{9}\sum_{k=j+1}^{10} \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k).$$

A szórásnégyzet kiszámítása érdekében tehát a $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k = E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k$ kovarianciákat kell kiszámolni. Viszont $E\xi_j\xi_k = P(\xi_j\xi_k = 1$ annak a valószínűsége, hogy mind a j-ik mind a k-ik húzásban piros golyót húzunk. Láttuk korábban, hogy ennek a valószínűsége nem függ a j és k indextől, azaz ugyanannyi mint annak a valószínűsége, hogy az első és második húzásban piros golyót húzunk. Ezért $E\xi_j, \xi_k = E\xi_1, \xi_2 = \frac{2}{3}\frac{19}{29}$.

Ezért $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k = -\frac{2}{267}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$. Ezen mennyiségek ismeretében kiszámíthtó az összeg szórásnégyzete a következő általános képlet segítségével:

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\operatorname{Var}\xi_j + 2\sum_{1\le j<k\le n}\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k).$$

A fentiekből következik, hogy

$$\operatorname{Var}\xi = \frac{20}{9} - \frac{180}{267} = \frac{1200}{801}$$

Házi feladat:

Egy urnában 20 piros és 10 fehér golyó van. Kihúzunk egymás után 10 golyót úgy, hogy minden húzás után a kihúzott golyót visszadobjuk egy vele azonos színű golyóval együtt. Mi a kihúzott piros golyók számának a várható értéke és szórásnégyzete? (A megoldás során emlékezzünk arra, hogy megtárgyaltuk annak valószínűségét, hogy egy ilyen modellben mi a valószínűsége, hogy egy adott sorszámú húzásban kihúzott golyó piros színű illetve annak a valószínűségét, hogy két adott sorszámú húzásban piros golyót húzunk. Láttuk, hogy ezek a valószínűségek nem függnek a húzások sorszámától. Használjuk fel ezeket az eredményeket a megoldásban.)

Idézzük fel a következő fontos eredményt is:

Tétel. *Legyen $\xi_1, \dots, \xi_k$ független valószínűségi változók, melyeknek létezik várható értékük. Ekkor e valószínűségi változók szorzatának a várható értéke egyenlő a várható értékek szorzatával, azaz képletben kifejezve:*

$$E(\xi_1 \cdots \xi_k) = E\xi_1 \cdots E\xi_k$$

2. Ha ξ és η független valószínűségi változók, akkor $\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = 0$.
3. Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók $D^2 = \operatorname{Var}\xi_1 < \infty$, akkor $\operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \frac{D^2}{n}$. Ezért a Chebishev egyenlőtlenség alapján minden $\varepsilon > 0$ számra $P\left(\frac{1}{n}\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\right| > e\right) \le \frac{D^2}{n\varepsilon^2}$.

$$\operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Var}\xi_k = \frac{1}{n^2}n\operatorname{Var}\xi_1 = \frac{D^2}{n}$$

4. Legyen ξ tetszőleges valószínűségi változó, $E\xi^2 < \infty$, $a > 0$ tetszőleges valós szám. Mutassuk meg, hogy $E(\xi - a)^2 = \operatorname{Var}\xi + (E\xi - a)^2$. Ezért $\operatorname{Var}\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \inf\limits_{-\infty<a<\infty} E(\xi - a)^2$.

$$\begin{aligned} E(\xi - a)^2 = E\left[(\xi - E\xi) + (E\xi - a)\right]^2 &= E(\xi - E\xi)^2 + E(\xi - a)^2 \\ &+ 2E\left[(E\xi - a)(\xi - E\xi)\right] = \operatorname{Var}\xi + (E\xi - a)^2, \end{aligned}$$

mert $E\left[(E\xi - a)(\xi - E\xi)\right] = E(E\xi - a)E(\xi - E\xi) = 0$.

5. Legyen ξ egy λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó λ, $\lambda > 0$, paraméterrel, azaz legyen $P(\xi = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Számítsuk ki e valószínűségi változó $E\xi$ várható értékét és $\operatorname{Var}\xi$ szórásnégyzetét.

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} kP(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.$$

$$\begin{aligned} E\xi^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}[k(k-1) + k]\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} + E\xi = \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

Innen $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$.

6. Legyen ξ és η két független Poisson eloszlású valószínűségi változó λ illetve μ paraméterrel. Bizonyítsuk be, hogy $\xi + \eta$ Poisson eloszláasú valószínűségi változó $\lambda + \mu$ paraméterrel.

$$\begin{aligned} P(\xi + \eta = k) &= \sum_{j=0}^{k} P(\xi = j, \eta = k - j) = \sum_{j=0}^{k} P(\xi = j)P(\eta = k - j) \\ &= \sum_{j=0}^{k}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!}e^{-\mu} = e^{-\lambda-\mu}\sum_{j=0}^{k}\frac{\lambda^j}{j!}\frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda-\mu}}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\lambda^j\mu^{k-j} = \frac{e^{-\lambda-\mu}}{k!}(\lambda + \mu)^k. \end{aligned}$$

Házi feladat

Egy ξ valószínűségi változót (n, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változónak nevezünk, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $0 < p < 1$, ha $P(\xi = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Legyen ξ és η két független binomiális eloszlású valószínűségi változó (m, p) illetve (n, p) paraméterekkel. Ekkor $\xi + \eta$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $(m + n, p)$ paraméterekkel.