A március 28-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

Annak érdekében, hogy a feltételes valószínűséggel való számolást jobban megértsük tekintsünk néhány (részben házi feladatként) kitűzött feladatot.

1. Két különböző fáról leszednek 10 almát, és beteszik két különböző (megkülönböztethetetlen dobozba.) Ez egyik fáról szedett almák $\frac{1}{4}$ a másik fáról szedett almák pedig $\frac{1}{10}$ valószínűséggel férgesek. Kiveszünk az egyik dobozból két almát és mind a kettő férges. Ezek után kiveszünk a másik dobozból egy almát. Mi annak a valószínűsége, hogy ez az alma már nem férges?

Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy az első almafáról leszedett almákat tartalmazó ládát és A_2 azt az eseményt, hogy az második almafáról leszedett almákat tartalmazó ládát választottuk az első kisérletre. Jelölje B azt az eseményt, hogy e ládából kiválasztott két alma férges. Számítsuk ki a $P(A_1|B)$ és $P(A_2|B)$ feltételes valószínűségeket.

Mivel $P(A_1|B) = \dfrac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$, $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$, $P(A_1 \cap B) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{16}$, $P(A_2 \cap B) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{100}$, ezért $P(A_1|B) = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100}}$. Hasonlóan, $P(A_2|B) = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100}}$. Jelölje C azt az eseményt, hogy a másik ládából veletlenül kiválasztott alma nem férges. Ekkor minket a $P(C|B)$ feltételes valószínűség érdekel.

Viszont $P(C|A_1 \cap B) = P(C|A_1) = \dfrac{9}{10}$, $P(C|A_2 \cap B) = P(C|A_2) = \dfrac{3}{4}$, $P(C|B) = P(C \cap A_1|B) + P(C \cap A_2|B) = P(C|A_1 \cap B)P(A_1|B) + P(C|A_2 \cap B)P(A_2|B)$. Ezért $P(B|C) = \dfrac{9}{10} \cdot \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100}} + \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100}}$.

2. Mi annak a valószínűsége, hogy egy (szabályos) dobókocka mindkét dobásának az eredménye hatos feltéve, hogy legalább az egyik hatos?

Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy az első dobás eredménye hatos, A_2 azt az eseményt, hogy a második dobás eredménye hatos. Akkor minket a $P(A_1 \cap A_2|A_1 \cup A_2)$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont $P(A_1 \cap A_2|A_1 \cup A_2) = \dfrac{P((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} = \dfrac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cup A_2)}$. Másrészt $P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{1}{36}$, $P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = 1 - \dfrac{25}{36} = \dfrac{11}{36}$. Innen a keresett feltételes valószínűség $\dfrac{1}{11}$.

3. Egy diák a feltett kérdésre (három lehetőség közül kell kiválasztani a megfelelőt) p valószínűséggel tudja a helyes választ. Ha nem tudja, akkor tippel, és ez $\frac{1}{3}$

valószínűséggel ad helyes eredményt. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy tudja a választ feltéve, hogy helyes választ adott?

Jelölje A azt az eseményt, hogy tudja a helyes választ, B azt az eseményt, hogy helyes választ ad. A $P(A|B)$ feltételes valószínűség értékére vagyunk kiváncsiak. Ekkor $P(A) = P(A \cap B) = p$, $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) + \frac{1}{3}P(\bar{A}) = p + \frac{1}{3})1 - p)$. Innen $P(A|B) = \dfrac{p}{p + \frac{1}{3}(1-p)}$.

4. Egy ξ valószínűségi változó eloszlása (n,p) paraméterű negatív binomiális eloszlás, ha pozitív egész értékeket vesz fel, és $P(\xi = k) = \binom{k-1}{n-1} p^{k-n}(1-p)^n$. Tekintsünk egy pénzdarabot, mely p valószínűséggel esik a fej oldalra és $1-p$ valószínűséggel az írás oldalra. Dobjuk fel egymás után végtelen sokszor, és tekintsük azt a ξ valószínűségi változót, mely azt adja meg, hogy hányadik dobásra jelent meg az n-ik írás. Lássuk be, hogy ξ eloszlása negatív binomiális eloszlás (n,p) paraméterrel.
5. Lássuk be az előző feladat segítségével, hogy ha ξ_1, ξ_n független $(1,p)$ paraméterű negatív binomimiális eloszlású valószínűségi változók, akkor $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ (n,p) paraméterű negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó. Lássuk be formális számolással is, hogy ha xi és η független valószínűségi változók, ξ $(n-1,p)$, η $(1,p)$ paraméterú negatív binomiális eloszlással, akkor $\xi + \eta$ negatív binomiális eloszlású $(n,p$ paraméterrel.

$$
\begin{aligned}
P(\xi + \eta = k) &= \sum_{j=n-1}^{k-1} P(\xi = j, \eta = k - j) = \sum_{j=n-1}^{k-1} P(\xi = j) P(\eta = k - j) \\
&= \sum_{j=n-1}^{k-1} \binom{j-1}{n-2} p^{j-n+1}(1-p)^{n-1} p^{k-j-1}(1-p) \\
&= p^{n-k}(1-p)^n \sum_{j=n-1}^{k-1} \binom{j-1}{n-2} \\
&= p^{n-k}(1-p)^n \sum_{j=n-2}^{k-2} \binom{j}{n-2} = p^{n-k}(1-p)^n \binom{k-1}{n-1}.
\end{aligned}
$$

6. Számoljuk ki egy $(1,p)$ majd egy (n,p) paraméterű negativ binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Ha ξ $(1,p)$ paraméterű negativ binomiális eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)p^{k-1} \qquad E\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)p^{k-1}$$

Ezen összegek egyik lehetséges kiszámolása: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, ha $|x| < 1$. Két egymás utáni deriválással kapjuk, hogy $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ és $\sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$. Innen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2p^{k-1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} + p\sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)p^{k-2} = \frac{1}{(1-p)^2} + \frac{2p}{(1-p)^3}$, és $E\xi = \frac{1}{1-p}$, $E\xi^2 = \frac{1}{1-p} + \frac{2p}{(1-p)^2}$. Ezért $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{p}{(1-p)^2}$. Ha ξ (n,p) paraméterű negativ binomiális eloszlású valószínűségi változó, akkor eloszlása megegyezik n független $(1,p)$ paraméterű negativ binomiális eloszlású valószínűségi változó összegével, ezért az összeg várható értékéről és szórásnégyzetéről tanultak alapján $E\xi = \frac{n}{1-p}$, $\operatorname{Var}\xi = \frac{np}{(1-p)^2}$.

7. Legyen ξ $(1,p)$ paraméterű negativ binomiális eloszlású valószínűségi változó. Lássuk be, hogy tetszőleges m egész számra $P(\xi > m+k|\xi > m) = P(\xi > k)$. Mi ennek az azonosságnak a szemléletes tartalma? Legyen α a ξ valószínűségi változótól független valószínűségi változó, melyre $P(\alpha = 1) = 1 - P(\alpha = 0)$ a ξ és $(1-\alpha) + \alpha(\xi+1) = 1 + \alpha\xi$ eloszlása megegyezik. Számítsuk ki ennek segítségével ξ várható értékét és szórásnégyzetét.
8. Végezzünk el egy kisérletet egymás után végtelen sokszor. Minden esetben legyen a kisérlet p, $0 < p < 1$ valószínűséggel sikeres, és legyenek a kisérletek egymástól függetlenek. Mutassuk meg a Borel–Cantelli lemma segítségével, hogy annak valószínűsége, hogy csak véges sok sikeres kisérlet következik be zéró.
9. Egy egységnégyzet két átellenes oldalára véletlenszerüüen (egyenletes eloszlással, egymástól függetlenül) ledobunk két pontot. Lássuk be, hogy annak valószínűsége, hogy a két pont távolsága egymástól kisebb mint x $1 - \left(\sqrt{x^2-1} - 1\right)^2$, ha $1 \le x \le \sqrt{2}$.